

УДК 533.63,534.23

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА ТОНКИМ КРЫЛОМ. ЧАСТЬ II. СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина
*E-mail: luk_ptr@yahoo.com

Получено 09.04.2011 ◊ Пересмотрено 14.09.2011

Проанализированы численные схемы решения уравнения распространения малых нестационарных возмущений от тонкого крыла. Указаны их особенности, преимущества и недостатки. Отмечено, что схемы смешанного типа, в которых временная переменная не отделяется от пространственных, а непосредственно включена в общую расчетную молекулу, позволяют более точно учесть специфику решения в задачах с быстро изменяющимися параметрами течения. В качестве примера применения одной из таких схем приведено дальнейшее развитие численно-аналитического подхода для нестационарных задач акустики. На его основе проведен численный расчет задачи генерации звука при обтекании тонкого крыла (лопасти винта) нестационарным потоком при различных кинематических и геометрических параметрах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: генерация звука потоком, тонкое крыло, потенциальное приближение, численно-аналитические методы

Проаналізовано чисельні схеми розв'язання рівняння поширення малих нестационарних збурень від тонкого крила. Вказано їхні особливості, переваги й недоліки. Відзначено, що схеми змішаного типу, в яких часова змінна не відокремлюється від просторових, а безпосередньо включена до загальної розрахункової молекули, дозволяють більш точно врахувати специфіку розв'язку в задачах зі швидкою зміною параметрів течії. Як приклад застосування однієї з таких схем наведено подальший розвиток чисельно-аналітичного підходу для нестационарних задач акустики. На його базі проведено чисельний обрахунок задачі генерації звука при обтіканні тонкого крила (лопати гвинта) нестационарним потоком при різних кінематичних і геометричних параметрах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: генерація звуку потоком, тонке крило, потенціальне наближення, чисельно-аналітичні методи

The numerical schemes for solving of equation of propagation of small disturbances are analyzed. Their features, benefits and drawbacks are shown. It is noted that the mixed schemes, where time variable is not separated from spatial ones, but is included to common computation molecule, allow more accurate accounting of peculiarities of solving of the problems with fast changing flow parameters. Further development of the numerically-analytical approach for non-stationary acoustical problems is given as an example of application of such scheme. On its base, a numerical computation of the problem on sound generation by the unsteady flow around the thin wing (screw blade) is carried out for different kinematic and geometrical parameters.

KEY WORDS: sound generation by flow, thin wing, a potential approximation, the numerical-analytical methods

ВВЕДЕНИЕ

Развитие численных методов и совершенствование компьютерной техники позволили осуществить первые попытки численного исследования плоских нестационарных задач уже в середине 1970-ых гг. Однако они были основаны не на сквозном счете задачи, а на расщеплении ее решения по времени и пространственным координатам: при фиксированном временном шаге производился расчет коэффициента давления. Ясно, что такой подход как бы “замораживает” на мгновение процесс, и результат получается близким по виду к квазистационарному решению – достаточно

плавное поле без резких перепадов давления.

На самом же деле, поскольку поток при больших скоростях обтекает лопасть за достаточно короткий промежуток времени, реальный всплеск давления оказывается намного круче. Кроме того, после него появляется дополнительный пик, обусловленный наличием ударной волны [1, 2]. Кратковременные всплески коэффициента давления C_p с последующими остаточными “хвостовыми” эффектами многократно фиксировались экспериментально. Следовательно, численные схемы, позволяющие учитывать одновременное распространение волны и по пространству, и по времени, должны наиболее адекватно отображать специфику

задач с большими скоростями течения.

При написании этой статьи преследовалась следующая цель:

- 1) проанализировать имеющиеся схемы расчета малых возмущений от тонкого крыла;
- 2) разработать численно-аналитический метод для трехмерных нестационарных задач акустики;
- 3) исследовать влияние различных кинематических и геометрических вариаций параметров задачи на характеристики нестационарного течения, а также уровень генерируемого при этом звука.

1. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ТОНКОГО КРЫЛА

Одной из первых успешных схем расчета плоских течений считается схема Мермэна–Коуэла [3]. Ее авторы сумели найти различные представления нелинейного слагаемого в уравнении Кармана–Гудерлея (в случае плоского стационарного течения) для дозвуковой и сверхзвуковой областей течения по отдельности. Это позволило достаточно просто осуществить расчет ударной волны, избежав неустойчивости расчетного метода. До появления этой схемы ударную волну рассчитывали с помощью широко известных схем Лакса–Вендрофа или Годунова. Найденная Мермэном и Коуэлом численная схема расчета трансзвукового течения позволила не прибегать к введению “искусственной вязкости” (схема Лакса–Вендрофа) или к использованию достаточно сложной процедуры выявления ударной волны с помощью расчета характеристик задачи (схема Годунова). Успех схемы Мермэна–Коуэла был предопределен тем, что она относится к смешанному типу. Кроме того, она принадлежит к схемам релаксационного типа, что позволяет предотвратить появление возмущений вверх по потоку. Несмотря на то, что первоначально она была реализована для плоского стационарного течения, общая идея алгоритма послужила импульсом к дальнейшему развитию численных схем смешанного типа для решения нестационарных задач.

