

УДК 534.26

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ ЖОРСТКОМУ КОНУСІ ПРИ ОСЬОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

Д. Б. КУРИЛЯК, В. О. ЛИСЕЧКО*

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

вул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна

*E-mail: vtlysechko@gmail.com

Отримано 31.01.2014

Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому порожньому конусі при осьовому опроміненні. Задачу розв'язано відносно потенціалу швидкості дифрагovanого поля методом власних функцій підобластей з використанням процедури аналітичної регуляризації. Невідомі коефіцієнти розкладу отримано з розв'язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, які допускають розв'язок із заданою точністю. Досліджено вплив параметрів конуса на його дифракційні характеристики. Отримані числові результати порівнюються з відомими даними для диска.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: акустична хвиля, скінченний конус, діаграма спрямованості, переріз розсіяння, аналітична регуляризація

Получено решение задачи дифракции плоской акустической волны на конечном жестком полом конусе при осевом облучении. Задача решена относительно потенциала скорости дифрагированного поля методом собственных функций подобластей с использованием процедуры аналитической регуляризации. Неизвестные коэффициенты разложения получены из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода, допускающих решение с заданной точностью. Исследовано влияние параметров конуса на его дифракционные характеристики. Полученные численные результаты сравниваются с известными данными для диска.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: акустическая волна, конечный конус, диаграмма направленности, сечение рассеяния, аналитическая регуляризация

The paper deals with solving of a problem on diffraction a plane acoustic wave by a finite rigid hollow cone in axial irradiation. The problem is solved in terms of the velocity potential using the technique of matching of eigenmodes for subdomains and analytical regularization procedure. The unknown expansion coefficients are determined from the infinite system of linear algebraic equations of the second kind that allow the obtaining of a solution with a desired accuracy. The effect of the finite cone parameters to its scattering characteristics is studied. The obtained numerical results are compared with the known ones for a disk.

KEY WORDS: acoustic wave, finite cone, scattering pattern, scattering cross-section, analytical regularization procedure

ВСТУП

Сучасні технології діагностування матеріалів базуються на вивченні у широкому частотному діапазоні взаємодії акустичних хвиль з макродефектами конструкцій і виробів. При дослідженні цієї проблеми важливу роль відіграють моделі дефектів канонічної форми, оскільки для них можна отримати коректні розв'язки відповідних дифракційних задач. Ці розв'язки відіграють ключову роль як реперні для верифікації більш загальних числових методів.

У науковій літературі значну кількість праць присвячено вивченню дифракції акустичних хвиль на напівнескінчених конусах з різними типами граничних умов – Діріхле, Неймана чи імпедансними. В основному розглядалися нескінченні кругові конуси [1–10]. Дифракцію на еліптичному конусі досліджено в [11], а на конусі

довільної форми – в [12]. Дифракція хвиль на плоских секторах вивчалась у [13,14].

Для розв'язання задач дифракції на скінчених порожнистих конусах (або дисках як граничний випадок) використовувався метод Вінера–Хопфа у поєднанні з методом інтегральних перетворень Конторовича–Лебедева [15,16]. У роботі [17] розв'язано задачу дифракції акустичної хвилі на м'якому скінченному конусі, де внутрішня область одного з секторів перегороджувалась сферичним сегментом. Для цього було використано метод спряження полів, а суттєве покращення збіжності досягнуто завдяки урахуванню асимптотичної поведінки розв'язку отриманої нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР). У статті [18] задачу дифракції на скінченному конусі дослідили методами геометричної теорії дифракції, а у [19] – експериментально.

У публікації [20] для розв'язання задач дифра-

кції на конусах запропоновано метод аналітичної регуляризації. У даній роботі цей метод використовується для дослідження дифракції плоскої звукової хвилі на скінченному жорсткому конусі.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у сферичній системі координат (r, θ, φ) задано ідеально жорсткий порожнистий скінченний конус

$$Q : \{r \in (0, c); \theta = \gamma; \varphi = [0, 2\pi)\}$$

(див. рис. 1). Конус Q опромінюється плоскою монохроматичною акустичною хвилею, яка поширюється вздовж додатного напрямку осі z ($\theta = 0^\circ$). Для цього випадку залежність поля від часу задаємо множником $e^{-i\omega t}$, який надалі опускаємо.

У результаті взаємодії плоскої хвилі з конусом Q в усьому просторі встановиться незалежний від координати φ розподіл тиску, знаходження якого зводиться до розв'язання осесиметричної змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца відносно потенціалу швидкості дифрагованого поля $U(r, \theta)$:

$$\Delta U(r, \theta) + k^2 U(r, \theta) = 0. \quad (1)$$

Тут $k = \omega/c_0$ – хвильове число; ω – кругова частота; c_0 – швидкість поширення звукової хвилі; Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Шуканий потенціал $U(r, \theta)$ задовольняє граничну умову

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [U(r, \theta) + U^{(i)}(r, \theta)] \Big|_{r, \theta \in Q} = 0, \quad (2)$$

(тут $U^{(i)}(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta}$ – потенціал швидкості плоскої хвилі одиничної амплітуди), умову випромінювання Зомерфельда

$$\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} - ikU(r, \theta) = o(1/r), \quad (3)$$

а також умову обмеженості енергії поля у довільному скінченному об'ємі V

$$\int_V (|U(r, \theta)|^2 + |\nabla U(r, \theta)|^2) dV \rightarrow \text{const}, \quad (4)$$

яка тут зводиться до виконання умови Мейкснера на краю та вершині конуса.

