

УДК 534.2

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Т. П. КОНОВАЛЮК*

Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина
*E-mail: tpk_8_4@ukr.net

Получено 14.06.2011 ◊ Пересмотрено 27.12.2011

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла в широком диапазоне геометрических параметров выполнены расчеты и проведен анализ звуковых полей, порождаемых при прямом и обменном взаимодействии в безграничной идеальной жидкости трех точечных вихрей с интенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$. Обнаружен эффект вращения диаграммы направленности. Установлены соотношения между поворотом диаграммы направленности и поворотом вихревой системы. Показано, что вихревая система и генерируемое ею звуковое поле могут вращаться как в одном, так и в противоположных направлениях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: точечные вихри, вращение диаграммы направленности, поворот вихревой системы

В рамках моделі точкових вихорів та акустичної аналогії Лайтхіла в широкому діапазоні геометричних параметрів виконано розрахунки й аналіз звукових полів, які породжуються при прямій та обмінній взаємодії у необмеженій ідеальній рідині трьох точкових вихорів з інтенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$. Виявлено ефект обертання діаграми напрямленості. Встановлені співвідношення між поворотом діаграми напрямленості й поворотом вихрової системи. Показано, що вихрова система й звукове поле, генероване нею, можуть обертатись як в одному, так і у протилежних напрямках.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: точкові вихорі, обертання діаграми напрямленості, поворот вихрової системи

Within the frameworks of the point vortex model and the Lighthill's acoustic analogy, the sound fields produced by a direct and exchange interactions of three point vortices with the intensities of $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$ in an ideal unbounded liquid are computed and analyzed in wide range of geometrical parameters. The effect of rotation of the directivity pattern is detected. The relations between the rotations of the directivity pattern and vortex system are specified. The possibility of rotation of the the vortex system and its sound field both in the same and opposite directions is demonstrated.

KEY WORDS: point vortices, rotation of the directivity pattern, rotation of the vortex system

ВВЕДЕНИЕ

Как отмечено в [1], первой подлинно научной работой по изучению генерации звука потоком стала работа Струхалю, в которой исследовались эоловы звуки, возникающие при обтекании потоком воздуха отрезка проволоки. Важный вклад в теорию звука, генерируемого потоком, внесла теория воздушного винта Л. Я. Гутина [2, 3]. Однако общая теория аэрогидродинамического шума практически не развивалась до опубликования в 1952 г. первой из двух пионерских работ Лайтхилла [4, 5], в которых была предложена акустическая аналогия для расчета звука, генерируемого турбулентным потоком, помещенным в неограниченную однородную среду. В дальнейшем основные положения теории Лайтхилла были развиты рядом ученых (в частности, Керлом и Пауэллом) и распространены на ситуации при наличии твердых границ Фокс-Вильямсом и Холлом. Наиболее полный обзор существующих направлений, связанных с изучением данной проблемы, представлен в [1, 6–10]. Эти ис-

следования вместе с положениями Л. Я. Гутина позволили создать стройную теорию шума, генерируемого аэрогидродинамическим потоком, применимую к расчету как шума струи, так и шума турбин.

Математическое представление любой акустической аналогии выражается как неоднородное волновое уравнение с соответствующими граничными и начальными условиями. Физически это означает, что существует подобие между суммарным движением жидкости, включающим гидродинамическое течение и колебательные перемещения частиц, и порожденным им акустическим полем с заданным распределением источников. Всякая точная акустическая аналогия предполагает, что в функцию, описывающую источник в неоднородном волновом уравнении, входят величины, которые могут быть определены лишь после его решения. Поэтому формальное решение (например, в виде свертки правой части с функцией Грина), в свою очередь, представляет собой интегральное уравнение, в котором распределение

источников должно быть найдено одновременно с самим звуковым полем. Таким образом, определение функции источника эквивалентно решению системы уравнений газовой динамики, которое для большинства представляющих интерес течений не может быть получено. Поэтому функция источника должна быть выражена только через характеристики самого течения. Следует также заметить, что строгий учет всех гидродинамических составляющих, входящих в функцию источника, часто приводит к тому, что формальное решение представляет собой расходящийся интеграл [7]. Поэтому основное внимание при построении акустической аналогии уделяется физической корректности описания функции источника и ее адекватности исследуемой проблеме [9]. Это стало основным стимулом для совершенствования аналогии Лайтхилла и появления новых акустических аналогий, направленных на более тонкий анализ протекающих процессов. Однако при этом возникают трудности, связанные с построением решений полученных уравнений.

Благодаря попыткам ряда авторов (в частности, Меринга, Кроу, Обермейера [11–13]) формализовать теорию гидродинамического шума, при решении задач такого класса стал применяться подход, основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (см. также ссылки, приведенные в [6]). В этом подходе течение жидкости и генерируемое им звуковое поле рассматриваются как две отдельные, но перекрывающиеся части полного течения сжимаемой среды. Такое представление поля течения в предположении малых чисел Маха M соответствует физике процесса генерации звука гидродинамическим потоком. В работе [6] отмечено, что данный метод служит полезным напоминанием об ограничении теории Лайтхилла: аппроксимация тензора Лайтхилла появляется здесь в качестве первого члена асимптотического разложения.

Обоснование применимости подхода, основанного на сращиваемых асимптотических разложениях, заключается в том, что и он, и метод акустической аналогии Лайтхилла при $M \ll 1$ дают одинаковые оценки излучаемой мощности [11]. Кроме того, применение метода сращиваемых асимптотических разложений позволяет дать физическую трактовку асимптотике тензора напряжений Лайтхилла.

Подход, основанный на сращиваемых асимптотических разложениях – мощный инструмент, позволяющий почувствовать физику задачи [7, 11], однако, как показал углубленный анализ Кроу [11], сама процедура сшиваия не лишена не-

достатков, из-за чего необходим тщательный анализ полученного результата. Также важно отметить, что применение обсуждаемого метода ограничено требованием акустической компактности области, занятой турбулентностью¹, тогда как при использовании акустической аналогии такого требования на область гидродинамического течения не накладывается [7].

Метод акустической аналогии Лайтхилла является базисным при решении задач об излучении аэрогидродинамического шума. Как отмечено в работе [6], среди многочисленных акустических аналогий теория Лайтхилла оказалась наиболее плодотворной, поскольку она способна продемонстрировать ряд замечательных особенностей шума потока, обнаруженных в экспериментах.

Анализ литературы показывает, что описание излучения звука вихревыми потоками – весьма сложная задача. Повысить уровень понимания таких явлений существенно помогает исследование процесса звукообразования от модельных течений. В качестве детально исследованной модели вихревых течений можно упомянуть точечные вихри. Техника построения решений для нахождения звуковых полей, порождаемых такими потоками, также хорошо отработана. Имеется большое количество работ, посвященных излучению звука точечными вихрями как в безграничной области, так и при наличии границ. Ряд известных результатов можно найти в монографии [10].

Цель этой статьи состоит в установлении связей между акустическими, геометрическими и динамическими характеристиками течений, образованных тремя точечными вихрями в безграничной идеальной жидкости. При решении задачи об излучении звука точечными вихрями будет использована акустическая аналогия Лайтхилла.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ

Взаимодействие N точечных вихрей с интенсивностями κ_α и координатами (x_α, y_α) в безграничной идеальной среде описывается гамильтоновой системой уравнений [14]

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \dot{x}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, & \kappa_\alpha \dot{y}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \\ \alpha &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

¹Акустически компактным называется источник, размер которого мал по сравнению с характерной длиной волны излучаемого звука [7].

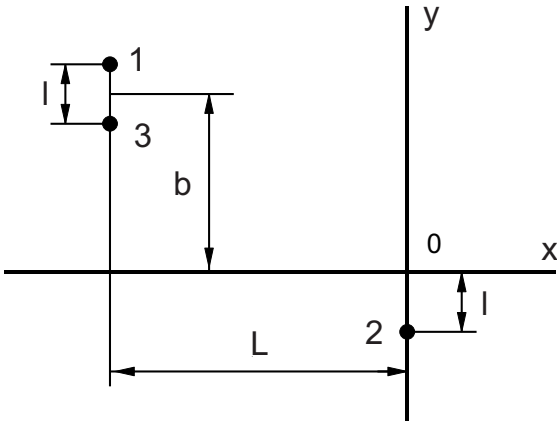


Рис. 1. Начальная геометрия модельного течения:
1,3 – падающая вихревая пара; 2 – одиночный вихрь

с независимым явно от времени гамильтонианом H :

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln R_{\alpha\beta}^2, \quad (2)$$

$$R_{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2.$$

Здесь точка над переменными означает дифференцирование по времени. Множитель $1/8$ в соотношении (2) предполагает, что количество членов суммы в H равно $N!/(N-2)!$, т. е. имеем дело с размещениями. Кроме H , система (1) обладает еще тремя независимыми первыми интегралами [14]:

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha x_\alpha, \quad P = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha y_\alpha, \quad (3)$$

$$I = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2).$$

Постоянство величин (2) и (3) в процессе движения выражает собой выполнение законов сохранения энергии (H), импульса (Q, P) и момента импульса (I) течения, образованного вихрями. Подробный анализ решений системы (1) и обширная библиография по исследованию точечных вихрей содержатся, например, в [15, 16].

Как известно, задача о движении трех точечных вихрей в отсутствие границ интегрируема [15]. Рассмотрим вихревую систему, образованную вихрями с интенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3 = \kappa$. Ее поведение дает полное качественное представление о всех возможных типах взаимодействия при детерминированном движении нескольких точечных вихрей. В работах [17, 18] детально рассмотрены все возможные типы взаимодействия вихревой пары с одиночным вихрем в идеальной несжимаемой

жидкости при интенсивностях $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3 = \kappa$. Как показал Гребли [17], взаимодействие этой вихревой системы полностью определяется инвариантом $\Lambda = I/(4\kappa)$, представляющим собой (с точностью до постоянного множителя) момент импульса вихревой системы, и начальным радиусом одного из вихрей, взятым в качестве независимой переменной в решении (например, ρ_1^0). Вихри с заданными интенсивностями и центр завихренности системы (3) в процессе взаимодействия образуют параллелограмм – центр завихренности и вихрь 3 с $\kappa_3 = -\kappa$ расположены в противоположных углах [17]. Гребли поместил начало координат в центр завихренности, следствием чего стало тождественное равенство нулю импульсов системы относительно координатных осей ($P \equiv 0, Q \equiv 0$), и пронормировал все линейные размеры так, что $H \equiv 0$. Это позволило упростить алгебраические преобразования. Таким образом, единственным отличным от нуля инвариантом остался момент импульса $I = 4\kappa\Lambda$ (3).

В зависимости от Λ и ρ_1^0 , взаимодействия в рассмотренной вихревой системе были разделены на три типа: прямое, обменное и взаимный захват [17]. В этой статье будет рассмотрено звуковое поле, генерируемое в случаях прямого и обменного взаимодействий.