Немногим позже появилась схема Стегера–Ломэкса [4], развивающая релаксационный метод Мермэна–Коуэла. В частности, на ее основе удалось установить связь между образующимися скачками уплотнения и условием Кутта–

Жуковского. Буквально вслед за этой работой увидела свет публикация [5], авторы которой использовали схему Стегера–Ломэкса для расчета обтекания неподвижных лопастей вертолета. С результатами их расчета достаточно хорошо совпадают данные из более поздней работы [6].

Вслед за этим опубликована статья [7], в которой рассмотрено плоское нестационарное течение. Примененная расчетная схема содержала производные в виде центральных разностей в дозвуковом диапазоне течения и разностей вниз по потоку в сверхзвуковом диапазоне. Для смешанных производных по пространственным координатам и времени использовались соответствующие смешанные разности.

Таким образом, оказалось, что каждая новая задача требует отдельных усилий по поиску удобной численной схемы, которая позволила бы обеспечить сходимость счета. Это не удивительно, поскольку решение задач обтекания, в которых присутствуют ударные волны, всегда вызывало определенные трудности. Для них не удается ограничиться стандартными конечно-разностными схемами.

Спустя некоторое время была разработана схема переменных направлений (ADI) Бельхауза–Гурджиана [8]. Она удобна тем, что не имеет строгих ограничений на шаг по времени. Отметим, однако, что последний должен быть настолько малым, чтобы на его протяжении ударная волна находилась в рамках одного шага по пространственной координате. Таким образом, метод переменных направлений фактически задал критерий изменения шага по времени при счете, что позволило получить вполне приемлемые результаты. Изначально схема Бельхауза–Гурджиана получена для линейного низкочастотного приближения. Дальнейшее ее развитие приведено в работах [9, 10]. В частности, изучено влияние малых нестационарных возмущений на параметры околозвуковых течений.

Перечисленные выше расчетные схемы преследовали единственную цель – исследовать возникновение ударной волны, ее поведение, влияние различных факторов на ее трансформацию и исчезновение. Иначе говоря, изучался аэродинамический аспект задачи обтекания профиля потоком. Лишь позднее Лурицис и Джордж [1] использовали уравнение распространения малых возмущений для моделирования ближнего поля лопасти вертолета для случая плоского нестационарного течения. Они заметили, что уравнение распространения малых возмущений по форме похоже на линейное приближение акустики. Поэтому полу-

ченные данные расчета ближнего поля использовались в качестве входных граничных условий для расчета дальнего поля на расстояниях, где нелинейность уже не играла большой роли.

В статье [11] показано, что нелинейное уравнение, описывающее распространение малых возмущений от тонкого крыла, на самом деле соответствует акустическому приближению. Было отмечено, что в задачах акустики нелинейное слагаемое, так же как и в аэродинамике, играет важную роль. В частности, оно усиливает звукообразование, поскольку слабая ударная волна в пределе переходит в звуковую.

2. РАЗВИТИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Пусть имеется нелинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Nf = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющий смешанному граничному условию

$$f_1|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Оператор в левой части формулы (2) представляет собой комбинацию функции f и ее производных первого порядка. Предлагаемый ниже численно-аналитический подход позволяет решить сформулированную общую граничную задачу.

Известно, что многомерный ряд Тейлора для $f(x)$, $f \in C^m(a)$ – функции независимой переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеющей все непрерывные производные до m -ой в окрестности некоторой точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – записывается в следующем виде [12]:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i|_a} (x_i - a_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j|_a} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots + \\ & + R_m(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $R_m(x)$ – остаточный член ряда.

Переобозначим $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv f(x, y, z, t)$. Тогда ее разложение в многомерный ряд Тейлора в окрестности точки $a = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ до величин

третьего порядка малости примет форму

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) = & f(a) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i|_a} (x_i - a_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j|_a} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \\ & + R_m(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Естественно, чем больше членов ряда удерживать в разложении, тем выше должна быть его точность. Однако при этом необходимо брать все большее количество точек в расчетной схеме и, следовательно, увеличивать порядок решаемой системы уравнений. Это может привести к тому, что в процессе ее решения точность полученного результата уменьшится (чем выше порядок системы уравнений, тем больше требуется выполнять вычислений с округлением). Заметим, что при этом устойчивость счета как внутреннее свойство системы может и не пострадать.