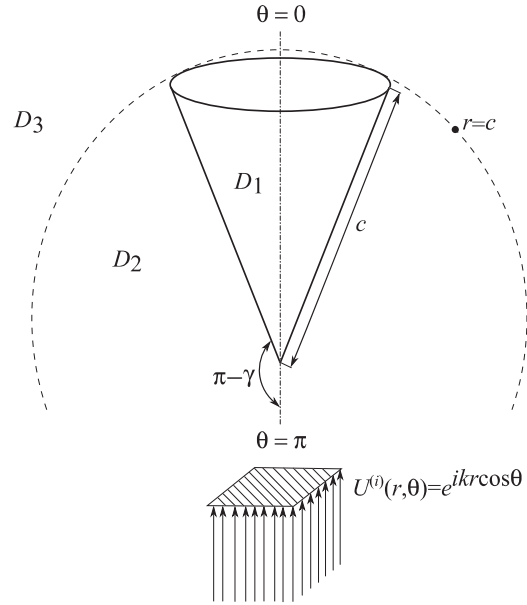


Рис. 1. Геометрична схема

Потенціал первинного поля у сферичній системі координат записуємо так [21]:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I_{z_n}(sr).$$

Тут $s = -ik$; $z_n = n + 1/2$; $A_n^{(0)} = \sqrt{2\pi} (-1)^n z_n$; $P_{\eta-1/2}(\cdot)$ – функція Лежандра; $I_{\eta}(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя.

2. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розіб'ємо простір

$$R^3 : \{r \in (0, \infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

на підобласті

$$D_1 : \{r \in (0, c); \theta \in [0, \gamma)\},$$

$$D_2 : \{r \in (0, c); \theta \in (\gamma, \pi]\},$$

$$D_3 : \{r \in (c, \infty); \theta \in [0, \pi]\}.$$

Повне поле подамо так:

$$U^{(t)}(r, \theta) = \begin{cases} U^{(i)}(r, \theta) + U(r, \theta), & r, \theta \in D_3; \\ U(r, \theta), & r, \theta \in D_1, D_2. \end{cases}$$

Потенціал швидкості дифрагованого поля шукаємо у вигляді

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{I_{\nu_p}(sr)}{I_{\nu_p}(sc)}, & r, \theta \in D_1; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{I_{\mu_k}(sr)}{I_{\mu_k}(sc)}, & r, \theta \in D_2; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{z_n}(sr)}{K_{z_n}(sc)}, & r, \theta \in D_3. \end{cases} \quad (5)$$

Тут $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, \bar{x}_n – невідомі коефіцієнти розкладу; $K_\eta(\cdot)$ – функція Макдональда; ν_p , μ_k – додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P_{\eta-1/2}^1(\pm \cos \gamma) \Big|_{\eta=\begin{cases} \nu_p \\ \mu_k \end{cases}} = 0. \quad (6)$$

Подання потенціалу у вигляді рядів (5) забезпечує виконання граничної умови (2), умови випромінювання (3), а також умови обмеженості поля у вершині конуса (4). Зауважимо також, що для коректного врахування незалежного від координати θ тиску в областях $D_1 \dots D_3$, беруться до уваги мінімальні додатні значення коренів трансцендентних рівнянь (6), а саме $\nu_1 = \mu_1 = 1/2$, оскільки $P_0(\cos \theta) \equiv 1$.

Невідомі коефіцієнти розкладу потенціалу дифрагованого поля $U(r, \theta)$ шукаємо у класі послідовностей, що забезпечує рівномірну збіжність рядів (5), причому їхні перші похідні допускають особливості типу $\rho^{-1/2}$, де ρ – віддаль до краю конуса в локальній системі координат.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в рівняннях (5) використаємо умови спряження повного потенціалу та його нормальної похідної на сфері $r=c$, $\theta \in [0, \pi]$, яка містить край конуса. У результаті отримаємо суматорні рівняння задачі, які у зв'язку з особливістю градієнта потенціалу при $r \rightarrow c \pm 0$ і $\theta \rightarrow \gamma \pm 0$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) + A_0^{(0)} I_{1/2}(sc) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I_{z_n}(sc) = \\ = \begin{cases} y_1^{(1)} + \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=2}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma); \\ y_1^{(2)} + \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma, \pi]; \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 \frac{K'_{1/2}(sc)}{K_{1/2}(sc)} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} + \\ + A_0^{(0)} I'_{1/2}(sc) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I'_{z_n}(sc) = \\ = \begin{cases} y_1^{(1)} \frac{I'_{1/2}(sc)}{I_{1/2}(sc)} + \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=2}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{I'_{\nu_p}(sc)}{I_{\nu_p}(sc)}, & \theta \in [0, \gamma); \\ y_1^{(2)} \frac{I'_{1/2}(sc)}{I_{1/2}(sc)} + \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{I'_{\mu_k}(sc)}{I_{\mu_k}(sc)}, & \theta \in (\gamma, \pi]. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $N=P+K-1$; штрих означає похідну за аргументом ($f'(sc) = \partial f / \partial(sc)$). У цих рівняннях окремо виділені незалежні від θ доданки, а граничний перехід буде проводитися так, щоб забезпечити виконання умови Мейкснера на краю конуса.

Для зведення суматорних рівнянь (7), (8) до НСЛАР використаємо формули перерозкладу функцій Лежандра:

$$P_{z_n-1/2}(\cos \theta) = q(z_n, \gamma) \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P \frac{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)}{\nu_p^2 - z_n^2} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma], \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)}{\mu_k^2 - z_n^2} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma, \pi], \end{cases} \quad (9)$$

де $q(z_n, \gamma) = P_{z_n-1/2}^1(\cos \gamma)$; $\alpha^\pm(\eta, \gamma) = \mp 2[\partial P_{\eta-1/2}^1(\pm \cos \gamma)/\partial \eta]^{-1}$, $\eta = \nu_p$ при верхньому знаку і $\eta = \mu_k$ – при нижньому; $P_{\eta-1/2}^1(\cdot)$ – приєднана функція Лежандра: $P_{\eta-1/2}^1(\pm \cos \gamma) = \pm \partial P_{\eta-1/2}(\pm \cos \gamma)/\partial \gamma$ [21].

Справедливим є твердження, яке сформулюємо таким чином.

Теорема. Для усіх $0 < \gamma < \pi$ ряди (9) збігаються до функції $P_{z_n-1/2}(\cos \theta)/q(z_n, \gamma)$ рівномірно по куту θ в областях $\theta \in [0, \gamma]$ і $\theta \in [\gamma, \pi]$ відповідно.