Для наглядности перейдем от параметров Гребли Λ, ρ_1^0 к L, l и b (см. рис. 1). Зафиксируем значения $L = \text{const}$ и $l = \text{const}$. Поместив начало координат в центр завихренности, исследуем зависимость порождаемого вихревыми взаимодействиями звукового поля от расстояния b . При нормировке линейных размеров, принятой нами, гамильтониан H в общем случае отличен от нуля. Параллелограммы, образованные вихрями и их центром завихренности при обеих предложенных нормировках – гомотетичные фигуры с центром гомотетии, расположенным в центре завихренности, и коэффициентом гомотетии B_{Gr} :

$$B_{Gr}^2 = \frac{[L^2 + (b + l/2)^2] l^2}{L^2 + (b + 3l/2)^2}. \quad (4)$$

Величины Λ, ρ_1^0 и начальные геометрические параметры L, l, b связаны соотношениями

$$\Lambda = \frac{(2b + l)l}{4B_{Gr}^2}, \quad (\rho_1^0)^2 = \frac{L^2 + (b + l/2)^2}{B_{Gr}^2}. \quad (5)$$

При количественном анализе рассматривались следующие их значения: $L = -20, l = 1, -10 \leq b \leq 10$. Воспользовавшись соотношениями (4), (5), получаем диапазоны изменения b для двух сценариев взаимодействия – прямого и обменного.

1. Прямое взаимодействие: $1, 3 + 2 \rightarrow 1, 3 + 2$ (вихревая пара сохраняет свою целостность), $b \in [-10; -1 \cup]3.41 \dots; 10]$.
2. Обмен: $1, 3 + 2 \rightarrow 1 + 2, 3$ (пара теряет один из вихрей, захватывая вместо него другой), $b \in]-1; -0.5 \cup]-0.5; 3.41 \dots[$.

Отметим, что в данной классификации имеют место три граничных случая, разделяющие типы взаимодействия вихрей: $b = -1$, $b = -0.5$ и $b = 3.41670021 \dots$. Детальное их рассмотрение будет проведено ниже.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

В случае гомоэнтропичного потока с малыми числами Маха акустическая аналогия приводит к уравнению вихревого звука Пауэлла [19], связывающему звуковое поле с полем завихренности течения несжимаемой жидкости. Будучи записанным относительно флуктуаций давления для адиабатического процесса в линейном приближении ($p' = c_0^2 \rho'$), оно имеет вид

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}), \quad (6)$$

где $p'(\vec{x}, t)$ и $\rho'(\vec{x}, t)$ – флуктуации давления и плотности, обусловленные распространением звуковой волны; ρ_0 и c_0 – плотность и скорость распространения волн в невозмущенной среде; $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$, $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – векторы полей завихренности и скорости в несжимаемом течении. Решение уравнения (6) должно быть подчинено условию излучения Зоммерфельда [20] и начальным условиям

$$p'(\vec{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p'(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Они приняты нулевыми, поскольку вихревая пара звук не излучает [21].

Векторы полей завихренности $\vec{\omega}$ и скорости \vec{v} несжимаемого потока, образованного N точечными вихрями, описываются соотношениями [15]

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \vec{k} \sum_{\beta=1}^N \kappa_{\beta} \delta(y_1 - y_{1\beta}(t)) \delta(y_2 - y_{2\beta}(t)), \quad (8)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{i} \left(-\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \frac{\kappa_{\beta} (y_2 - y_{2\beta}(t))}{R_{\beta}^2} \right) + \vec{j} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \frac{\kappa_{\beta} (y_1 - y_{1\beta}(t))}{R_{\beta}^2} \right), \quad (9)$$

где y_1, y_2 – декартовы координаты точки поля течения; $y_{1\beta}(t), y_{2\beta}(t)$ – координаты вихря с номером β ; δ – дельта-функция Дирака; $R_{\beta} = \sqrt{(y_1 - y_{1\beta}(t))^2 + (y_2 - y_{2\beta}(t))^2}$ – расстояние между точкой течения и вихрем с номером β в плоскости, перпендикулярной осям вихревых нитей; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы в направлении осей координат.

По своей геометрии рассматриваемая задача двумерна, однако преобразования решения, связанные с предположениями о компактности и дальнем поле, проще осуществить для общего трехмерного случая. Решение уравнения (6) с начальными условиями (7) будем искать в виде свертки правой части с соответствующей геометрии задачи функцией Грина $G(\vec{y}, \tau | \vec{x}, t)$ для волнового уравнения в отсутствии границ:

$$p'(\vec{x}, t) = \rho_0 \int_0^t \int_V \vec{\nabla}_y \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) G(\vec{y}, \tau | \vec{x}, t) dV d\tau, \quad (10)$$

$$G(\vec{y}, \tau | \vec{x}, t) = \frac{\delta(t - \tau - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Здесь $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и τ – координаты и время, относящиеся к источнику звука; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и t – координаты и время, относящиеся к точке наблюдения.

Выполним преобразования решения (10), основанные на предположениях о дальней зоне излучения (в плоскости, перпендикулярной вихревым нитям $x_1^2 + x_2^2 \gg y_1^2 + y_2^2$) и об акустической компактности течения, образованного точечными вихрями². Воспользуемся выражениями для полей завихренности (8) и скорости (9) рассматриваемого течения. Окончательный результат представим в безразмерном виде. При обезразмеривании в качестве масштабов примем интенсивность вихря $\kappa = |\kappa_1| = |\kappa_2| = |\kappa_3|$; характерный линейный масштаб в области вихревого движения B (определяется таким образом, чтобы расстояние между вихрями в падающей вихревой паре было единичным); характерное время B^2/κ (для случая акустически компактного источника характерные временные масштабы для областей течения и излучения одинаковы [7]); характерную скорость в области вихревого движения $U = \kappa/B$; характерную длину волны $\lambda = Bc_0/U = B/M$ (линейный масштаб в области излучения); характерную величину флуктуаций давления $\rho_0 U^2/(2\pi)$. Соответствующие выкладки детально выписаны в статье [22].

²При $M \ll 1$ условие компактности выполняется автоматически.

С учетом выполненных преобразований имеем следующее выражение для обезразмеренных флуктуаций звукового давления в дальней зоне, порождаемых тремя точечными вихрями:

$$p'(\vec{x}, t) = -M^2 \times \int_0^{t-\rho} \frac{x_1^2 f_1(\tau) + x_2^2 f_2(\tau) + x_1 x_2 f_3(\tau)}{[(t-\tau)^2 - \rho^2]^{1/2}} \times \frac{d\tau}{(t-\tau)^2}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= -\sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{1\beta} y'_{2\beta})''; \\ f_2(\tau) &= \sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{2\beta} y'_{1\beta})''; \\ f_3(\tau) &= -\sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{2\beta}^2)'''; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad x_1 = \rho \cos \theta; \quad x_2 = \rho \sin \theta;$$

$y'_{1\beta}(\tau)$, $y'_{2\beta}(\tau)$ – компоненты скорости вихря с номером β ; θ – угол наблюдения.

Нас будет интересовать эффективность гидродинамического излучения [4], или коэффициент полезного действия при звукообразовании. Эта величина определяется как отношение излучаемой звуковой энергии к кинетической энергии потока:

$$\eta = E_{зв}/E_{кин}, \quad (13)$$

где энергия звукового поля в дальней зоне в расчете на единицу высоты цилиндрической поверхности радиуса $\rho \rightarrow \infty$, охватывающей вихревые нити, задается формулой

$$E_{зв} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho p'^2 d\theta dt; \quad (14)$$

$E_{кин}$ – гамильтониан вихревой системы (2) (часть кинетической энергии, которая зависит от взаимного расположения вихрей). Поскольку он может быть как положительным, так и отрицательным, то с небольшой погрешностью в качестве его величины примем кинетическую энергию жидкости “вихревого облака”, движущегося вместе с вихревой парой в начальный момент времени [14]. Общее выражение для кинетической энергии течения в расчете на единицу высоты имеет вид

$$E_{кин} = \frac{mU_{\Pi}^2}{2},$$

где $m = \rho_0 S$ – масса жидкости, заключенная в “вихревом облаке”; S – площадь “вихревого облака”; U_{Π} – начальная скорость движения вихревой пары 1, 3. Форма облака близка к овалу с полуосьми $1.73a$ и $2.09a$, где a – половина расстояния между вихрями пары, откуда $S \approx 3.52\pi a^2$. В результате кинетическая энергия потока в расчете на единицу высоты цилиндрической поверхности, охватывающей вихревые нити, оценивается как

$$E_{кин} = 1.76\pi\rho_0 a^2 U_{\Pi}^2. \quad (15)$$

Обезразмеренные величины $E_{зв}$ (14) и $E_{кин}$ (15) – масштабы $\lambda\rho_0 U^2 B$ и $\rho_0 U^2 B^2$ соответственно – имеют вид

$$E_{зв} = M^5 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho p'^2 d\theta dt \quad (16)$$

и

$$E_{кин} = 1.76\pi a^2 U_{\Pi}^2. \quad (17)$$

Преобразуем выражение для звуковой энергии (16) с учетом свойств функций, описывающих вихревое поведение, и условия дальнего поля ($\omega\rho \gg 1$, где ω – безразмерная круговая частота). Перепишем выражение для флуктуаций давления (11) в виде

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{M^2}{2\pi} \int_0^{t-\rho} d\tau \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1^2 F_1(\omega) + x_2^2 F_2(\omega) + x_1 x_2 F_3(\omega)}{((t-\tau)^2 - \rho^2)^{1/2} (t-\tau)^2} \times \exp(-i\omega\tau) d\omega, \quad (18)$$

$$F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \exp(i\omega t) dt, \quad i = 1, 2, 3.$$

Представление функций (12) их Фурье-образами правомочно, поскольку они абсолютно интегрируемы и удовлетворяют условию Дини [23]. В соотношении (18) выполним замену переменных [24]

$$\tau = t - \sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

и оценим полученный интеграл методом стационарной фазы. Подставим полученное соотношение для флуктуаций давления в формулу для звуковой энергии и применим теорему Парсеваля [23]. В результате получим следующее расчетное выражение для энергии звукового поля, порождаемого

системой точечных вихрей:

$$E_{зв} = \frac{M^5}{64\pi} \times \left\{ 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_1(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_2(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_3(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(\omega)F_2^*(\omega)}{|\omega|} d\omega \right\}, \quad (19)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Дифференциальные уравнения (1), описывающие динамику вихрей, интегрировались численно методом экстраполяции с переменным шагом и порядком [25]. Интегрирование в соотношении (11) выполнялось по квадратурным формулам, учитывающим интегрируемую особенность при $\tau = t - \rho$ [26]. Фурье-образы вычислялись с помощью быстрого преобразования Фурье [27].

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Течения, формируемые точечными вихрями в безграничной идеальной слабосжимаемой среде, порождают источники звука, являющиеся аналогом классических квадрупольей [4]. Напомним, что диаграмма направленности поперечного квадруполья по давлению имеет четыре одинаковых лепестка, оси симметрии которых расположены под углом 90° друг к другу, а сдвиг фаз давления между соседними лепестками составляет 180° [1].

3.1. Вращение диаграммы направленности. Давление на оси лепестка

Обычно при решении задач об излучении звука завихренностью исследуются временные зависимости звуковых характеристик (например, давления) при фиксированном угле наблюдения [22, 28, 29]. Для рассматриваемых здесь типов взаимодействия точечных вихрей – прямого и обменного – звуковое давление в фиксированном направлении представляет собой импульс сложной формы длительности B/U , характеризующийся несколькими пиками. Вследствие закона сохранения импульса постоянная его составляющая равна нулю. Амплитудные спектры звукового давления – гладкие кривые, максимумы которых локализованы в низкочастотной области, что характерно для течений с $M \ll 1$. Детальный анализ этих характеристик можно найти, например, в [22].