Еще один немаловажный аспект – необходимость более точного задания граничных условий в момент “включения” счета. В ряде сложных задач не представляется возможным отслеживать точные значения функции и ее производных на границе. Тогда в качестве начального приближения обычно задается стационарное решение, если таковое имеется.

В данной работе реализация численно-аналитического подхода для нестационарных задач рассматривается на примере полного уравнения Кармана – Гудерлея. В качестве начального приближения выбрано решение стационарной задачи. При этом численная схема позволяет достаточно быстро выходить на нестационарное решение.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ЛОПАСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В работе [11] рассмотрена задача обтекания лопасти постоянной толщины в трансзвуковом диапазоне течений. Решим теперь задачу для лопасти переменной толщины, расширив скоростной диапазон изучаемого течения. Следует ожидать, что полученные результаты расчета будут иметь существенные отличия от данных [11].

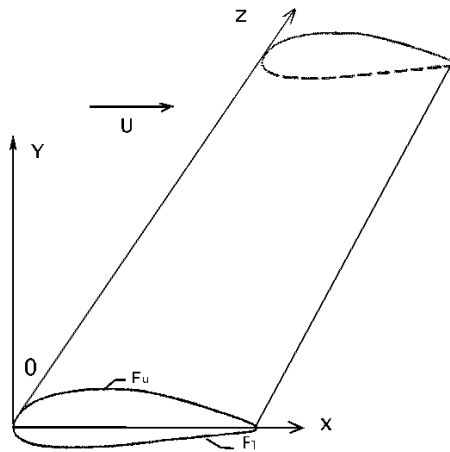


Рис. 1. Схема обтекания крыла потоком

3.1. Постановка задачи и решение ее с помощью численно-аналитического метода

Пусть имеется тонкое крыло переменного сечения:

$$F = F(x, \delta(z)) = \delta(z)g(x), \quad (5)$$

т.е. толщина крылового профиля в изменяется вдоль координаты z . При этом при каждом фиксированном значении z закон изменения кромки профиля $g(x)$ остается неизменным (рис. 1).

На крыло (лопасть) набегающий однородный поток со скоростью U , а само оно считается неподвижным. Принимая во внимание ограничения, налагаемые на течение (см. работу [11]), запишем уравнение распространения малых возмущений от тонкого крыла:

$$\left(\frac{kc}{U}\right)^2 f_{\tau\tau} + \left[1 - \frac{1}{M_1^2} + (1 + \gamma)\epsilon f_\xi\right] f_{\xi\xi} + 2\frac{kc}{U} f_{\xi\tau} - \frac{(\lambda c)^2}{M_1^2} f_{\eta\eta} - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{1}{M_1^2} f_{\zeta\zeta} = 0. \quad (6)$$

Граничное условие трансформируется следующим образом:

$$\delta \left[\frac{kc}{U} g_\tau + g_\xi \right] = \epsilon \lambda c f_\eta, \quad 0 < \xi < 1, \quad \eta = \eta(\xi). \quad (7)$$

Здесь $\xi = x/c$, $\eta = \lambda y$, $\zeta = z/R$, $\tau = kt$ – безразмерные координаты. Начальные условия задаются в виде

$$f' = 0, \quad f'_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (8)$$

Таким образом, сформулирована начально-граничная задача (6)–(8).

На основании идеи численно-аналитического подхода представим искомое решение $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \tau_i)$ в виде ряда

$$\begin{aligned} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \tau_i) = & f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \tau_0) + f_\xi(\xi_i - \xi_0) + \\ & + f_\eta(\eta_i - \eta_0) + f_\zeta(\zeta_i - \zeta_0) + \frac{1}{2!} [f_{\xi\xi}(\xi_i - \xi_0)^2 + \\ & + f_{\eta\eta}(\eta_i - \eta_0)^2 + f_{\zeta\zeta}(\zeta_i - \zeta_0)^2 + f_{\tau\tau}(\tau_i - \tau_0)^2] + \\ & + f_{\xi\eta}(\xi_i - \xi_0)(\eta_i - \eta_0) + f_{\xi\zeta}(\xi_i - \xi_0)(\zeta_i - \zeta_0) + \\ & + f_{\eta\zeta}(\eta_i - \eta_0)(\zeta_i - \zeta_0) + f_{\xi\tau}(\xi_i - \xi_0)(\tau_i - \tau_0) + \\ & + f_{\eta\tau}(\eta_i - \eta_0)(\tau_i - \tau_0) + f_{\zeta\tau}(\zeta_i - \zeta_0)(\tau_i - \tau_0) + \\ & \dots + R_0(\Delta^3), \quad i = 1, N - 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $R_0(\Delta^3)$ – остаточный член разложения в ряд.

