УДК 531.38

©2014. **А.В. Мазнев, Т.В. Белоконь**

ОДИН СЛУЧАЙ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА

Рассмотрена задача о движении симметричного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, моделируемая обобщенными уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. В предположении, что гиростат несет два ротора, исследованы условия существования у уравнений движения трех линейных инвариантных соотношений специального вида и указаны новые решения.

Ключевые слова: *гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.*

Классическая задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, описываемая уравнениями Эйлера–Пуассона, получила обобщения в различных направлениях [1–5]. На практике (в частности, при управлении ориентацией и стабилизации спутника роторами [6]) важным обобщением служит задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом, уравнения которой допускают только два первых интеграла [2, 4]. Эта задача рассматривалась многими авторами [7–12] в предположении, что гиростат несет один вращающийся ротор. В данной работе полагаем, что тело-носитель несет два вращающихся ротора. Исследованы условия существования у уравнений рассматриваемой задачи трех инвариантных соотношений. Получены новые решения уравнений движения, которые имеют свойства, отличные от свойств в случае одного ротора [12].

Постановка задачи. Рассмотрим симметричный гиростат – механическую систему, состоящую из тел S_0, S_1, S_2 [4, 6]. Тело-носитель S_0 имеет неподвижную точку O, а тела S_1, S_2 либо геометрически симметричны (роторы [6]), либо динамически симметричны (моменты инерции относительно экваториальных осей равны [4]) и закреплены в теле S_0 своими осями симметрии. Оси вращения роторов заданы двумя единичными ортогональными векторами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Предполагается, что вектор гиростатического момента имеет вид $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}$. Свойства взаимодействия тел S_0 и S_1, S_2 определены уравнениями относительного движения [4].

Будем рассматривать движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые характеризуются влиянием магнитного и электрического полей на намагниченный и наэлектризованный гиростат [1, 3, 4]

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda})^{\bullet} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, связанный с вектором $\boldsymbol{x}$ соотношением $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$ (a – гирационный тензор), $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата, $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор гиростатического момента, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точкой обозначена производная по времени.

Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})/2 = k, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{2}$$

где k – произвольная постоянная. Поэтому для применения теории Якоби интегрирования уравнений динамики необходимо найти три дополнительных интеграла. Это обстоятельство отличает задачу, описываемую уравнениями (1), (2), от задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае постоянного гиростатического момента, поскольку для нее уравнения движения допускают интеграл энергии, и для интегрирования уравнений в квадратурах достаточно найти один дополнительный интеграл.

Рассмотрим динамически симметричный гиростат: $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_2)$ и предположим, что одна из компонент гиростатического момента направлена по оси симметрии $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$, а вторая компонента перпендикулярна этой оси: $\boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0)$. Также предположим, что центр масс лежит на оси симметрии $\boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0)$, а матрицы B и C имеют вид $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_2)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_2)$. Случай, когда $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, т. е. центр масс гиростата совпадает с неподвижной точкой, не рассматриваем.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярной форме

$$(x_1 + \lambda_1(t))^{\cdot} = a_2\lambda_2(t)x_3 + a_2B_2(\nu_3x_2 - \nu_2x_3), \tag{3}$$

$$\begin{gathered}(x_2 + \lambda_2(t))^{\cdot} = (a_1 - a_2)x_1x_3 - \lambda_1(t)a_2x_3 + a_2B_1\nu_1x_3 - a_1B_2\nu_3x_1 - \\ -s_3\nu_3 + (C_1 - C_2)\nu_1\nu_3,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\dot{x}_3 = (a_2 - a_1)x_1x_2 - a_1\lambda_2(t)x_1 + a_2\lambda_1(t)x_2 + a_1B_2\nu_2x_1 - a_2B_1\nu_1x_2 + \\ +s_1\nu_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2(x_3\nu_2 - x_2\nu_3), \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_2x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}(x_1 + \lambda_1(t))\,\nu_1 + (x_2 + \lambda_2(t))\,\nu_2 + x_3\nu_3 + \frac{1}{2}(B_2 - B_1)\nu_1^2 = k_*, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,\end{gathered} \tag{7}$$

где $k_* = k + \dfrac{1}{2}B_2$.