Поскольку проведенные численные эксперименты по изучению звуковых полей при прямом

и обменном взаимодействиях показали, что диаграмма направленности звукового поля вращается, то логично исследовать звуковое поле с учетом его вращения. Для того чтобы представить его поведение, зафиксируем один из лепестков диаграммы направленности (опорный лепесток) и в процессе взаимодействия вихрей будем определять давление на его оси и ее угол поворота. Найдем связь между особенностями распределения звукового поля и геометрическими и динамическими характеристиками течения.

Вращение диаграммы направленности связано с поворотом вихревой системы при взаимодействии. Поскольку вихрь 3 входит как в падающую, так и в уходящую вихревые пары для всех исследуемых типов взаимодействия, логично считать, что его поворот за время взаимодействия отражает поворот всей вихревой системы. При изменении параметра b в выбранном для исследования диапазоне $[-10; 10]$ вихревая пара 1, 3 в начальный момент располагается вдоль прямой $x = L = -20$, занимая при этом различные положения относительно возмущающего вихря 2 ($x_{02} = 0, y_{02} = -1$), см. рис. 1.

Поворот диаграммы направленности вычислялся следующим образом. В начальный момент времени в точке приема $t_0 = \rho + \Delta t$, когда давление на оси опорного лепестка диаграммы направленности $p_d = O(0)$, фиксируем угловую координату оси $\theta_d(t_0)$, определяем звуковое давление $p_d(t_0)$ и угловую координату вихря 3 $\theta_3(t_0)$. Здесь Δt – шаг дискретизации по времени при вычислении звукового поля. В расчетах Δt принимался равным (0.042...0.07). На каждом шаге вычислений фиксируем эти величины. В результате для каждого заданного значения параметра b получены временные зависимости угла поворота диаграммы направленности $\theta_d(t)$, давления на оси лепестка $p_d(t)$ и угла поворота вихря 3 $\theta_3(t)$. Полный поворот диаграммы направленности $\Delta\theta_d$ равен разности между конечным и начальным значениями угла ее поворота, а полный поворот вихревой системы $\Delta\theta_3$ – разности между конечной и начальной угловыми координатами вихря 3.

Анализ показал, что начальное угловое распределение звукового поля формируется таким образом, что вдоль траектории падающей вихревой пары всегда ориентирован лепесток диаграммы направленности. Опорный лепесток определялся таким образом, чтобы его ось совпадала с направлением падения вихревой пары. После поворота диаграммы, обусловленного взаимодействием вихрей, спадающее звуковое поле $p_d(t \rightarrow +\infty) = O(0)$ всегда ориентируется так, что ось одного из лепестков квадруполья направлена вдоль траектории уходя-

щей вихревой пары. Следовательно, угловое распределение физических характеристик звукового поля при его зарождении и спадании таково, что их максимальные (минимальные) значения всегда связаны с направлениями движения падающей и уходящей вихревых пар.

Отметим, что в качестве положительного принят против часовой стрелки. На всех приведенных ниже графиках данные, относящиеся к вихрю 1, представлены сплошными кривыми с круглыми маркерами, к вихрю 2 – штриховыми с треугольными маркерами, к вихрю 3 – штрихпунктирными с квадратными маркерами. Маркеры (“реперные” точки), нанесенные на кривые, соответствуют одним и тем же моментам времени интервала звукообразования. Для облегчения восприятия на траекториях вихрей отмечены лишь его начало и конец, а также начальные и конечные положения вихрей. Кривые $\theta_d(t)$ и $\theta_3(t)$ на графиках изображены сплошными и штриховыми линиями соответственно. Отложенное на оси абсцисс время относится к моменту приема сигнала.

3.1.1. Прямое взаимодействие при $b \in [-10; -1]$ (первый сценарий)

В этом случае возмущенная вихрем 2 пара 1, 3 движется, сохраняя свою целостность в процессе взаимодействия. При этом вихрь 2 несколько отклоняется от своего первоначального положения (рис. 2, а). Вдоль падающей вихревой пары направлен положительный лепесток диаграммы направленности. Обусловленное взаимодействием звуковое поле поворачивается таким образом, что вдоль уходящей вихревой пары 1, 3 располагается положительный лепесток, центрально симметричный лепестку, ориентированному вдоль падающей вихревой пары. Таким образом, поворот звукового поля оказывается на 180° больше поворота вихревой системы. Соотношение

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 + 180^\circ$$

отражает связь между поворотами звукового поля и вихревой системы в исследуемом диапазоне параметра b (рис. 2, б). При этом и вихревая система, и ее звуковое поле вращаются в одинаковом, положительном, направлении. С ростом b углы поворота возрастают.

Давление на оси лепестка $p_d(t)$ представляет собой импульс, фаза которого с течением времени не меняется (см. рис. 2, б). Сравнение характеристик в “реперных” точках позволяет сделать вывод о том, что формирование звукового поля происхо-

дит на временном интервале ускоренного движения вихрей (рис. 2, в).

При увеличении параметра b в исследуемом диапазоне начальная конфигурация вихрей изменяется таким образом, что вихревая пара 1, 3 приближается к вихрю 2, перемещаясь вверх вдоль прямой $x=L$. В предельном случае $b=-1$ в начальный момент времени $t=0$ срединная точка вихревой пары 1, 3 и вихрь 2 имеют одну и ту же ординату. Более подробно предельные случаи будут рассмотрены ниже.

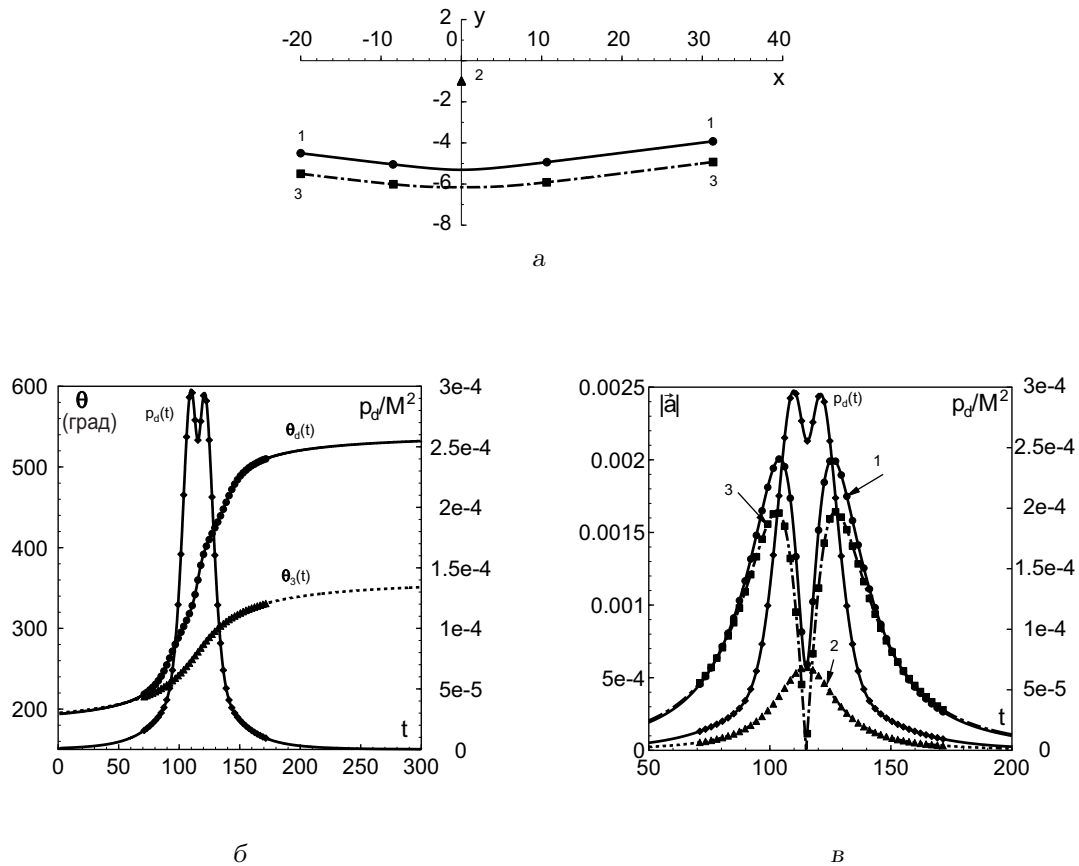
3.1.2. Обмен при $b \in [-1; -0.5]$ (второй сценарий)

В случае реализации второго сценария возмущенная вихрем 2 вихревая пара 1, 3 разрушается: образуется новая вихревая пара 2, 3, а вихрь 1 тормозится (рис. 3, а). Вдоль траектории падающей вихревой пары 1, 3 расположен положительный лепесток диаграммы направленности. Вихревая система и диаграмма направленности поворачиваются сходным образом, поэтому после взаимодействия вдоль уходящей вихревой пары расположена ось того же лепестка. Зависимости $\theta_d(t)$ и $\theta_3(t)$ – возрастающие по близким временным законам функции, выходящие при $t \rightarrow +\infty$ на асимптоту $\theta_d(+\infty) = \theta_3(+\infty) = \text{const}$ (рис. 3, б). Для данного типа взаимодействия полный поворот диаграммы направленности и равен полному повороту вихревой системы:

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3.$$

Давление на оси лепестка $p_d(t)$ представляет собой двугорбый импульс с постоянной фазой (рис. 3, б). Анализ результатов показывает, что звук излучается в процессе обмена вихрями, т.е. при ускоренном их движении (рис. 3, в). В исследуемом диапазоне параметра b диаграмма направленности и вихревая система вращаются в одном, положительном, направлении. При увеличении b полный угол поворота диаграммы направленности и полный угол поворота вихревой системы уменьшаются. В предельном случае при $b=-0.5$ в начальный момент времени вихри 2 и 3 имеют одинаковые ординаты ($y_{02} = y_{03} = -1$), т.е. лежат на прямой, параллельной оси абсцисс.

Отметим, что на графике траектории вихря 1 для случаев обменного взаимодействия маркеры, обозначающие конец интервала звукообразования и конечное положение вихря, совпадают. Также совпадают маркеры, обозначающие начальное положение вихря 2 и начало интервала звукообразования.


 Рис. 2. Поведение системы при $b = -5$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

3.1.3. Обмен при $b \in]-0.5; 3.41 \dots [$ (второй сценарий)

При значениях $b > -0.5$ вдоль падающей вихревой пары 1, 3 направлен отрицательный лепесток диаграммы направленности. Данный интервал параметра b интересен тем, что на нем происходит изменение направления вращения звукового поля. По характеру вращения диаграммы направленности и вихревой системы, а также по особенностям фазового распределения звукового поля рассматриваемый диапазон значений можно разделить на три подынтервала, каждый из которых проанализируем отдельно.