В данной задаче граничное условие на поверхности крыла не удовлетворяется автоматически. Поэтому его включают в расчетную систему как отдельное дополнительное уравнение. Таким образом, совокупная расчетная система уравнений состоит из представления искомого потенциала в виде ряда Тейлора в $(N-2)$ точках, уравнения (6) и граничного условия (7), которое удовлетворяется в расчетной точке $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \tau_0)$. Необходимое для расчета количество точек может разниться от задачи к задаче. Специфика подхода позволяет построить схему в каждом конкретном случае, т.е. найти оптимальное количество членов разложения в ряд Тейлора, сократив тем самым количество уравнений расчетной системы.

3.2. Ближнее поле

До сих пор взаимное влияние изменения кинематических и геометрических параметров для задачи (6)–(8) не было изучено. Рассмотрим лопасть, поверхность которой задается в виде функции $F = \delta(z)x(1-x)$. Выберем следующие ее размеры: $R/c = 10$, $c = 0.3$ м. Частоту вращения лопасти при этом зададим $k = \Omega = 3000$ об/мин. Для конкретности расчеты выполним для лопасти переменной толщины $\delta(z)$, линейно уменьшающейся вдоль размаха к концу лопасти $z = R$.

В приведенных ниже расчетах количество уравнений системы составляло 15. Расчетная сетка выбиралась более густой в направлении вдоль хорды поперечного сечения лопасти, где непосредственно развивается процесс формирования удар-