Доведення. Розглянемо інтеграл

$$J_n^\pm(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{t P_{t-1/2}(\pm \cos \theta) dt}{(t^2 - z_n^2) P_{t-1/2}^1(\pm \cos \gamma)}, \quad (10)$$

де C_R – коло радіуса $|t| = R$; знак “+” береться, коли $\theta \in [0, \gamma]$ і “–”, коли $\theta \in [\gamma, \pi]$. Підінтегральна функція у співвідношенні (10) має прості полюси у точках $t = \pm z_n$ і $t = \pm \eta_p$, де $\eta_p = \nu_p$, коли $\theta \in [0, \gamma]$ і $\eta_p = \mu_p$, коли $\theta \in [\gamma, \pi]$, $p = 1, 2, 3, \dots$. При $|t| \rightarrow \infty$ підінтегральна функція прямує до нуля не повільніше ніж t^{-2} . Отже $J_n^\pm(\theta) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Якщо тепер C_R не перетинає полюсів підінтегральної функції, то, замінивши інтеграл (10) рядом лишків, приходимо до твердження теореми ■

Підставимо формули (9) у ліві частини рівнянь (7), (8) відповідно для кожної з областей $\theta \in [0, \gamma]$ і $\theta \in (\gamma, \pi]$. Надалі обмежимося скінченним числом доданків і прирівняємо коефіцієнти при однакових функціях Лежандра. У результаті прийдемо до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N = P + K - 1$, яку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{1/4 - z_n^2} &= \frac{2y_1^{(1)}}{\alpha^+(1/2, \gamma)} - \frac{2\bar{x}_0}{\alpha^+(1/2, \gamma)} - \frac{2A_0^{(0)} I_{1/2}(sc)}{\alpha^+(1/2, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{1/4 - z_n^2} A_n^{(0)} I_{z_n}(sc); \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\nu_p^2 - z_n^2} &= \frac{y_p^{(1)}}{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{\nu_p^2 - z_n^2} A_n^{(0)} I_{z_n}(sc), \quad p = 2, 3, \dots, P; \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{1/4 - z_n^2} &= \frac{2y_1^{(2)}}{\alpha^-(1/2, \gamma)} - \frac{2\bar{x}_0}{\alpha^-(1/2, \gamma)} - \frac{2A_0^{(0)} I_{1/2}(sc)}{\alpha^-(1/2, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{1/4 - z_n^2} A_n^{(0)} I_{z_n}(sc); \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\mu_k^2 - z_n^2} &= \frac{y_k^{(2)}}{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{\mu_k^2 - z_n^2} A_n^{(0)} I_{z_n}(sc), \quad k = 2, 3, \dots, K; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{1/4 - z_n^2} \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} &= \frac{2y_1^{(1)}}{\alpha^+(1/2, \gamma)} \frac{I'_{1/2}(sc)}{I_{1/2}(sc)} - \frac{2\bar{x}_0}{\alpha^+(1/2, \gamma)} \frac{K'_{1/2}(sc)}{K_{1/2}(sc)} - \\ &\quad - \frac{2A_0^{(0)} I'_{1/2}(sc)}{\alpha^+(1/2, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{1/4 - z_n^2} A_n^{(0)} I'_{z_n}(sc); \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\nu_p^2 - z_n^2} \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} &= \frac{y_p^{(1)}}{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)} \frac{I'_{\nu_p}(sc)}{I_{\nu_p}(sc)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma) A_n^{(0)}}{\nu_p^2 - z_n^2} I'_{z_n}(sc), \quad p = 2, 3, \dots, P; \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{1/4 - z_n^2} \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} &= \frac{2y_1^{(2)}}{\alpha^-(1/2, \gamma)} \frac{I'_{1/2}(sc)}{I_{1/2}(sc)} - \frac{2\bar{x}_0}{\alpha^-(1/2, \gamma)} \frac{K'_{1/2}(sc)}{K_{1/2}(sc)} - \\ &\quad - \frac{2A_0^{(0)} I'_{1/2}(sc)}{\alpha^-(1/2, \gamma)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma)}{1/4 - z_n^2} A_n^{(0)} I'_{z_n}(sc); \\ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\mu_k^2 - z_n^2} \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} &= \frac{y_k^{(2)}}{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)} \frac{I'_{\mu_k}(sc)}{I_{\mu_k}(sc)} - \sum_{n=1}^N \frac{q(z_n, \gamma) A_n^{(0)}}{\mu_k^2 - z_n^2} I'_{z_n}(sc), \quad k = 2, 3, \dots, K. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут уведено нову змінну $x_n = q(z_n, \gamma)\bar{x}_n$.

У рівняннях (11), (12) виключимо невідомі \bar{x}_0 , $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ ($p, k = \overline{1, \infty}$) і отриману систему запишемо так:

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{z_n} I_{1/2}]_{sc}}{[1/4 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{1/2}(sc)} = \tag{13a}$$

$$= \sum_{n=1}^N \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{1/2}]_{sc}}{[1/4 - z_n^2]I_{z_n}(sc)I_{1/2}(sc)};$$

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{z_n} I_{\nu_p}]_{sc}}{[\nu_p^2 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{\nu_p}(sc)} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\nu_p}]_{sc}}{[\nu_p^2 - z_n^2]I_{z_n}(sc)I_{\nu_p}(sc)}, \tag{13b}$$

$$p = 2, 3, \dots, P;$$

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{z_n} I_{\mu_k}]_{sc}}{[\mu_k^2 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{\mu_k}(sc)} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\mu_k}]_{sc}}{[\mu_k^2 - z_n^2]I_{z_n}(sc)I_{\mu_k}(sc)}, \tag{13c}$$

$$k = 2, 3, \dots, K,$$

де $W[f g]_x = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$;
 $\bar{A}_n^{(0)} = -q(z_n, \gamma)A_n^{(0)}I_{z_n}(sc)$.