• $-0.5 < b \leq 1.45$

Повороты диаграммы направленности и вихревой системы здесь связаны соотношением

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$$

(рис. 4, б, рис. 5, б), из чего следует, что вдоль падающей 1, 3 и уходящей 2, 3 вихревых пар направлен один и тот же лепесток – отрицательный. В нижней части этого диапазона диаграмма направленности звукового поля и вихревая система сходным образом монотонно поворачиваются в положительном направлении, см. рис. 4, б (траектории вихрей представлены на рис. 4, а). Затем при увеличении b диаграмма направленности начинает совершать колебания, хотя сама вихревая система продолжает монотонно поворачиваться в прежнем, положительном, направлении (см. рис. 5, б). Соответствующие траектории вихрей представлены на рис. 5, а. Таким образом, при определенных значениях параметра b существует временной интервал, на котором вихревая система и порождаемое ею вихревое поле вращаются в противоположных направлениях (см. рис. 5, б). Импульс давления на оси лепестка приобретает более сложную форму, сохраняя при этом фазу постоянной (см. рис. 5, б). Величины $\Delta\theta_d$ и $\Delta\theta_3$ с ростом b падают,

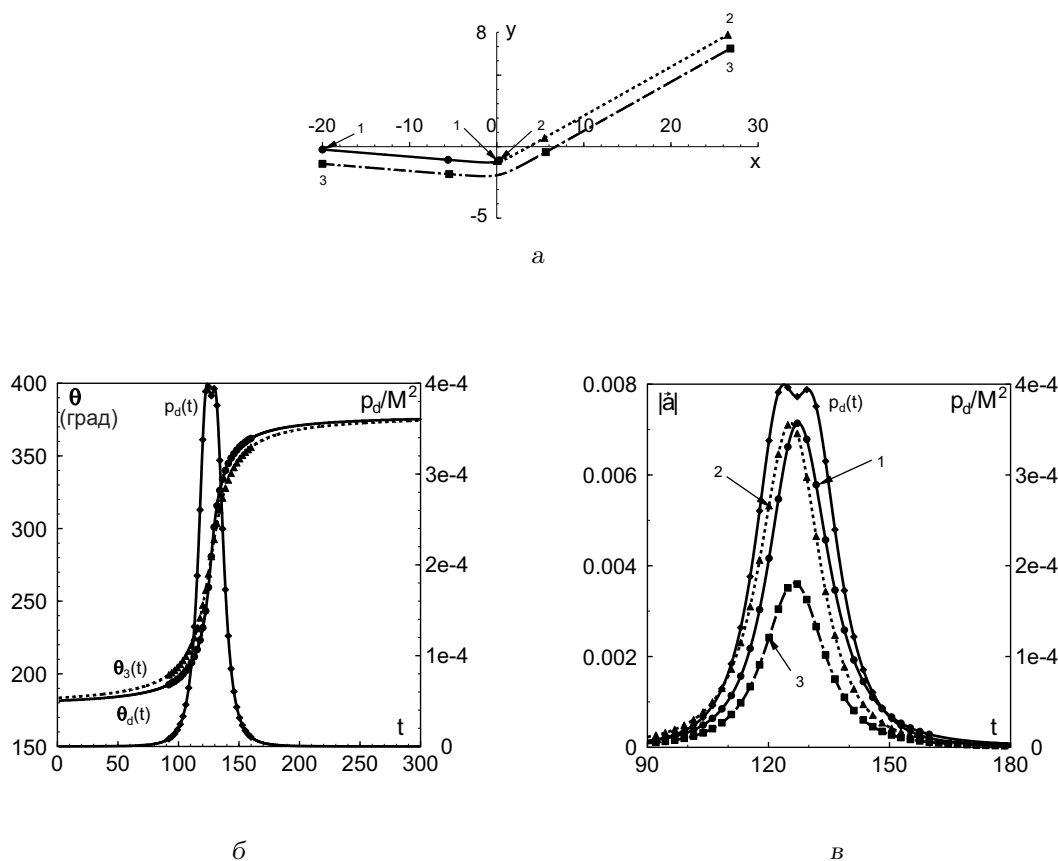


Рис. 3. Поведение системы при $b = -0.7$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

оставаясь положительными.

(рис. 6, б):

$$\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3.$$

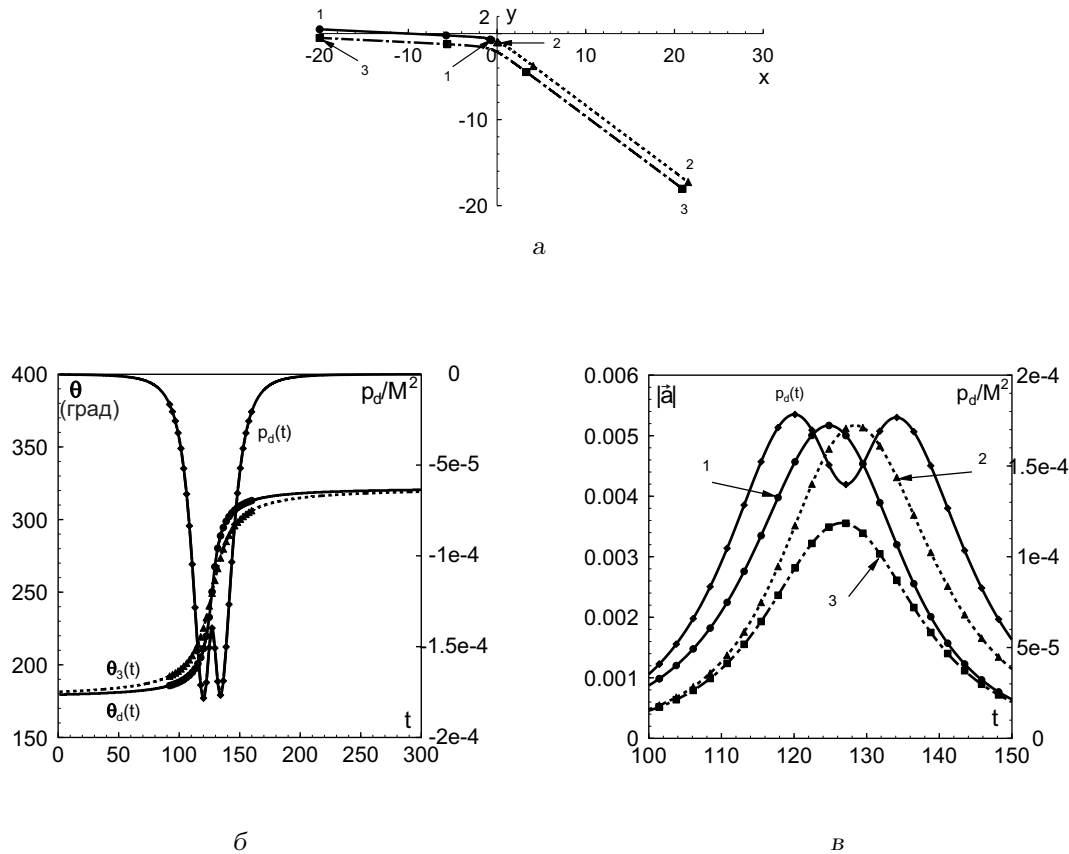
• $1.45 < b < 1.5$

Начиная с $b \approx 1.45$, диаграмма направленности резко начинает вращаться в противоположном (отрицательном) направлении. В этом узком интервале давление на оси лепестка меняет знак в процессе взаимодействия вихрей. Звуковое поле и вихревая система вращаются в противоположных направлениях, рис. 6, б (траектории вихрей представлены на рис. 6, а). Показанная на рис. 6, б зависимость $p_d(t)$ демонстрирует тот интересный факт, что при взаимодействии вихрей в некоторые моменты времени (в данном примере их два) звуковое давление становится равным нулю, т. е. вихри “молчат”. Полный поворот звукового поля возрастает в отрицательном направлении, а поворот вихревой системы уменьшается в положительном. Соотношение, связывающее поворот звукового поля и вихревой системы, будет следующим

Вдоль падающей вихревой пары расположен отрицательный лепесток диаграммы направленности, а вдоль уходящей – центрально симметричный лепесток.

• $1.5 \leq b < 3.41 \dots$

Фаза импульса давления на оси лепестка остается знакопостоянной. Диаграмма направленности монотонно вращается в отрицательном направлении. В начале интервала диаграмма направленности и вихревая система вращаются в противоположных направлениях, рис. 7, б (траектории вихрей представлены на рис. 7, а). Затем вращение вихревой системы приобретает колебательный характер, рис. 8, б (траектории вихрей см. на рис. 8, а). Это приводит к изменению направления ее вращения, которое теперь начинает соответствовать направлению вращения звукового поля, рис. 9, б


 Рис. 4. Поведение системы при $b=0$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

(траектории вихрей см. на рис. 9, а).

Связь между полным поворотом звукового поля и вихревой системы имеет вид

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^\circ.$$

Вдоль падающей 1, 3 и уходящей 2, 3 вихревых пар направлен один и тот же, отрицательный, лепесток диаграммы направленности. При значениях $1.45 < b < 3$ полные повороты вихревой системы и генерируемого ею звукового поля имеют разные знаки.

3.1.4. Прямое взаимодействие при $b \in [3.41 \dots; 10]$ (первый сценарий)

При увеличении параметра b в исследуемом диапазоне в начальный момент времени вихревая пара 1, 3 удаляется от вихря 2, перемещаясь вдоль прямой $x=L$, ее целостность в процессе взаимодействия не нарушается. Вдоль падающей вихревой пары расположен отрицательный лепесток ди-

аграммы направленности, а вдоль уходящей – центрально симметричный лепесток, рис. 10, б (траектории вихрей представлены на рис. 10, а). Полные повороты звукового поля и вихревой системы связаны соотношением

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 180^\circ.$$

Вихревая система и звуковое поле вращаются в отрицательном направлении. При этом с увеличением b углы поворота уменьшаются. Фаза импульса звукового давления не меняется (см. рис. 10, б).

3.2. Общие закономерности

Обобщим полученные выше результаты по вращению звукового поля и вихревой системы точечных вихрей.