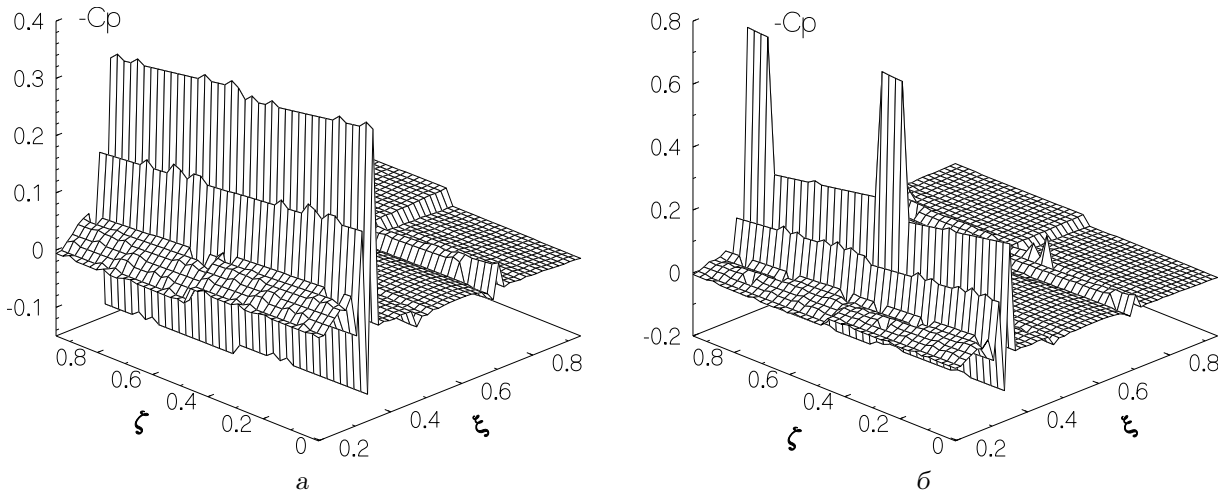


Рис. 2. Распределение коэффициента давления:
а – $M=0.1$; б – $M=0.4$

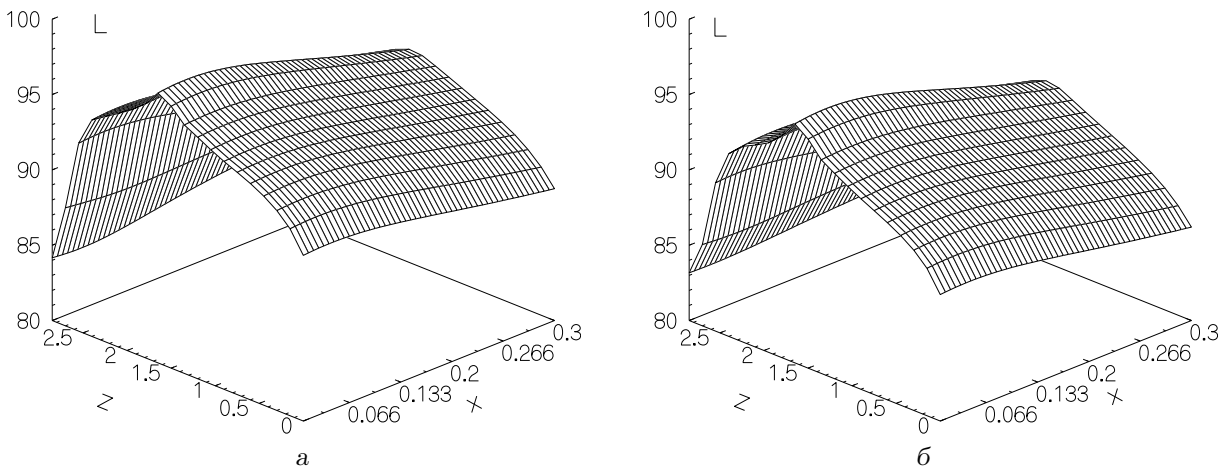


Рис. 3. Распределение уровня нормированного давления при $y=0.1$ м, $M=0.1$:
а – $\delta(z)=(0.1\dots 0.08)$; б – $\delta(z)=(0.1\dots 0.04)$

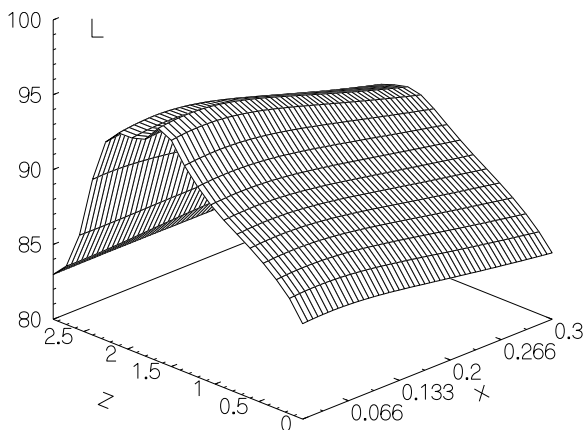
ной волны. Как выяснилось в ходе численных экспериментов, оптимальное количество узлов сетки составляет порядка 50, а дальнейшее ее дробление нецелесообразно. Шаг по времени выбирался по тому же критерию, что и в смешанных схемах обсуждавшихся выше – на его протяжении волна должна находиться в одной расчетной ячейке по координате.

Вычисления коэффициента давления

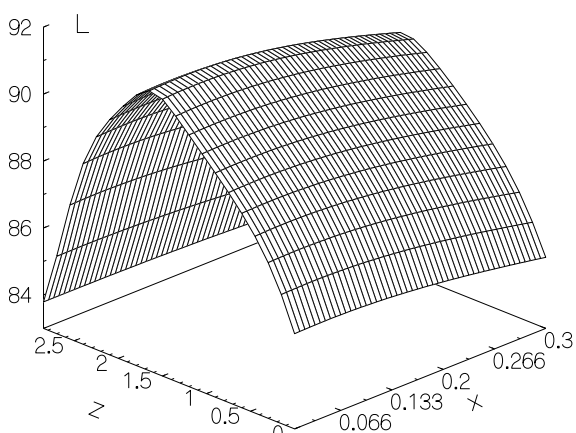
$$C_p = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U^2}$$

выполнялись для различных вариаций толщины $\delta(z)$ при скорости набегающего потока $U=0.1M$ или $0.4M$. В результате было обнаружено, что при

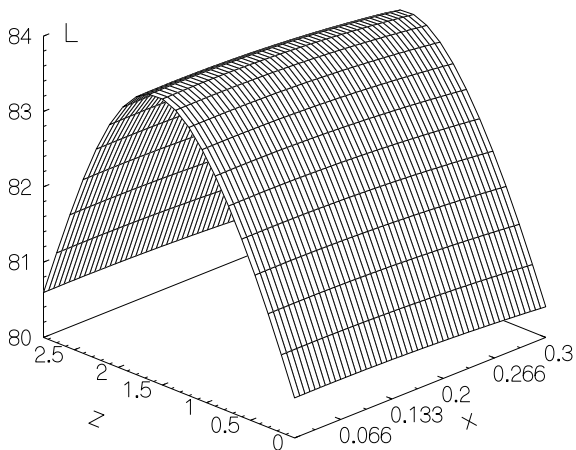
разных скоростях потока распределения амплитуды C_p , в особенности ее максимально наблюдаемые отклонения на отдельных участках лопасти, существенно отличаются друг от друга. При больших скоростях обтекания ($U=0.4M$) пики C_p более крутые. Распределения по хорде при фиксированном z весьма сходны с результатами [1, 13, 14], см. рис. 2. Здесь во встречающей поток части сечения лопасти четко наблюдаются такие же всплески C_p , быстро затухающие по координате. В качестве характерного отличия отметим два четко выраженных максимума вдоль лопасти для случая $U=0.4M$, свидетельствующие о появлении на отдельных ее участках дополнительных локализованных зон интенсивной генерации звука.