Із множин індексів $\{1/2\}$, $\{\nu_p\}_{p=2}^\infty$ і $\{\mu_k\}_{k=2}^\infty$ утворимо зростаючу послідовність

$$\{\xi_q\}_{q=1}^\infty = \{1/2\} \cup \{\nu_p\}_{p=2}^\infty \cup \{\mu_k\}_{k=2}^\infty. \tag{14}$$

Перейдемо у співвідношеннях (13) до границі, коли $N, P, K \rightarrow \infty$ ($N = P + K - 1$), розмістивши рівняння цієї системи у відповідності до послідовності (14). Отриману НСЛАР запишемо у матричному вигляді:

$$A_{11}X = F, \tag{15}$$

де $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty$; A_{11} – нескінченний матричний оператор:

$$A_{11} : \left\{ a_{qn} = \frac{scW[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{\xi_q}(sc)} \right\}_{q,n=1}^\infty; \tag{16}$$

$F = \{f_q\}_{q=1}^\infty$ – відомий вектор;

$$f_q = \sum_{n=1}^\infty \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2]I_{z_n}(sc)I_{\xi_q}(sc)}.$$

Зауважимо, що при формальній редукції НСЛАР (15) з достатньо великим порядком N кількість рівнянь у такій скінченній системі, включених зі співвідношень (13а)–(13с), задовольняє співвідношення $P/K = \gamma/(\pi - \gamma)$. Це твердження безпосередньо впливає з асимптотичної поведінки коренів рівнянь (6) [22]:

$$\nu_p = \frac{\pi}{\gamma} \left(p - \frac{3}{4} \right) + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\mu_k = \frac{\pi}{\pi - \gamma} \left(k - \frac{3}{4} \right) + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

3. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ НСЛАР

Визначимо асимптотики матричних елементів оператора (16), які при $\xi_q, z_n \gg |sc|$ і $|sc| \rightarrow 0$ запишемо у вигляді [20, 23]:

$$a_{qn} = \frac{scW[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{\xi_q}(sc)} \Big|_{\xi_q, z_n \gg |sc|} = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\xi_q - z_n} + O\left(\frac{1}{\xi_q z_n (\xi_q - z_n)}\right),$$

$$a_{qn} = \frac{scW[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2]K_{z_n}(sc)I_{\xi_q}(sc)} \Big|_{sc \rightarrow 0} = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\xi_q - z_n} + O\left(\left(\frac{sc}{2}\right)^2\right).$$

Головні члени асимптотик (17), (18) визначають матричний оператор типу згортки:

$$A : \left\{ a_{qn} = \frac{1}{\xi_q - z_n} \right\}_{q,n=1}^\infty. \tag{19}$$

Для знаходження оберненого оператора A^{-1} розглянемо функцію

$$M(\nu, \gamma) = -\frac{\cos \pi \nu}{\pi P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}^1(-\cos \gamma)}, \tag{20}$$

яка є парною мероморфною функцією, регулярною у смузі $\Pi : \{|\operatorname{Re} \nu| < 1/2\}$, а за її межами має прості дійсні нулі й полюси у точках $\pm z_k, \pm \xi_q$ ($k, q = \overline{1, \infty}$). Окрім того, $M(\nu, \gamma) = O(\nu^{-1})$ при $|\nu| \rightarrow \infty$.

Функція (20) допускає факторизацію у вигляді $M(\nu, \gamma) = M_+(\nu, \gamma)M_-(\nu, \gamma)$, де $M_\pm(\nu, \gamma)$ – функції, регулярні у півплощинах $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ і $\operatorname{Re} \nu < -1/2$; $M_+(\nu, \gamma) = M_-(-\nu, \gamma)$;

$M_{\pm}(\nu, \gamma) = O(\nu^{-1/2})$ при $\nu \rightarrow \infty$ в областях регулярності.

З використанням методу нескінченних добуток функцію $M_+(\nu, \gamma)$ подамо так:

$$M_+(\nu, \gamma) = B_0 \left\{ \Gamma(\nu + 1/2) e^{\chi\nu} \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\nu}{\nu_n} \right) e^{-\nu/\nu_n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\nu}{\mu_n} \right) e^{-\nu/\mu_n} \right\}^{-1},$$

$$B_0 = [P_{-1/2}^1(\cos \gamma) P_{-1/2}^1(-\cos \gamma)]^{-1/2},$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi} - \psi(1/4) - S(\gamma) - S(\pi - \gamma),$$

$$S(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{\pi(n - 3/4)} - \frac{1}{\nu_n} \right\},$$

$$S(\pi - \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi - \gamma}{\pi(n - 3/4)} - \frac{1}{\mu_n} \right\}.$$

Тут $\psi(\cdot)$ – логарифмічна похідна гамма-функції.

Оператор обернений до (19) подамо у вигляді [20]:

$$A^{-1} : \{ \tau_{kq} \}_{k,q=1}^{\infty}, \quad (21)$$

$$\tau_{kq} = \frac{1}{\{ M_{-1}^{-1}(\xi_q, \gamma) \}' M_{-1}'(z_k, \gamma)(z_k - \xi_q)}.$$

Тут штрих означає похідну за аргументом $M_{-1}'(\nu, \gamma) = d/d\nu [M_{-1}(\nu, \gamma)]|_{\nu=\xi_q, z_k}$ у точках $\nu = \xi_q$ і $\nu = z_k$. Елементи матричних операторів знаходимо з формул

$$M_{-1}'(z_k, \gamma) = - \frac{1}{[P_k^1(\cos \gamma)]^2 M_+(k + 1/2)},$$

$$\{ M_{-1}^{-1}(\xi_q, \gamma) \}' = - \frac{\pi M_+(\xi_q)}{\cos \pi \xi_q} \times$$

$$\times \begin{cases} P_{\nu-1/2}^1(-\cos \gamma) \frac{\partial P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma)}{\partial \nu} \Big|_{\xi_q \in \{ \nu_k \}_{k=2}^{\infty}}, \\ P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma) \frac{\partial P_{\nu-1/2}^1(-\cos \gamma)}{\partial \nu} \Big|_{\xi_q \in \{ \mu_k \}_{k=2}^{\infty}}. \end{cases}$$

Справедливо $\{ M_{-1}^{-1}(1/2, \gamma) \}' = M_+(1/2, \gamma)$.