На рис. 11 представлены зависимости полных углов поворота диаграммы направленности $\Delta\theta_d(b)$ (сплошная кривая) и вихревой системы $\Delta\theta_3(b)$ (штриховая кривая) от параметра b на времен-

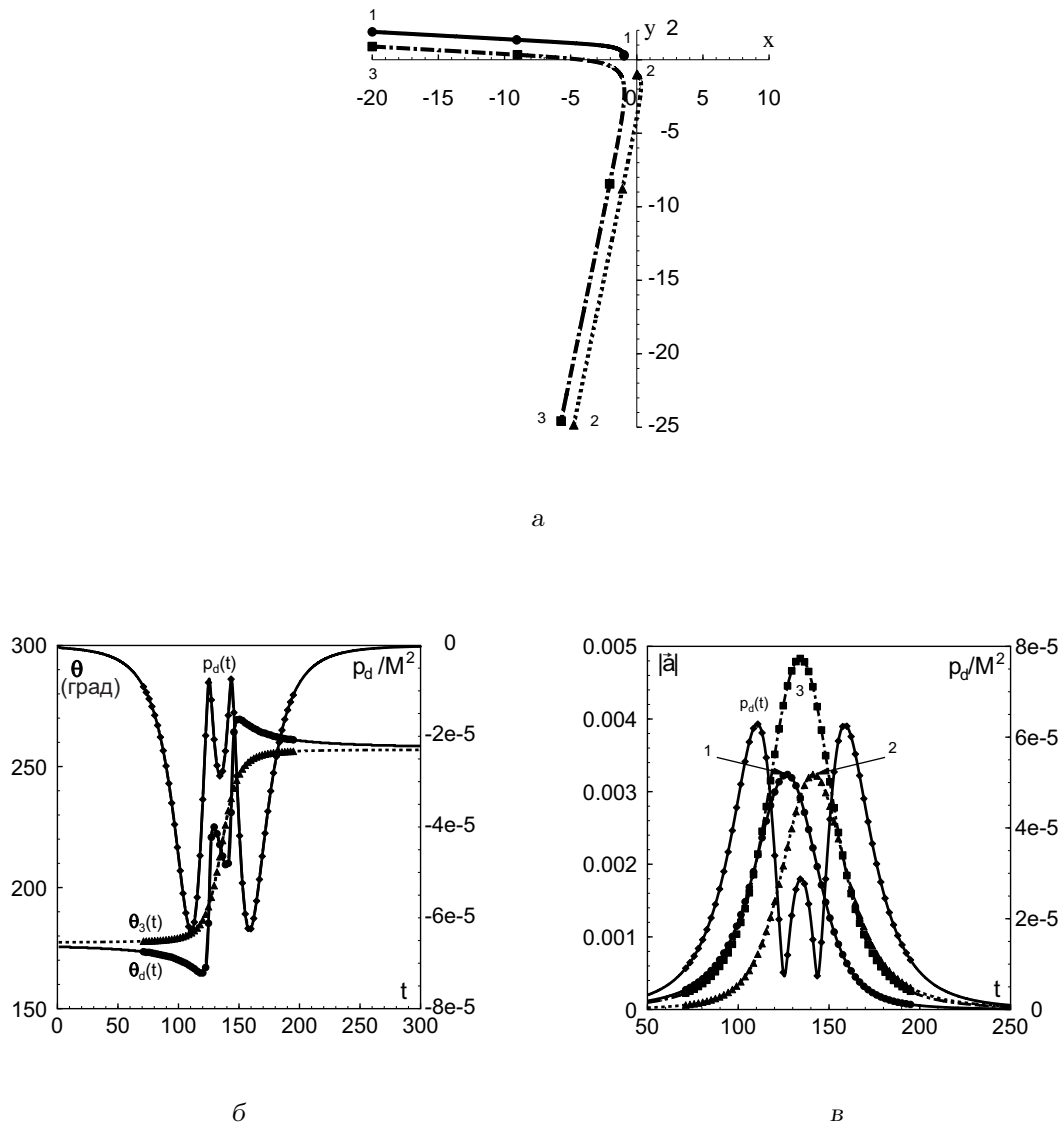


Рис. 5. Поведение системы при $b=1.4$:

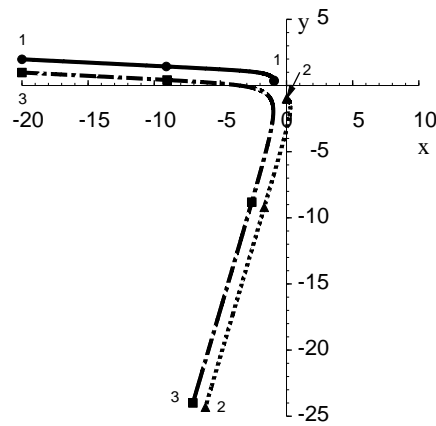
а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

ном интервале длительности звукового импульса, излучаемого при взаимодействии вихрей. На кривые нанесены маркеры, соответствующие одинаковым значениям b . Римскими цифрами от I до VI на рис. 11 обозначены характерные диапазоны изменения параметра b . В таблице приведены соотношения, связывающие $\Delta\theta_d(b)$ и $\Delta\theta_3(b)$ для характерных диапазонов b .

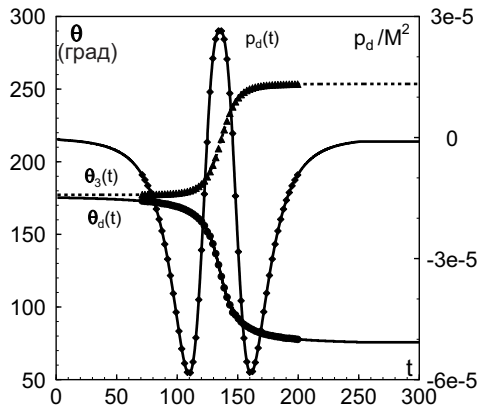
Таким образом, для случаев прямого взаимодействия ($b \in [-10; -1 \cup]3.41 \dots; 10]$ – области I и VI) характерно вращение диаграммы направленности

и вихревой системы в одном направлении – положительном (для области I) или отрицательном (для области VI). В области I повороты диаграммы направленности и вихревой системы связаны зависимостью $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 + 180^\circ$, а в области VI – $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 180^\circ$ (см. таблицу). Из этого можно заключить, что при прямом взаимодействии поворот звукового поля опережает поворот вихревой системы на угол 180° .

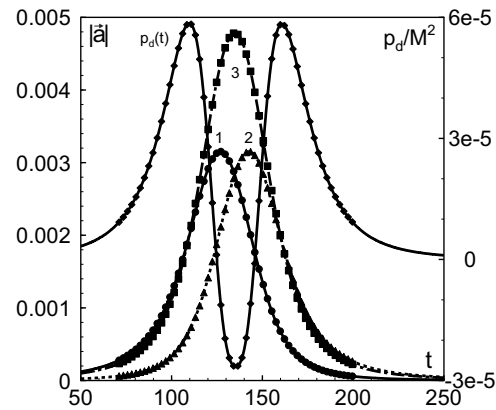
В случае обмена ($b \in]-1; -0.5[$ – область II) звуковое поле и вихревая система вращаются схо-



а



б



в

Рис. 6. Поведение системы при $b=1.48$:

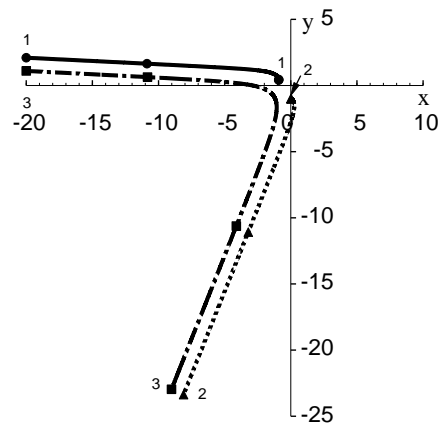
а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

дным образом: $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$, т. е. повороты звукового поля и вихревой системы равны между собой (см. также таблицу).

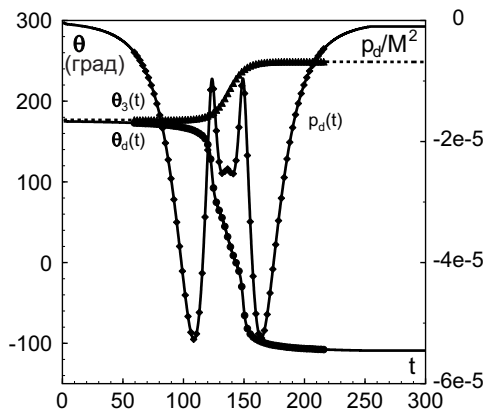
Наиболее интересным диапазоном изменения параметра b оказывается $] - 0.5; 3.41 \dots [$ (области III–V). Здесь с увеличением b изменяется направление вращения диаграммы направленности с положительного на отрицательный, а при дальнейшем росте b происходит изменение направления вращения вихревой системы. Весь рассматриваемый диапазон делится на три интервала, для каждого из которых характерны свои особенности во

вращении звукового поля и вихревой системы.

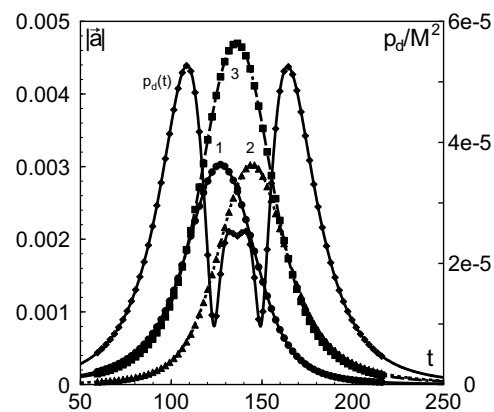
- $b \in] - 0.5; 1.45 [$ (область III). Начиная с некоторого значения b , диаграмма направленности совершает колебательные движения. Вихревая система вращается в прежнем, положительном, направлении. Полные повороты звукового поля и вихревой системы равны между собой: $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$ (см. таблицу).
- $1.45 < b < 1.5$ (область IV). Диаграмма направленности и вихревая система вращаются в противоположных направлениях: $\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3$



а



б



в

Рис. 7. Поведение системы при $b=1.6$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

(см. таблицу). Только для этого интервала характерно изменение фазы звукового давления на лепестке с течением времени.

- $b \in [1.5; 3.41 \dots]$ (область V). Вихревая система осуществляет колебательные движения и с ростом b начинает вращаться в одном направлении с диаграммой направленности. Полный поворот диаграммы направленности отличается от поворота вихревой системы на 360° :

$$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^\circ \text{ (см. таблицу).}$$

Обратим внимание на интервал значений параметра b , немного выходящий слева и справа за границы области IV (см. рис. 11). Здесь с ростом b в процессе взаимодействия наблюдается плавное изменение как поворота вихревой системы (см. рис. 5, а, рис. 6, а и рис. 7, а), так и модулей ускорений (см. рис. 5, в, рис. 6, в, рис. 7, в). В то же время, характер вращения диаграммы направлен-

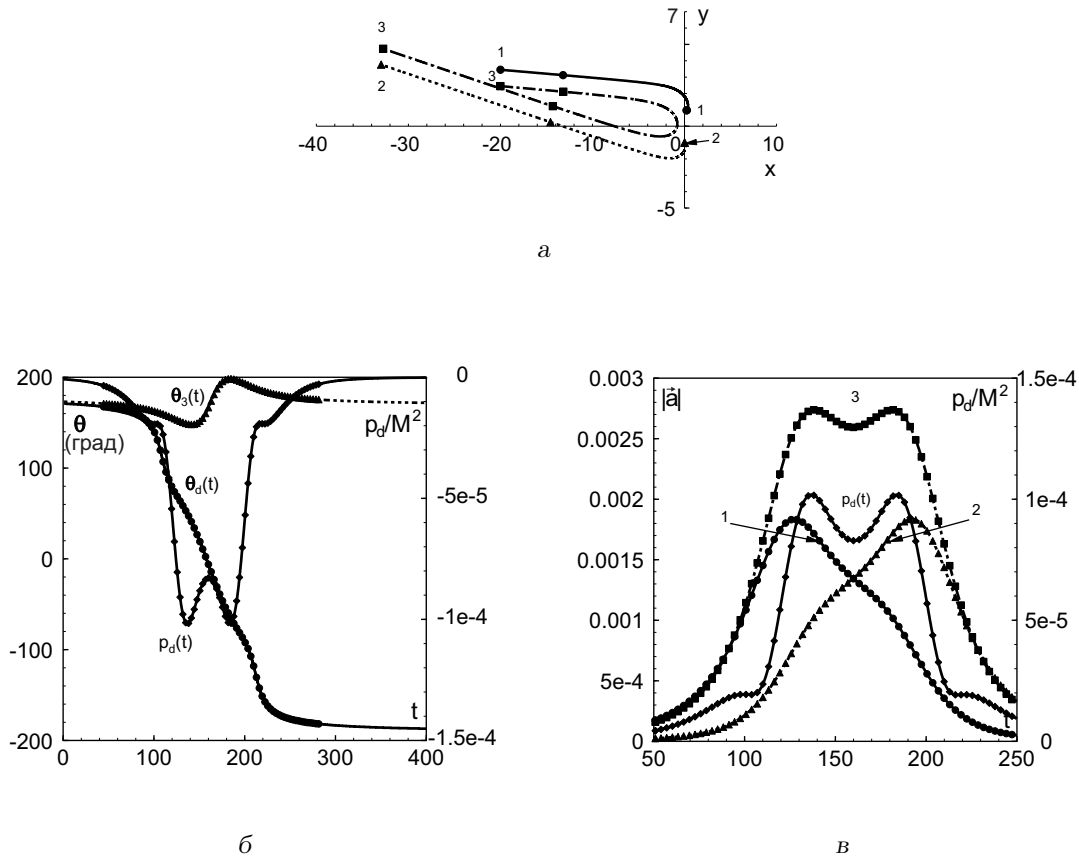


Рис. 8. Поведение системы при $b=2.95$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

ности претерпевает существенные изменения. Например,

- $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$ при $b=1.4$ (см. рис. 5, б);
- $\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3$ при $b=1.48$ (см. рис. 6, б);
- $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^\circ$ при $b=1.6$ (см. рис. 7, б).