a



б



в

Рис. 4. Распределение уровня нормированного давления при $M=0.1$, $\delta(z)=(0.06 \dots 0.04)$:
 а - $y=0.1$ м; б - $y=0.3$ м;
 в - $y=1$ м

3.3. Дальнее поле

Звуковое давление в дальнем поле рассчитывалось по формуле [11]

$$\begin{aligned}
 & -M_1^2 \int \left[\frac{\phi'_x + \frac{1}{2}(1+\gamma)(\phi'_x)^2}{R} \right]_{t^*} dS_x - \\
 & - \frac{2M_1^2}{U} \int \left[\frac{\phi'_t}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial n} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \phi' \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi \phi'(x, t_1),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $\phi'(x, y) = \epsilon f(\xi, \eta)$ – размерный потенциал малых возмущений. С практической же точки зрения наибольший интерес представляет нормированный по отношению к невозмущенной среде уровень звукового давления. Его распределения (в дБ) представлены на рис. 3–6.

Помимо основной ударной волны, на графиках наблюдается взаимное влияние волновых фронтов, которое не было столь существенным в задаче с лопастью постоянного по размаху поперечного сечения [11]. Так, при $\delta(z) = (0.1 \dots 0.08)$, $U = 0.1M$ вблизи лопасти ($y = 0.1$ м) взаимодействие генерируемых звуковых волн дает достаточно сложную интерференционную картину. Об этом свидетельствует форма локального максимума, присутствующего в районе $0.7R$ и имеющего нелинейный характер. Его расположение полностью соответствует предсказанию линейной теории шума вращения винта Гутина [15]. Таким образом, подтверждается то, что рассматриваемая здесь более сложная модель не противоречит известным пионерским исследованиям. Напомним, однако, что упрощенный подход Гутина позволяет выполнять расчет шума вращения лишь очень приближенно. Современные требования по снижению шума лопасти стимулируют разработку и использование более строгих нелинейных моделей, способных учесть наличие ударной волны, неоднородность и нестационарность поля течения вокруг нее.

Суммарный уровень давления оказался несколько (на $10 \dots 15$ Дб) выше имеющихся в литературных источниках данных. По-видимому, это обусловлено различием в расстоянии, на котором производились измерения. Так, в данном исследовании оно не превышало 1 м, а в экспериментах, представленных в [17], составляло порядка 150 м. Кроме того, при модельных расчетах не учитывалось затухание в среде. Представленные в работе [13] данные также показывают, что уровень давления на экспериментальных кривых несколько ниже, чем на расчетных.

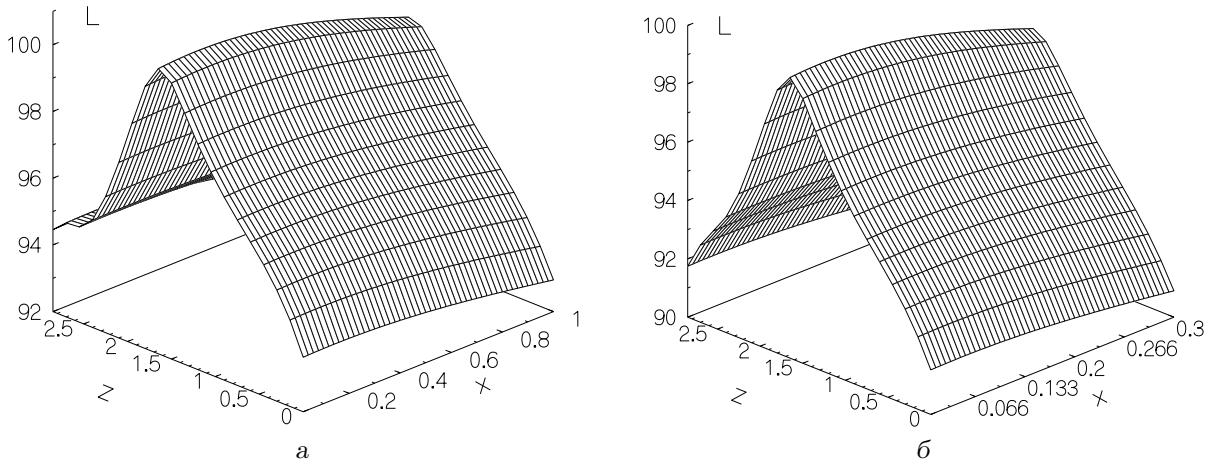


Рис. 5. Распределение уровня нормированного давления при $y=0.3$ м, $M=0.4$:
 а - $\delta(z)=(0.1 \dots 0.06)$; б - $\delta(z)=(0.006 \dots 0.04)$