Виділимо у НСЛАР (15) матричний оператор (19) і, використовуючи обернений оператор (21), отримаємо НСЛАР другого роду:

$$X = A^{-1}[A - A_{11}]X + A^{-1}F. \quad (22)$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (22) існує в просторі $b(\sigma)$: $\{ \|x_n\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n n^\sigma = 0 \}$, при $0 \leq \sigma < 1/2$. Це забезпечує виконання умов Мейкснера на краю [20].

Коефіцієнти розкладу дифрагованого потенціалу швидкості (5) в області D_3 виражаємо через розв'язки НСЛАР (22) формулою $\bar{x}_n = x_n/q(z_n, \gamma)$, де $n = 1, 2, 3, \dots$. Невідоме значення \bar{x}_0 знаходимо із розв'язку системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь, які формуємо з перших рівнянь (11) і (12), що дає $\bar{x}_0 \equiv 0$.

4. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Усі характеристики розсіяного поля розраховувались на основі розв'язку скінченної системи рівнянь, отриманої з НСЛАР (22) методом редукції. Окрім того, використовувались співвідношення (5). Порядок редукції вибирався з умови $N = |kc| + q$, $q = (4 \dots 10)$. Аналізувались діаграми спрямованості дифрагованого поля, які розраховувались за формулою

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} |rU(r, \theta)e^{-ikr}|,$$

де $U(r, \theta)$ – потенціал швидкості дифрагованого поля (5) в області D_3 .

На рис. 2 показано вплив хвильової довжини твірної kc на діаграми спрямованості вузького конуса ($\gamma = 20^\circ$) при опроміненні його плоскою звуковою хвилею зі сторони вершини. Коли довжина твірної $c < \lambda/2$, то дифраговане поле слабо залежить від параметра kc . Як видно з поведінки кривих на рис. 2, а, у цьому випадку поле практично рівномірно розподілене по куту θ . Із ростом параметра kc головний пелюсток діаграм спрямованості формується у напрямі $\theta = 0^\circ$, тобто основна частина енергії дифрагованого поля зосереджується у напрямі падіння плоскої хвилі (див. рис. 2, б). У той же час, зворотне випромінювання ($\theta = 180^\circ$) з ростом kc спадає. Спостерігаємо також формування “глухої” області при $100^\circ < \theta < 130^\circ$, де модуль потенціалу швидкості дифрагованого поля близький до нуля.

На рис. 3 показані аналогічні залежності діаграм спрямованості, коли конус опромінюється з боку основи ($\gamma = 160^\circ$). Як видно з порівняння кривих на рис. 2, а і 3, а, при $c < \lambda/2$ діаграми спрямованості скінченних вузьких конусів, опромінених

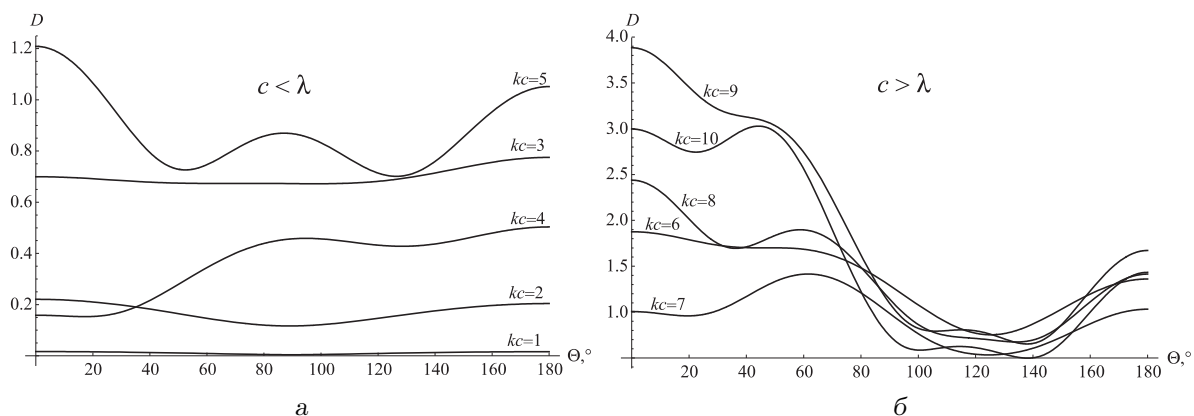


Рис. 2. Залежність діаграм спрямованості дифрагованого поля при $\gamma = 20^\circ$ від параметра kc :
 а - $1 \leq kc \leq 5$; б - $6 \leq kc \leq 10$

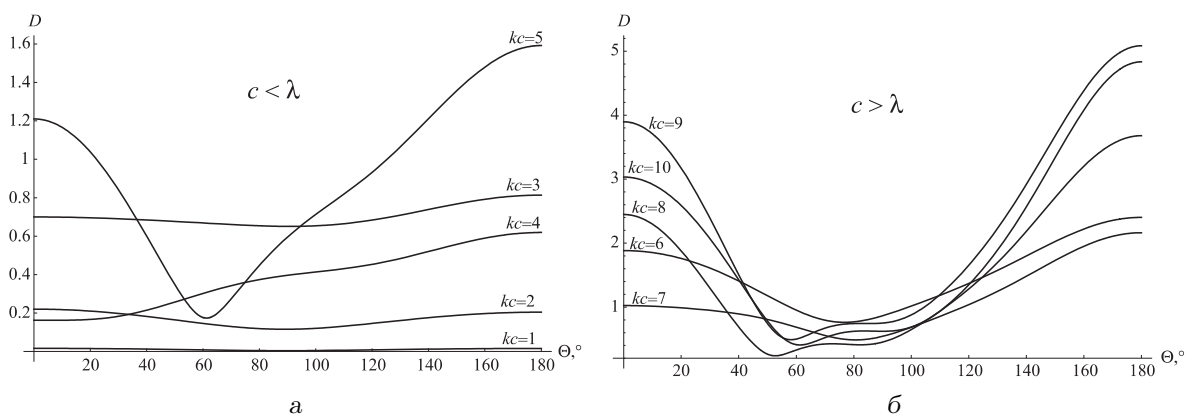


Рис. 3. Залежність діаграм спрямованості дифрагованого поля при $\gamma = 160^\circ$ від параметра kc :
 а - $1 \leq kc \leq 5$; б - $6 \leq kc \leq 10$