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3)–(6) трех инвариантных соотношений вида

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1, \qquad x_2 = d_0 + d_2\nu_2, \qquad x_3 = c_0 + c_3\nu_3, \tag{8}$$

где $b_0, b_1, d_0, d_2, c_0, c_3$ – постоянные параметры, подлежащие определению.

Отметим, что из уравнения (3) с учетом (6) при условии $\lambda_2(t) = 0$ вытекает дополнительный интеграл

$$\lambda_1(t) = \alpha_0 - b_0 - (B_2 + b_1)\nu_1, \tag{9}$$

где α_0 – произвольная постоянная. Этот вариант для случая одного ротора рассмотрен в [12]. Для сохранения интеграла (9) в нашей задаче будем в дальнейшем полагать $x_3 = 0$ (т. е. $c_0 = 0, c_3 = 0$), а $\lambda_2(t) \neq 0$. Интеграл (9) является аналогом интеграла Кирхгофа–Харламова [1] на инвариантном множестве $x_3 = 0$.

Предположим, что одна из компонент гиростатического момента постоянна во все время движения, т. е. $\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} = \text{const}$, а

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2^{(0)}\boldsymbol{\beta}. \tag{10}$$

Внесем (8) с учетом $x_3 = 0$ и (10) с (9) в (4), (5). Тогда получим два уравнения вида

$$\begin{aligned}
&\big(C_2 - C_1 + a_1 b_1(d_2 + B_2)\big)\nu_3 + \big(a_1 b_0(d_2 + B_2) + s_1\big)\nu_1\nu_3 = 0,\\
&\alpha_0 a_2 d_0 - a_1 b_0(d_0 + \lambda_2^{(0)}) + \big(a_1 b_1(d_0 + \lambda_2^{(0)}) + a_2 d_0(B_1 + B_2)\big)\nu_1 -\\
&-(\alpha_0 a_2 d_2 + a_1 b_0(B_2 - d_2) + s_1)\,\nu_2 +\\
&+\big(a_1 b_1(B_2 - d_2) - a_2 d_2(B_1 + B_2) + C_2 - C_1\big)\nu_1\nu_2 = 0.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы они выполнялись для любых значений ν_1, ν_2, ν_3. Это приводит к следующим условиям на параметры уравнений (4)–(7) и параметры b_0, b_1, d_0, d_2 инвариантных соотношений (8):

$$\begin{aligned}
&C_2 - C_1 + a_1 b_1(d_2 + B_2) = 0,\\
&a_1 b_0(d_2 + B_2) + s_1 = 0,\\
&\alpha_0 a_2 d_0 - a_1 b_0(d_0 + \lambda_2^{(0)}) = 0,\\
&a_1 b_1(d_0 + \lambda_2^{(0)}) + a_2 d_0(B_1 + B_2) = 0,\\
&\alpha_0 a_2 d_2 + a_1 b_0(B_2 - d_2) + s_1 = 0,\\
&a_1 b_1(B_2 - d_2) - a_2 d_2(B_1 + B_2) + C_2 - C_1 = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (11) являются необходимыми условиями существования решения уравнений (3)–(5) с инвариантными соотношениями

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1, \quad x_2 = d_0 + d_2\nu_2, \quad x_3 = 0 \tag{12}$$

и

$$\lambda_1(t) = \alpha_0 - b_0 - (B_2 + b_1)\nu_1, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2^{(0)}(t) = \text{const}. \tag{13}$$

При наличии соотношений (12), (13) и выполнении условий (11) динамические уравнения (3)–(5) становятся тождествами.

Обратимся теперь к уравнениям (6). Выпишем (6) и (7) с учетом (12) и (13):

$$\begin{aligned} &\dot{\nu}_1 = -a_2(d_0 + d_2\nu_2)\nu_3, \\ &\dot{\nu}_2 = a_1(b_0 + b_1\nu_1)\nu_3, \\ &\dot{\nu}_3 = a_2 d_0\nu_1 - a_1 b_0\nu_2 + (a_2 d_2 - a_1 b_1)\nu_1\nu_2, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\alpha_0\nu_1 + (d_0 + \lambda_2^{(0)})\nu_2 + d_2\nu_2^2 - \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\nu_1^2 = k_*, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{15}$$

Метод исследования условий существования инвариантных соотношений (8) состоит в анализе условий (11) и последующем интегрировании системы (14) при наличии интегралов (15).