Можно предположить, что причина этого заключается в поведении источника звука, в формировании которого динамика вихрей участвует сложным образом.

3.3. Граничные случаи

Как было отмечено выше, к граничным относятся случаи, которым соответствуют значения параметра b , разделяющие типы взаимодействия вихрей: $b=-1$, $b=-0.5$ и $b=3.41\dots$. Поведение системы при этих параметрах детально исследовано в работах [17, 18], и здесь будет уместно ограничиться краткой его характеристикой.

• $b=-1$

Вихревая пара 1, 3 в процессе взаимодействия с вихрем 2 образует равносторонний треугольник (рис. 12, а), вращающийся вокруг центра завихренности (начала координат) с постоянной угловой скоростью:

Таблица. Связь между $\Delta\theta_d$ и $\Delta\theta_3$ для различных диапазонов значений параметра b (см. рис. 11)

Диапазон	b	Соотношение
I	$[-10; -1[$	$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 + 180^\circ$
II	$] -1; -0.5[$	$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$
III	$] -0.5; 1.45]$	$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$
IV	$] 1.45; 1.5[$	$\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3$
V	$] 1.5; 3.41\dots[$	$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^\circ$
VI	$] 3.41\dots; 10]$	$\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 180^\circ$

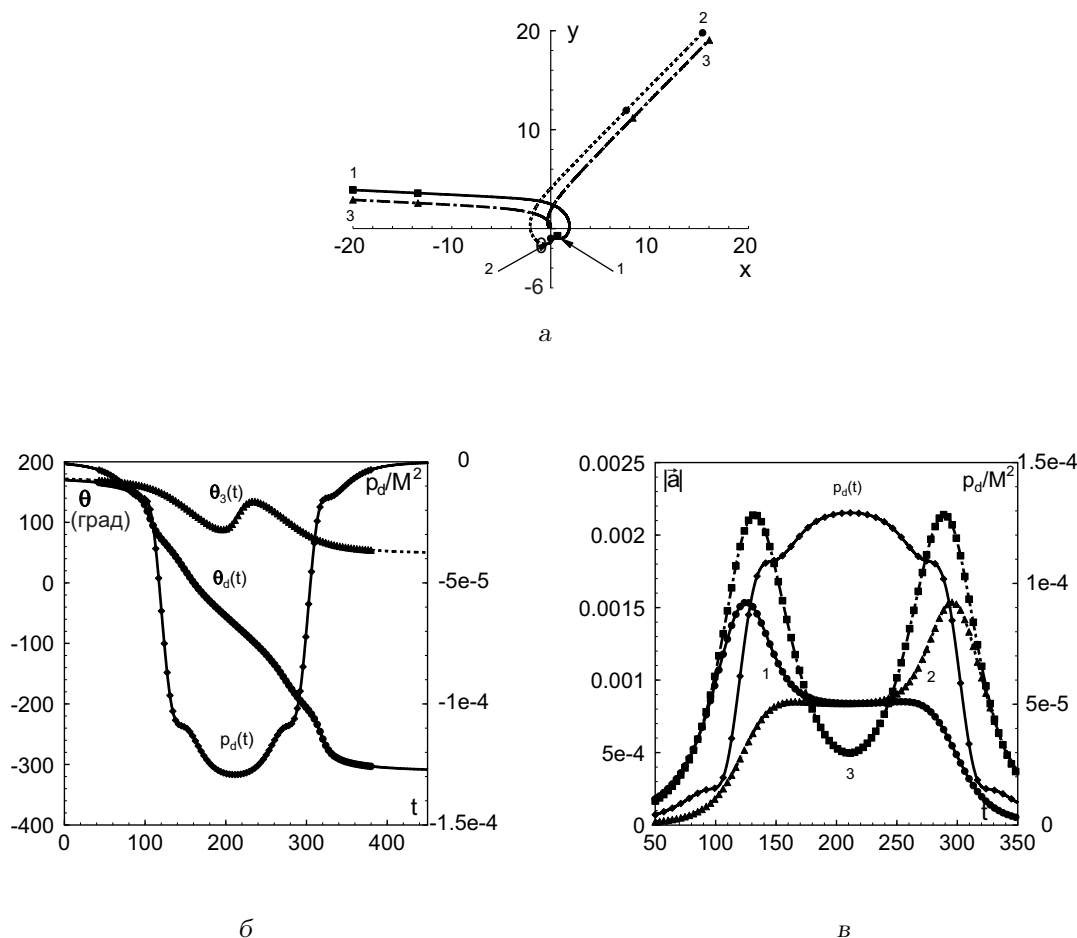


Рис. 9. Поведение системы при $b = 3.4$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

$$\omega_{(-1)} = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{1}{2\pi B_{Gr}^2}, \quad (20)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = B_{Gr}, \quad \rho_3 = \sqrt{3} B_{Gr}.$$

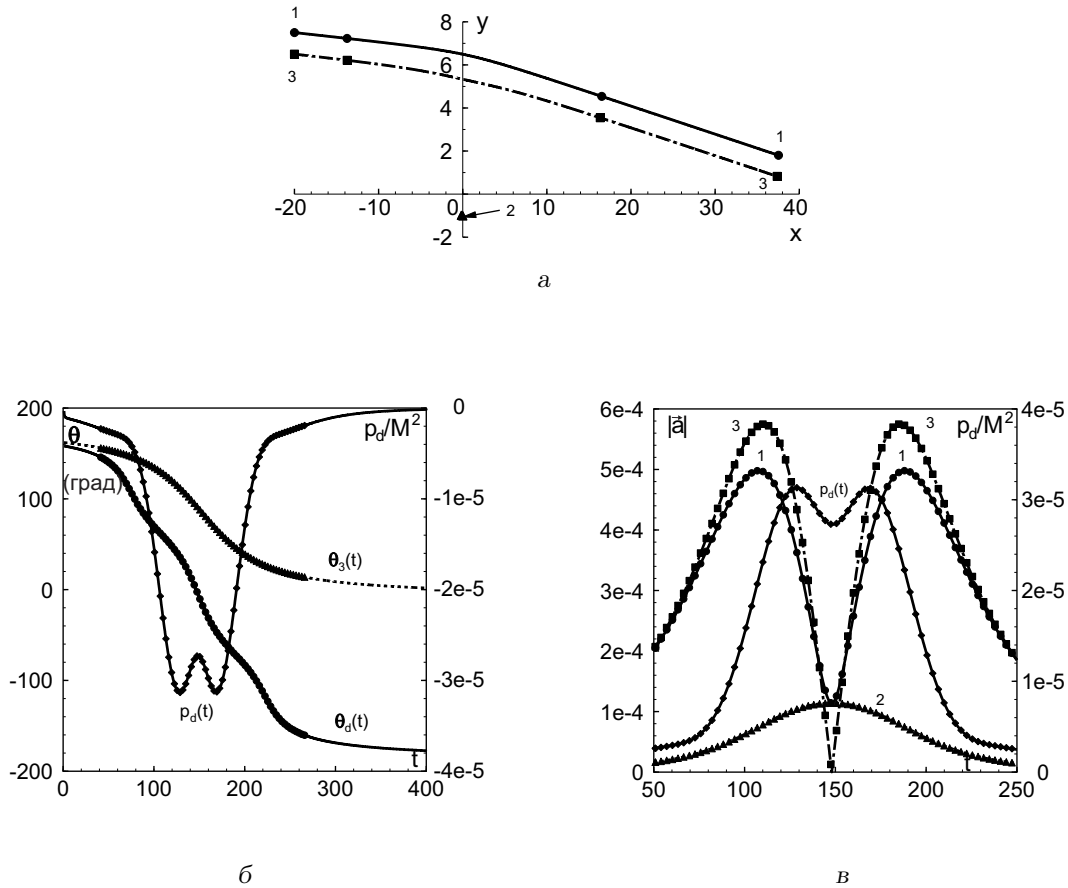
Здесь (ρ_i, θ_i) – полярные координаты вихря с номером i ; $B_{Gr} = 1$ (4).

Опорный лепесток диаграммы направленности направлен перпендикулярно стороне 1–2 вихревого треугольника. Диаграмма направленности эквивалентного квадрупольного вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости вращения вихрей: $\omega_d = \omega_{(-1)}$ (20). Давление на оси лепестка при вращении вихрей как единого целого постоянно: $p_d(t) = \text{const}$. Таким образом, звуковое поле вращается синхронно с вихревой системой (рис. 12, б). Вдоль падающей вихревой пары расположен положительный лепесток диаграммы направленности. Модули ускорений ви-

хрей и угловая скорость вращения связаны соотношением $|\vec{a}_i| = \rho_i \omega_{(-1)}^2$ (рис. 12, в). Вихри порождают монохроматический источник звука с частотой, равной удвоенной частоте их вращения: $\omega = 2\omega_{(-1)}$. Это характерно для источника квадрупольной природы.

• $b = -0.5$

В этом случае происходит обменное взаимодействие вихрей. Его существенная особенность заключается в том, что вихри движутся по параллельным прямым (рис. 13, а). Диаграмма направленности эквивалентного квадрупольного вращаются на плоскости сходным образом (рис. 13, б). Вдоль падающей 1, 3 и уходящей 2, 3 вихревых пар расположен один и тот же лепесток диаграммы направленности – отрицательный. Для данного типа взаимодействия ха-


 Рис. 10. Поведение системы при $b=7.0$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

ктерны уровни звука, близкие к нулевым значениям: $p_d(t) = O(10^{-13} M^2)$. Отметим, что на рис. 13, в временные зависимости модулей ускорений визуально совпадают. При этом кривые модулей ускорений вихрей 1 и 2 относятся к левой оси y , а кривая модуля ускорения вихря 3 и зависимость $p_d(t)$ – к правой.