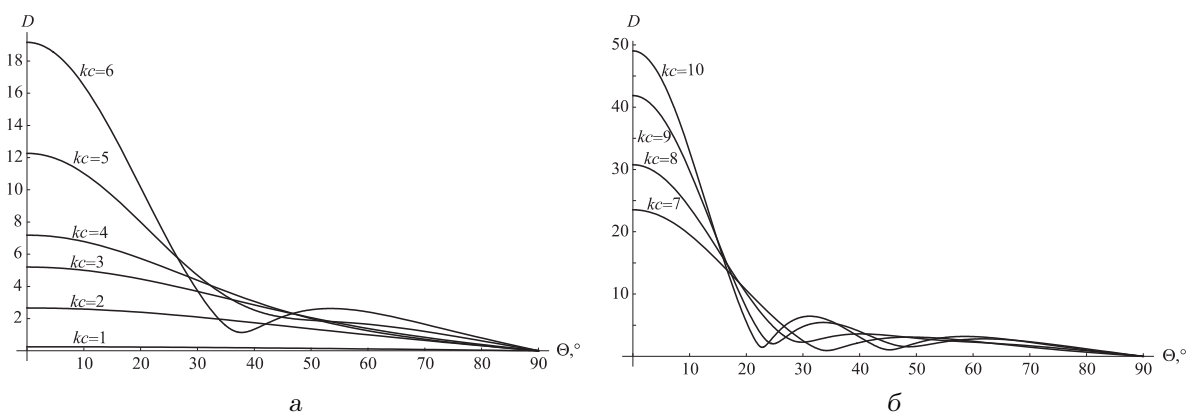


Рис. 4. Діаграми спрямованості дифрагованого поля для диска ($\gamma = 90.01^\circ$) при різних значеннях kc :
 а - $1 \leq kc \leq 6$; б - $7 \leq kc \leq 10$

плоскою хвилею вздовж осі з боків вершини чи основи, виявляються близькими за формою. Проте формування вираженої головної пелюстки діаграм спрямованості при $\gamma=160^\circ$ спостерігається вже при $c < \lambda$. На відміну від попереднього випадку, тепер максимальне випромінювання дифрагованого поля спрямоване “назад” ($\theta=180^\circ$). Окрім того, достатньо високий рівень випромінювання дифрагованого поля спостерігається і в напрямі поширення падаючої хвилі ($\theta=0^\circ$). Ця тенденція зберігається і при $c > \lambda$. При зростанні параметра kc тут також формується область, “глуха” до проникнення дифрагованого поля при $50^\circ < \theta < 100^\circ$ (див. на рис. 3, б). Аналогічний вплив параметра kc на форму діаграм спрямованості скінченного конуса спостерігаємо і при його розширенні.

На рис. 4 наведено діаграми спрямованості конуса з $\gamma \rightarrow \pi/2$. Зауважимо, що при проведенні реальних обчислень приймалося $\gamma=90.01^\circ$. У зв'язку з тим, що при $\gamma \rightarrow \pi/2$ кутові розподіли модуля потенціалу швидкостей дифрагованого поля в областях $0 \leq \theta \leq \pi/2$ і $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ співпадають (а фази протилежні), то діаграми спрямованості наведені тільки для $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Як видно з поведінки кривих на рис. 4, для диска вже при $kc > 3$ починає формуватись спрямованість поля уздовж його осі, а область “глуха” до проникнення дифрагованого поля суттєво розширюється.

У науковій літературі наведено багато результатів дослідження дифракції плоскої хвилі на диску, який можна вважати одним з граничних випадків для геометрії скінченного циліндра. На рис. 5 порівнюються діаграми спрямованості, отримані різними авторами з застосуванням незалежних методів [8, 24, 25]. Як видно з графіка, наша крива 1 практично співпадає з результатом, отриманим точним методом у [8] (крива 2, поле розкладене в ряд за сфероїдальними функціями). Незначна розбіжність спостерігається при $\theta < 10^\circ$, причому відносна похибка у напрямі $\theta=0^\circ$ складає всього 3.6%. Крива 3 побудована на основі асимптотичного виразу, отриманого у праці [24] для круглого отвору у м'якій площині, що, згідно принципу Бабіне, еквівалентно розв'язку задачі дифракції для жорсткого диска. Крива 4 відповідає наближенню Кірхгофа [25]. Хороше узгодження наших результатів з діаграмами спрямованості, отриманими наближеними методами, спостерігається в околі осі симетрії $0^\circ \leq \theta < 30^\circ$. Ці дані можуть служити підтвердженням достовірності отриманих результатів.

На рис. 6 наведені залежності перерізів розсіяння $\sigma_s = \sigma_s(kc)$ для різних кутів розхилу конуса,

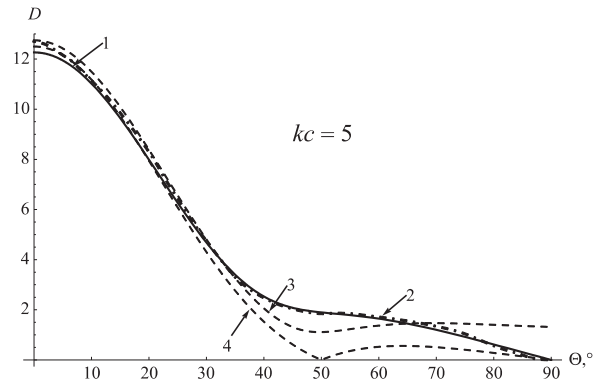


Рис. 5. Порівняння діаграм спрямованості, отриманих різними авторами для диска: 1 – наші розрахунки при $\gamma=90.01^\circ$; 2 – “точна” теорія [8]; 3 – геометрична теорія дифракції Келлера [24]; 4 – наближення Кірхгофа [25]