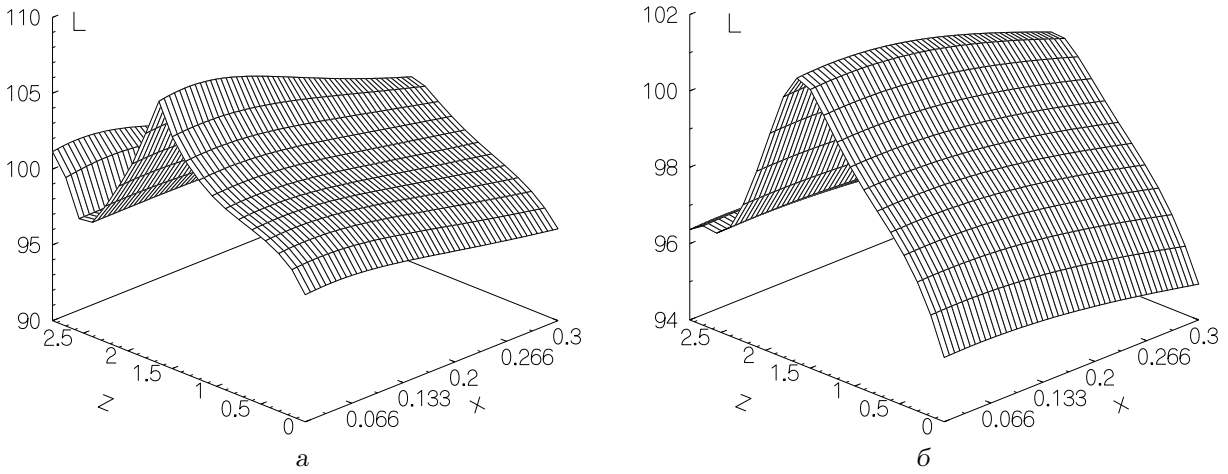


Рис. 6. Распределение уровня нормированного давления при $\delta(z)=(0.1 \dots 0.08)$, $M=0.4$:
 а - $y=0.1$ м; б - $y=0.3$ м

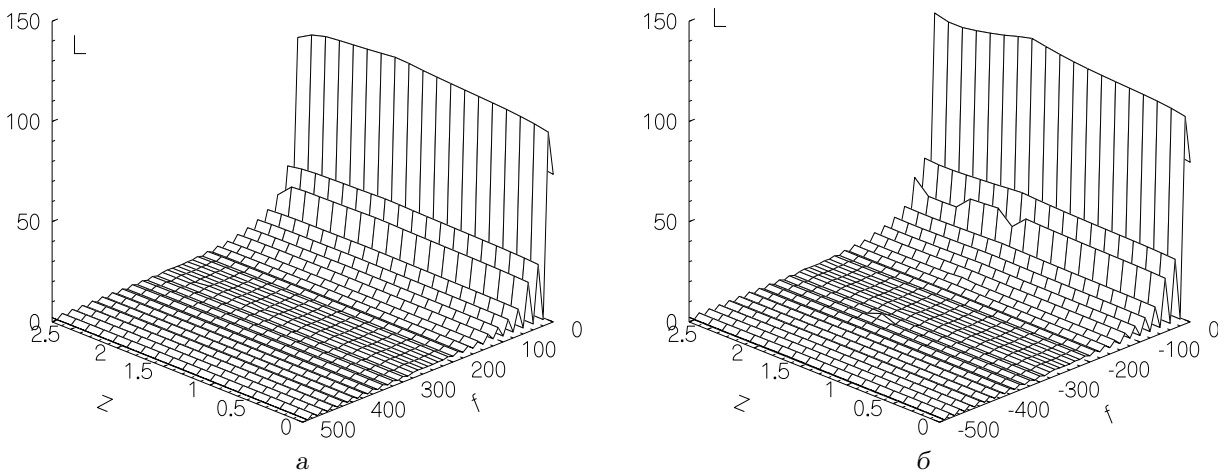


Рис. 7. Распределение спектральных уровней давления при $y=0.1$ м, $\delta(z)=0.1 \dots 0.08$:
 а - $M=0.1$; б - $M=0.4$

Ниже приведены результаты расчета для различных конфигураций параметров задачи. Для теоретического анализа отобраны самые характерные случаи, между которыми наблюдаются качественные различия.

Для лопасти, толщина которой вдоль размаха изменяется в пределах $\delta(z) = (0.1 \dots 0.08)$, на расстоянии $y = 0.1$ м суммарный уровень излучения выше, чем для лопасти с $\delta(z) = (0.1 \dots 0.04)$ – ср. рис. 3, а и б. Таким образом, форма обтекаемого тела существенно влияет на процесс генерации звука: чем толще лопасть, тем больше она возмущает первоначально невозмущенный поток.