Анализ этого случая позволяет сделать вывод о том, что уровень генерируемого звукового поля существенно зависит от наличия центростремительных ускорений у вихрей: их движение по искривленным траекториям порождает звуковое поле более высокого уровня, чем при движении по параллельным траекториям.

• $b = 3.41 \dots$

В этом случае при взаимодействии вихри выстраиваются в одну линию с неподвижным вихрем 3 в начале координат (рис. 14, а). Отрезок,

ограниченный вихрями 1 и 2, вращается с постоянной угловой скоростью:

$$\omega_{(3.41)} = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{1}{16\pi B_{Gr}^2}, \quad \frac{d\theta_3}{dt} = 0, \quad (21)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 2B_{Gr}, \quad \rho_3 = 0.$$

В данном случае $B_{Gr} \approx 0.9886$ (4). Поскольку вихрь 3 в процессе взаимодействия тормозится, то в качестве поворота системы принимаем поворот вихря 1. Диаграмма направленности эквивалентного квадруполья вращается синхронно с вихревой системой: $\omega_d = \omega_{(3.41)}$ (формула (21)). Опорный лепесток диаграммы направленности перпендикулярен отрезку, образованному вихрями 1 и 2. Так как вихревая система вращается в отрицательном направлении, то ее поворот отстает от поворота звукового поля на 90° (рис. 14, б). Значение давления на оси лепестка при вращении вихрей как единого целого постоянно – $p_d(t) = \text{const}$. Модули

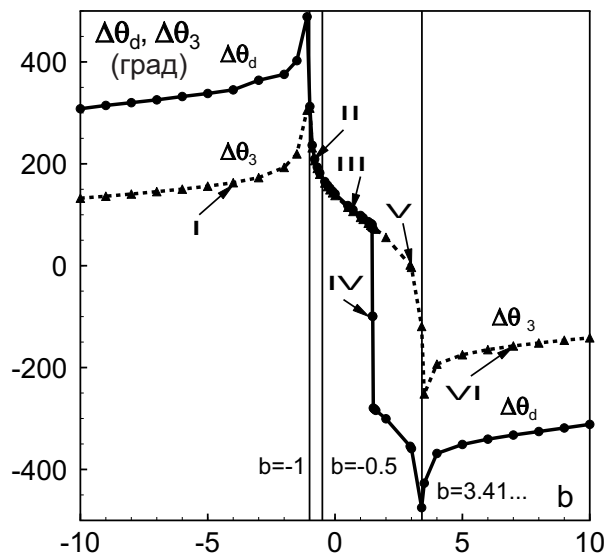


Рис. 11. Зависимости полного поворота диаграммы направленности $\Delta\theta_d(b)$ (сплошная) и вихревой системы $\Delta\theta_3(b)$ (штриховая) от параметра b

ускорений вихрей 1 и 2 при вращении вихрей равны между собой – $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \rho_1 \omega_{(3.41)}^2$. Поскольку вихрь 3 тормозится, то его ускорение стремится к нулю (рис. 14, в). Вдоль падающей вихревой пары расположен отрицательный лепесток диаграммы направленности. Звуковое поле, генерируемое таким взаимодействием, – гармоническое с частотой $\omega = 2\omega_{(3.41)}$, что характерно для источника квадрупольной природы.

3.4. Связь между ускоренным движением вихрей и излучением звука

На рис. 2, в–14, в представлены временные зависимости модулей ускорений вихрей $|\vec{a}_\beta|$:

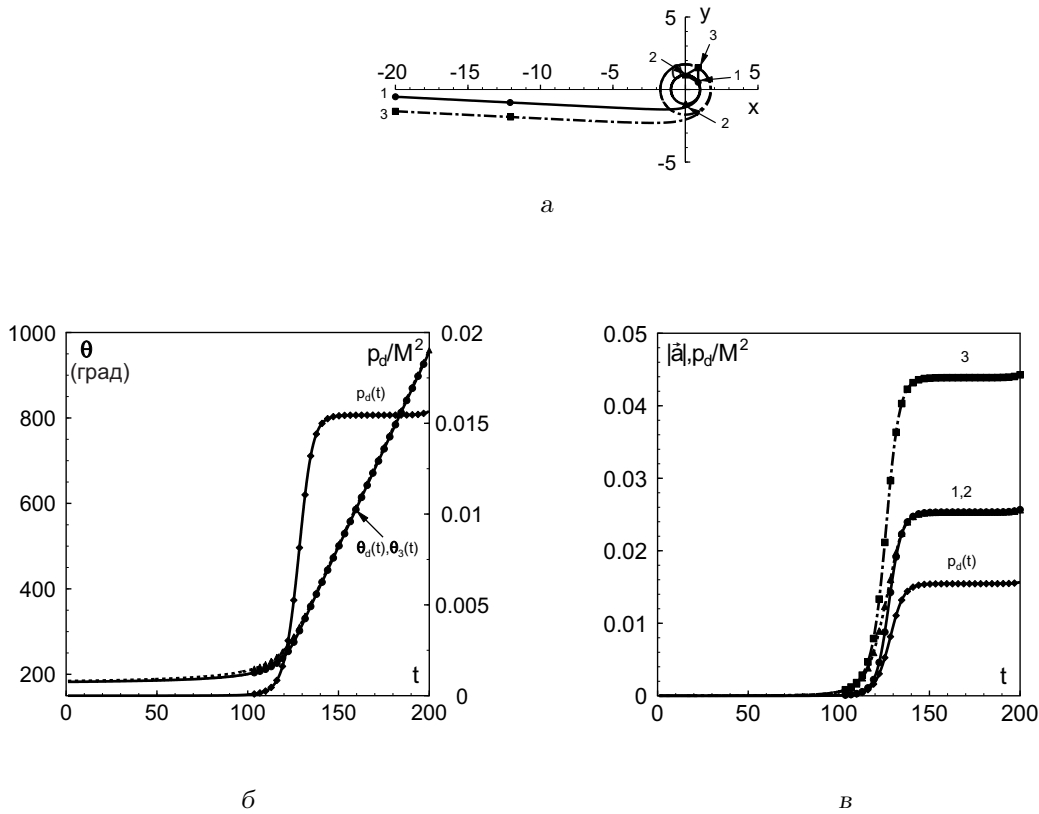
$$|\vec{a}_\beta| = \sqrt{(y''_{1\beta})^2 + (y''_{2\beta})^2}, \quad \beta = 1, 2, 3,$$

где $y''_{1\beta}, y''_{2\beta}$ – компоненты ускорения вихря с номером β , а также временные зависимости звукового давления на оси положительного лепестка эквивалентного поперечного квадрупольного $p_d(t)$. Анализ расчетных данных показывает, что излучение звука происходит при ускоренном движении вихрей [1]. Отметим, что центральный (по времени) экстремум импульса звукового давления, вычисленного на оси лепестка, и экстремум модуля ускорения вихря 3 (всегда образующего вихревую

пару) фиксируются в близкие моменты времени. В момент времени, соответствующий экстремуму модуля ускорения вихря 3, модули ускорений вихрей 1 и 2, потенциально или активно участвующих в обмене, равны. Отметим также, что в случае прямого взаимодействия в окрестности центрального экстремума давления $p_d(t)$ ускорение вихря 3 имеет порядок $(10^{-6} \dots 10^{-5})$, т. е. близко к нулю (см. рис. 2, в и 10, в). При обменном взаимодействии вблизи центрального экстремума $p_d(t)$ наблюдается экстремум модуля ускорения вихря 3 с $|\vec{a}_3| \neq 0$ (см. рис. 3, в–9, в). Отметим, что наличие у вихрей центростремительных ускорений приводит к значительному повышению уровня звука, генерируемого вихревой системой.

3.5. Коэффициент полезного действия звукообразования

В статье [4] отмечено, что турбулентность при малых числах Маха – исключительно неэффективный источник звука. Ее автор ссылается на эксперименты Герарда (Gerrard), которые показали, что коэффициент η/M^5 (см. формулу (13)) имеет порядок 10^{-4} при $M \rightarrow 1$. В работе [6] отмечено, что звуковое поле порождается турбулентным взаимодействием, и приведены следующие оценки эффективности звукообразования – толь-

Рис. 12. Поведение системы при $b = -1$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

ко $\sim 0.01\%$ энергии струи переходит в звук и даже для мощных ракетных струй эта величина составляет менее 1 %.

Подставив в формулу (13) соотношения (17) и (19), получим расчетное выражение для вычисления коэффициента η . Общий вид зависимости η/M^5 представлен на рис. 15, а, более детально для малых его величин – на рис. 15, б. Последний график характеризуется двумя основными пиками, уровни которых отличаются на несколько порядков – в окрестностях $b = -1$ и $3.41 \dots$. Как уже отмечалось выше, данные значения параметра b соответствуют вихревым взаимодействиям, порождающим монохроматические источники звука. Кроме того, наблюдаются локальные максимум при $b = 0.438$ и минимум при $b = 2.046$. Оба указанных значения соответствуют случаям обменного взаимодействия: на рассматриваемом максимуме полные повороты диаграммы направленности и вихревой системы равны между собой, а на минимуме – отличаются на 360° (см. таблицу).

Результаты, приведенные на рис. 15, в целом со-

гласуются с данными работы [7]. Отметим, что модель точечных вихрей верно отражает тот факт, что излучение на одной частоте более эффективно, чем широкополосное. Следует, однако, обратить внимание на окрестность $b = -1$, в которой величина η/M^5 имеет порядок единицы. Наличие этого нефизического значения эффективности гидродинамического излучения при $M \ll 1$ обусловлено идеализированным моделированием распределенных вихрей точками с сосредоточенной завихренностью.

Эффективность гидродинамического излучения в окрестности $b = 3.41 \dots$ ($\eta \approx 4 \cdot 10^{-4} M^5$) существенно ниже, чем при $b = -1$. Дело в том, что при $b = 3.41 \dots$ вихри образуют линейную конфигурацию, угловая скорость вращения которой примерно в 8 раз (т. е. почти на порядок) ниже угловой скорости вращения вихревого треугольника при $b = -1$ (ср. значения (20), (21)). Поскольку излучение вихрей при отсутствии границ моделируется квадруполем, то прогнозируемое различие в эффективности излучения составляет около пяти