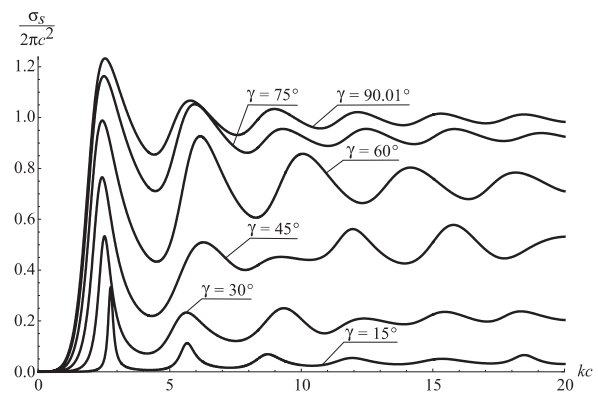


Рис. 6. Сімейство перерізів розсіяння $\sigma_s(kc)$ для різних кутів розхилу конуса

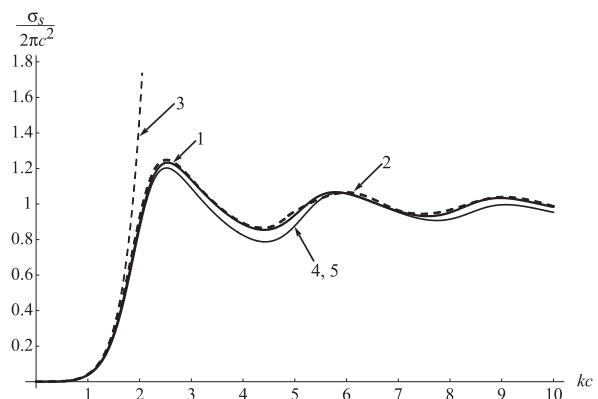


Рис. 7. Залежності величини перерізу розсіяння від значення kc : 1 – $\gamma=90.01^\circ$; 2, 3 – за даними [8]; 4 – $\gamma=80^\circ$; 5 – $\gamma=100^\circ$

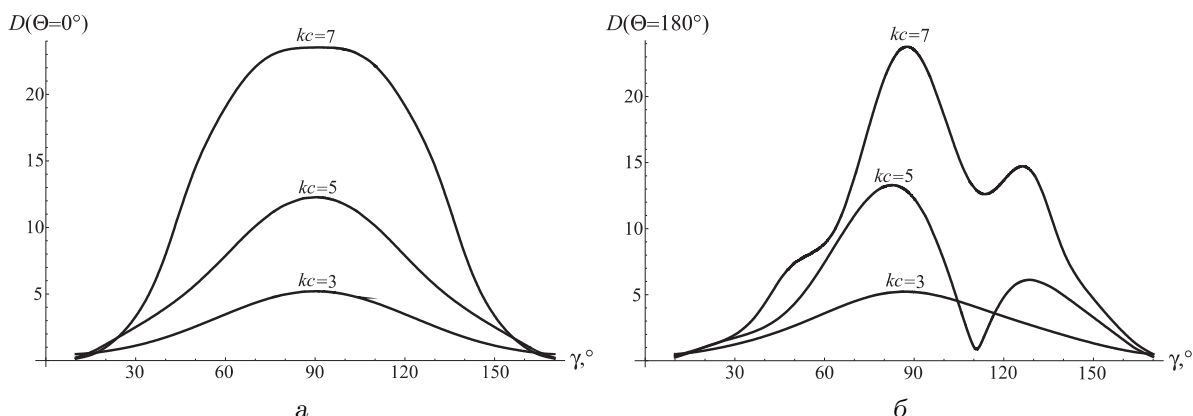


Рис. 8. Залежності $D(\theta)$ від кута розхилу конуса γ при різних значеннях kc :
а – $\theta = 0^\circ$; б – $\theta = 180^\circ$

який визначали за формулою

$$\frac{\sigma_s}{2\pi c^2} = -\frac{\pi}{(sc)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\bar{x}_n|^2}{(2n+1)|K_{z_n}(sc)|^2}.$$

Як видно з поведінки кривих на рис. 6, залежності $\sigma_s(kc)$ мають осцилюючий характер. Зі збільшенням кута розхилу конуса головний максимум $\sigma_s(kc)$ зсувається у низькочастотну область до значень $kc=2.6$, а ефективна площа розсіювання зростає. При $\gamma \rightarrow \pi/2$ і зростанні параметра kc маємо $\sigma_s(kc) \rightarrow 2\pi c^2$. Зауважимо, що розсіяна на конусі енергія не залежить від положення джерела ($\theta=0^\circ$ чи $\theta=180^\circ$), тому перерізи розсіювання для конусів з кутами розхилу γ і $\pi-\gamma$ співпадають.

Порівняння залежностей $\sigma_s(kc)$, отриманих для диска незалежними методами, наведено на рис. 7. На цьому графіку спостерігаємо практично повне співпадіння наших результатів (крива 1) із даними [8] (крива 2) і хорошу їхню відповідність з релєвським наближенням при $kc < 1$ [8]. Поведінка кривих 1, 4 і 5 показує, що незначне ($\pm 10^\circ$) відхилення γ від $\pi/2$ мало впливає на σ_s , тобто переріз розсіювання широкого конуса близький до перерізу розсіювання диска. Найбільше відхилення спостерігається для $2.5 < kc < 6$.

На рис. 8 наведено залежності модуля потенціалу швидкості дифрагованого поля від кута γ для різних значень хвильового параметра kc . При цьому, рис. 8, а відповідає напрямку поширення падаючої хвилі $\theta=0^\circ$ (розсіювання вперед), а рис. 8, б – $\theta=180^\circ$ (зворотне розсіювання). Вони дозволяють визначити один із двох геометричних параметрів конуса γ або c за даними одночастотного зондування, коли відомим другий з них (швидкість поширення звукової хвилі c_0 вважається відомою).