По мере удаления от лопасти нелинейные свойства в волне ослабевают (см. рис. 4, а–в для $y = 0.3$ м). Тем не менее учет нелинейности необходим также и потому, что нелинейное слагаемое дает в конечном итоге дополнительный вклад в амплитуду генерируемой волны. Это становится особенно существенным при увеличении числа Маха M . Вероятнее всего для $M = 0.4$ вблизи лопасти вертолета волновые фронты складываются в фазе (рис. 5 и 6). При этом более резко выделен максимум генерируемого шума. Суммарный уровень давления в волне для этого случая на 10 дБ превышает данные, полученные при $M = 0.1$.

Что же касается полученного спектра генерируемого шума (рис. 7), то две низшие гармоники полностью совпадают как с экспериментальными, так и с теоретическими данными [14, 16]. Отличие наблюдается в компонентах вихревого шума, которые в рамках потенциальной теории не учитываются.

Количественные особенности распределения энергии в спектре шума вращения таковы. Наиболее энергоемкими являются первые (4...5) гармоник в полосе частот до 100 Гц. При этом локальные изменения уровня давления, которые видны на графиках C_p ближе к центру лопасти винта, отображаются на второй–третьей гармонике. Полученный спектр будет очень похож на известный спектр шума вертолета [17], если из него вычест вихревую составляющую. При этом характер пространственного убывания уровня сохраняется таким же, как и для лопасти постоянного сечения – $1/r$.

ВЫВОДЫ

1. Выполнен анализ численных схем расчета тонкого крыла при обтекании его нестационарным потоком. Указано, что численные схемы смешанного типа наиболее эффективны для данного класса задач.

2. Осуществлено дальнейшее развитие численно-аналитического подхода для нестационарной задачи генерации звука лопастью переменного сечения в различных скоростных диапазонах.
3. Приведенные расчетные данные показали, что, изменяя толщину лопасти и скорость набегающего потока вдоль размаха лопасти, можно существенно влиять на уровень генерируемого шума.

1. *Lyrantzis A. S., George A. R.* Far field noise of transonic blade-vortex interactions // *Am. Helicop. Soc. J.*– 1989.– **27**, № 7.– P. 30–39.
2. *Lyrantzis A. S., Xue Y.* A study of the noise mechanisms of transonic blade-vortex interactions // *AIAA J.*– 1991.– **29**, № 10.– P. 1562–1572.
3. *Murman E. M., Cole J. D.* Calculation of plane steady transonic flows // *AIAA J.*– 1971.– **9**, № 1.– P. 114–121.
4. *Steger J. L., Lomax H.* Transonic flow about two-dimensional airfoils by relaxation procedures // *AIAA J.*– 1972.– **10**, № 1.– P. 49–54.
5. *Caradonna F. X., Isom M. P.* Subsonic and transonic potential flow over helicopter rotor blades // *AIAA J.*– 1972.– **10**, № 12.– P. 1606–1612.
6. *Лукьянов П. В.* Применение численно-аналитического метода для решения задач акустики // *Праці акуст. симпоз. “Консонанс-2005”*.– К.: Ін-т гідромех. НАНУ, 2005.– С. 225–230.
7. *Caradonna F. X., Isom M. P.* Calculation of unsteady transonic potential flow over helicopter rotor blades // *AIAA J.*– 1976.– **14**, № 4.– P. 482–488.
8. *Ballhaus W. F., Goorjian P. M.* Implicit finite-difference computations of unsteady transonic flows about airfoils // *AIAA J.*– 1977.– **15**, № 12.– P. 1728–1735.
9. *Yu N. J., Seebass A. R., Goorjian P. M.* An implicit shock-fitting scheme for unsteady transonic flows computations // *AIAA J.*– 1978.– **16**, № 7.– P. 815–822.
10. *Soiezky H. Yu., Yu N. J., Fung K.-Y., Seebass A. R.* New method for designing shock-free transonic configurations // *AIAA J.*– 1979.– **17**, № 7.– P. 722–729.
11. *Лукьянов П. В.* Нестационарное распространение малых возмущений от тонкого крыла: ближнее и дальнее поле // *Акуст. вісн.*– 2009.– **12**, № 3.– С. 41–55.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.– М.: Наука, 1968.– 720 с.
13. *Farassat F., Peg R. J., Hilton D. A.* Thickness noise of helicopter rotors at high tip speeds. – *AIAA Pap.* 75-453, 1975.
14. *Brown T. J., Farassat F.* A new capability for predicting helicopter rotor noise in hover and in flight. – *NASA Pap.* 23665, 1976.
15. *Гутин Л. Я.* О звуковом поле вращающегося винта // *ЖТФ.*– 1936.– **6**, № 5.– С. 899–909.
16. *Leverton J. W.* Helicopter noise-blade slap. Part 2: Experimental results.– *NASA CR-1983.*– Washington DC, 1972.
17. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 296 с.