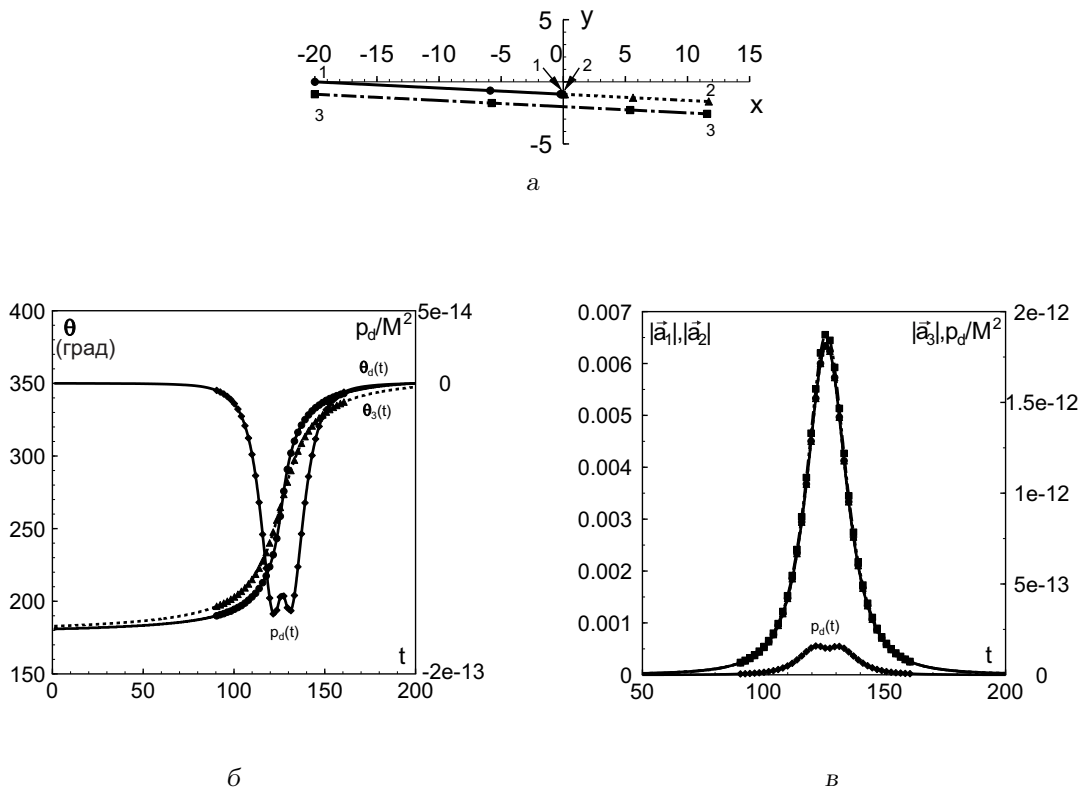


Рис. 13. Поведение системы при $b = -0.5$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

порядков. Как указано в [21], в общем случае более симметричные распределения завихренности излучают слабее. Полученный нами результат согласуется с этим выводом.

Отметим весьма низкую акустическую эффективность звукового источника для вихревого течения при $b = -0.5$. Здесь $\eta \approx 8.5 \cdot 10^{-10} M^5$, что обусловлено очень слабым звуковым полем, генерируемым вихрями в данном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла в широком диапазоне геометрических параметров выполнены расчет и анализ звуковых полей, генерируемых тремя точечными вихрями с интенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$ в безграничной идеальной жидкости при прямом и обменном взаимодействии. Получены следующие основные результаты:

- В исследованных случаях прямого и обменного взаимодействия наблюдается вращение диаграммы направленности генерируемого зву-

кового поля, что обусловлено изменением взаимного расположения вихрей в процессе взаимодействия при отсутствии в системе осей симметрии и вращением вихрей как единого целого.

- Угол поворота диаграммы направленности в процессе взаимодействия равен повороту вихревой системы, противоположен ему или отличается от угла поворота вихревой системы на постоянную величину, кратную 180° .
- Вихревая система и генерируемое ею звуковое поле могут вращаться как в одном, так и в противоположных направлениях.
- Фазовое распределение физических характеристик звукового поля при его зарождении и спадаении таково, что их максимальные (минимальные) значения всегда связаны с направлениями падающей и уходящей вихревых пар.
- Наиболее эффективны с точки зрения звукообразования вихревые взаимодействия, приводящие к вращению вихрей как единого це-

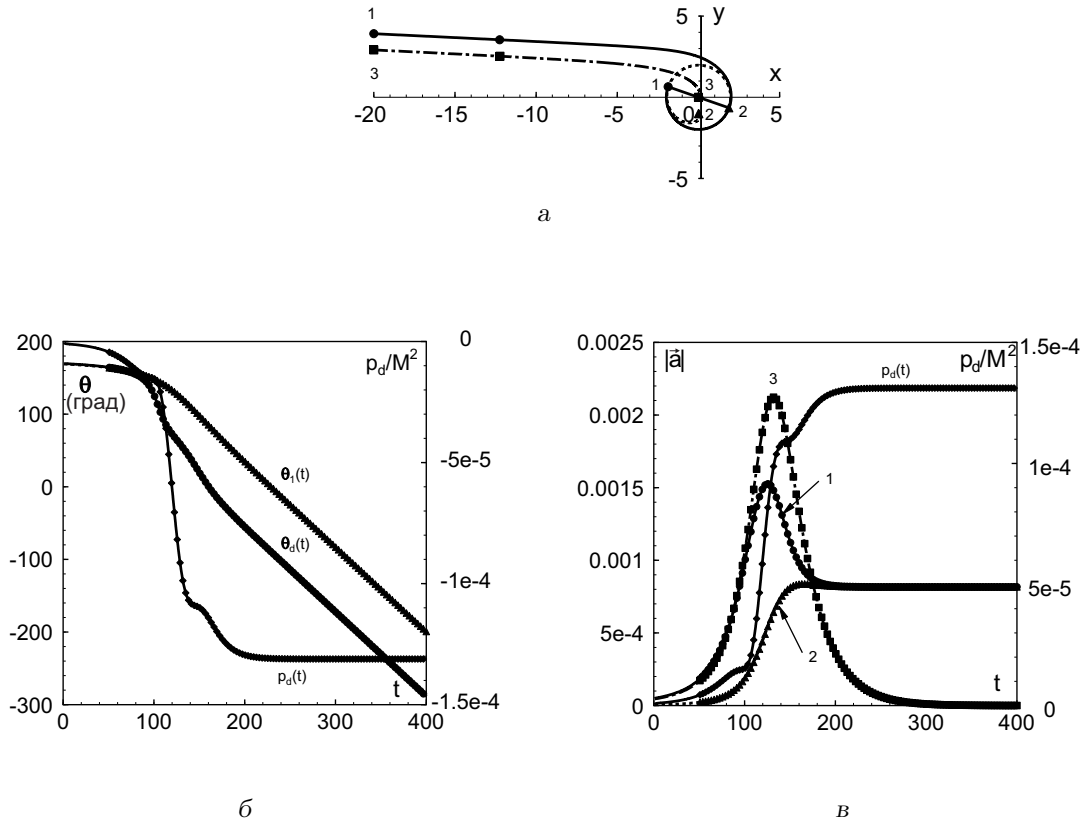


Рис. 14. Поведение системы при $b=3.41 \dots$:

а – траектории вихрей; б – временные зависимости давления на лепестке диаграммы направленности, угла поворота диаграммы направленности, угла поворота вихревой системы; в – временные зависимости модулей ускорения вихрей и давления на лепестке диаграммы направленности

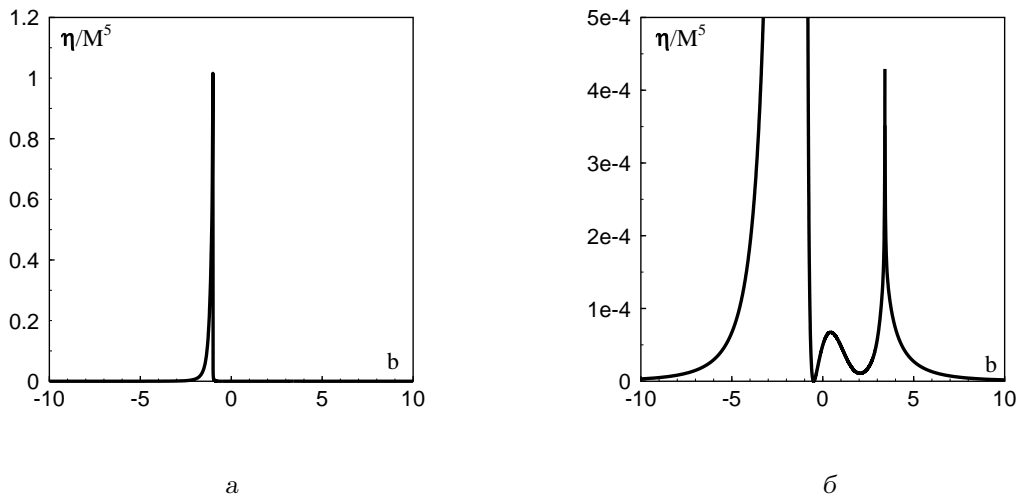


Рис. 15. Зависимость эффективности излучения вихрей от параметра b :

а – общий вид; б – в увеличенном по оси ординат масштабе

лого вокруг центра завихренности. Такие вихревые течения порождают монохроматические источники звука с частотой, равной удвоенной частоте вращения вихрей. При этом диаграмма направленности вращается синхронно с вихревой системой.

- Наличие у вихрей центростремительных ускорений существенно повышает уровень генерируемого звукового поля, по сравнению с вихревыми системами, в которых центростремительные ускорения отсутствуют.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Игорю Владимировичу Вовку за помощь в постановке акустической части задачи и конструктивное обсуждение результатов на этапе расчетов и при написании статьи.

1. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком. – К.: Наук. думка, 2010. – 224 с.
2. Гутин Л. Я. О звуковом поле вращающегося воздушного винта // Избранные труды. – Л.: Судостроение, 1977. – С. 61–71.
3. Гутин Л. Я. О “звуке вращения” воздушного винта. – Избранные труды: Л.: Судостроение, 1977. – 126–134 с.
4. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1952. – A211. – P. 564–587.
5. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1954. – A221. – P. 1–32.
6. Ffowcs Williams J. E. Hydrodynamic Noise // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1969. – 1. – P. 197–222.
7. Crighton D. G. Basic principles of aerodynamic noise generation // Progr. Aerospace Sci. – 1975. – 16, № 1. – P. 31–96.
8. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
9. Крайтон Д. Акустика как ветвь гидродинамики // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. – М.: Мир, 1984. – С. 359–412.
10. Howe M. S. Theory of vortex sound. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – 216 p.
11. Crow S. C. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // Stud. Appl. Math. – 1970. – XLIX, № 1. – P. 21–44.
12. Möhring W. On vortex sound at the low Mach number // J. Fluid Mech. – 1978. – 85, Pt. 4. – P. 685–691.
13. Obermeier F. On a new representation of aeroacoustic source distribution. II. Two-dimensional model flows // Acustica. – 1979. – 42. – P. 62–71.
14. Бэтчелор Дж. Введение в механику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
15. Aref H. Intergable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – 15. – P. 345–389.
16. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наук. думка, 1993. – 279 с.
17. Gröbli W. Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Zurich. – 1877. – 22. – С. 37–81, 129–165.
18. Коновалюк Т. П. Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости // Гидромеханика. – 1990. – 62. – С. 64–71.
19. Powell A. Theory of vortex sound // J. Acoust. Soc. Amer. – 1964. – 36, № 1. – P. 177–195.
20. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Маципура В. Т. Основы акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 640 с.
21. Гряник В. М. Излучение звука линейными вихревыми нитями // Изв. АН СССР. ФАО. – 1983. – 19, № 2. – С. 203–206.
22. Коновалюк Т. П., Мелешко В. В. Излучение звука системой точечных вихрей // Гидромеханика. – 1996. – 70. – С. 41–52.
23. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
24. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
25. Хайпер Э., Нерсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
26. Абрамовиц А., Стиган И. М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1973. – 830 с.
27. Отнес Р., Энноксон А. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. – М.: Мир, 1982. – 537 с.
28. Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe // AIAA J. – 1992. – 30, № 2. – P. 312–317.
29. Mitchell B. E., Lele S. K., Moin P. Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair // J. Fluid Mech. – 1995. – 285. – P. 181–202.