Дійсно, $D(\theta=0^\circ)$ як функція кута розхилу кону-

са γ симетрична відносно $\gamma = \pi/2$ (див. рис. 8, а) і характер поведінки кривих для різних kc дозволяє однозначно встановити довжину твірної конуса за значенням $D(\theta=0^\circ)$ при відомому куті розхилу γ , частоті ω і швидкості поширення звукової хвилі c_0 .

Як видно з рис. 8, б, аналогічні залежності $D(\theta=180^\circ)$ при $c > \lambda/2$ є несиметричними відносно $\gamma = \pi/2$. Поведінка наведених кривих вказує, що при фіксованому kc існує не менше двох кутів розхилу ($\gamma \neq \pi/2$), які відповідають одному значенню $D(\theta=180^\circ)$. Проте відсутність такої симетричності відносно γ дозволяє за значеннями $D(\theta=0^\circ)$ і $D(\theta=180^\circ)$, отриманими при одночастотному зондуванні й фіксованому kc , однозначно встановити параметр γ .

Зауважимо, що при відомому куті розхилу конуса для однозначного визначення довжини твірної c можемо використати також дані по зворотному розсіюванні, наведені на рис. 8, б.

ВИСНОВКИ

Методом розкладу потенціалу швидкості в ряди за власними функціями підобластей сумісно з методами спряження полів і аналітичної регуляризації задачу дифракції поля плоскої звукової хвилі на скінченному абсолютно жорсткому порожньому конусі при осьовому опроміненні зведено до НСЛАР другого роду, розв'язок якої забезпечує виконання усіх необхідних умов.

Із застосуванням методу редукції із заданою точністю отримано числовий розв'язок НСЛАР і досліджено характеристики розсіювання скінченного конуса у широкому діапазоні зміни геометричних параметрів і частоти. Порівняння діаграм спрямо-

ваності й перерізів розсіяння конусів з $\gamma \rightarrow \pi/2$ і відомими даними для дисків дозволило встановити достовірність отриманих результатів.

Встановлено можливість однозначного визначення довжини твірної конуса c і кута розхилу γ за даними одночастотного зондування, коли апріорно відомий один із цих геометричних параметрів. Показано, що для визначення довжини конуса достатньо даних по розсіянню вперед або у зворотному напрямку. Для визначення ж кута розхилу за відомої довжини c необхідні дані як по розсіюванні вперед, так і по зворотному розсіюванні при обмеженні на частоту зондування $c > \lambda/2$.

1. Carslaw H. S. The scattering of sound waves by a cone // *Mathematische Annalen*.– 1914.– **75**.– P. 133–147.
2. Siegel K. M., Alperin H. A. Studies in radar cross-sections // III. Scattering by a cone. Radiation Lab., Univ. of Michigan.– 1952.– Rep. UMMM-87.– P. 55.
3. Felsen L. B. Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones // *J. App. Phys.*– 1955.– **26**, № 2.– P. 138–151.
4. Felsen L. B. Plane-wave scattering by small-angle cones // *IEEE Trans. Antennas Propag.*– 1957.– **5**, № 1.– P. 121–129.
5. Николаев Б. Г. О волновых процессах, возникающих при дифракции на идеально отражающем конусе в осесимметричном случае // *Зап. науч. сем. ЛОМИ*.– 1972.– **25**.– С. 151–171.
6. Smyshlyaev V. Diffraction by conical surface at high frequency // *Wave motion*.– 1990.– **12**, № 4.– P. 329–339.
7. Bonner B. D., Graham I. G., Smyshlyaev V. The computation of the conical diffraction coefficients in high-frequency acoustic wave scattering // *SIAM J. Numer. Anal.*– 2005.– **43**, № 3.– P. 1202–1230.
8. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi L. E., Asvestas J. S. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes.– Amsterdam: North-Holland, 1969.– 728 p.
9. Antipov Y. A. Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition // *SIAM J. Appl. Math.*– 2002.– **62**, № 4.– P. 1122–1152.
10. Лялинов М. А. О дифракции плоской волны на импедансном конусе // *Зап. науч. сем. ПОМИ*.– 2003.– **297**.– С. 191–215.
11. Kraus L., Levine L. M. Diffraction by an elliptic cone // *Comm. Pure Appl. Math.*– 1957.– **14**, № 1.– P. 49–68.
12. Бабич В. М., Дементьев Д. Б., Самокиш Б. А., Смышляев В. П. О рассеянии высокочастотной волны вершиной произвольного конуса // *Зап. науч. сем. ПОМИ*.– 2000.– **264**.– С. 7–21.
13. Shanin A. V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane // *Wave Motion*.– 2005.– **41**.– P. 79–93.
14. Assier R. C., Peake N. On the diffraction of acoustic waves by a quarter-plane // *Wave Motion*.– 2012.– **49**, № 1.– P. 64–82.
15. Leitner A., Wells C. Radiation by disks and conical structures // *IEEE Trans. Antennas Propag.*– 1956.– **4**, № 4.– P. 637–640.
16. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе // *Акуст. ж.*– 1971.– **17**, № 1.– С. 33–42.
17. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звуковой волны из полого конечного конуса // *Линейные краевые задачи мат. физики*.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1973.– С. 129–139.
18. Keller J. B. Backscattering from a finite cone // *IEEE Trans. Antennas Propag.*– 1960.– **8**.– P. 175–182.
19. Wiener F. M. Notes on sound diffraction by rigid circular cones // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1948.– **20**, № 4.– P. 367–369.
20. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінчних і клиноподібних поверхнях.– К.: Наук. думка, 2006.– 280 с.
21. Градштейн И., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматиз, 1963.– 1100 с.
22. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций.– М.: ИЛ, 1952.– 370 с.
23. Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // *Radio Science*.– 2008.– **43**.– RS4S03, doi 10.1029/2007RS003792.
24. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction // *J. Opt. Soc. Amer.*– 1962.– **52**, № 2.– P. 116–130.
25. Leitner A. Diffraction of sound by a circular disk // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1949.– **21**, № 4.– P. 331–334.