Из первого и последнего равенств из (11) вытекает соотношение $d_2\big(a_2(B_1+B_2)-2a_1b_1\big)=0$. Возможны два случая: $d_2=0$ или $a_2(B_1+B_2)-2a_1b_1=0$.

Случай $d_2 = 0$. Из второго уравнения (11) находим

$$b_0 = -\frac{s_1}{a_1 B_2}. \tag{16}$$

Очевидно, что $B_2 \neq 0$, ибо в противном случае из рассмотренного уравнения следовало бы $s_1 = 0$. Первое равенство из (11) позволяет определить параметр b_1:

$$b_1 = \frac{C_1 - C_2}{a_1 B_2}. \tag{17}$$

Два последних соотношения из (11) при (16), (17) обращаются в тождества. Третье соотношение с учетом (16) дает величину параметра d_0

$$d_0 = -\frac{s_1\lambda_2^{(0)}}{\alpha_0 a_2 B_2 + s_1}. \tag{18}$$

Знаменатель в (18) отличен от нуля, так как в противном случае это влекло бы к равенству $s_1 = 0$. Четверое равенство дает ограничения на параметры задачи

$$\alpha_0(C_2 - C_1) + s_1(B_1 + B_2) = 0. \tag{19}$$

Для нахождения решения $\nu_i = \nu_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ обратимся к уравнениям (14). Так как $d_2 = 0$, то система (14) упрощается:

$$\begin{aligned} &\dot{\nu}_1 = -a_2 d_0\nu_3, \\ &\dot{\nu}_2 = a_1(b_0 + b_1\nu_1)\nu_3, \\ &\dot{\nu}_3 = a_2 d_0\nu_1 - a_1(b_0 + b_1\nu_1)\nu_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Система (20) допускает два первых интеграла

$$\alpha_0\nu_1 + (d_0 + \lambda_2^{(0)})\nu_2 - \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\nu_1^2 = k_*, \qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{21}$$

из которых выражаем ν_2, ν_3 через ν_1:

$$\nu_2 = \beta_0^{-1}\varphi_2(\nu_1), \quad \nu_3 = \beta_0^{-1}\sqrt{\varphi_3(\nu_1)}, \quad \beta_0 = 2(d_0 + \lambda_2^{(0)}), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\nu_1) &= (B_1 + B_2)\nu_1^2 - 4\alpha_0\nu_1 + 2k_*, \\ \varphi_3(\nu_1) &= \beta_0^2(1 - \nu_1^2) - \varphi_2^2(\nu_1). \end{aligned} \tag{23}$$

На основании соотношений (22), (23) из первого уравнения системы (20) следует $\dot{\nu}_1 = -a_2 d_0 \beta_0^{-1}\sqrt{\varphi_3(\nu_1)}$. Зависимость $\nu_1 = \nu_1(t)$ определим путем обращения интеграла

$$-\frac{\beta_0}{a_2 d_0}\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{\varphi_3(\nu_1)}} = t - t_0. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует, что $\nu_1 = \nu_1(t)$ – эллиптическая функция времени. Подставив ее в равенства (22), (23), найдем $\nu_2(t), \nu_3(t)$. Это позволяет из (8) получить зависимости $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$, а из соотношений (9), (10) – $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Таким образом, решение уравнений (4)–(7) в случае (8) построено.

Случай $\boldsymbol{a_2(B_1 + B_2) - 2a_1 b_1 = 0}$. Пусть $d_2 \neq 0$. Проводя рассуждения, как в случае $d_2 = 0$, получим следующее решение системы (11):

$$\begin{aligned} &b_0 = -\frac{\alpha_0 a_2}{2a_1}, \quad b_1 = 0, \quad d_0 = \lambda_2^{(0)}, \quad d_2 = -B_2 - \frac{2s_1}{\alpha_0 a_2}, \\ &C_2 - C_1 = 0, \qquad B_1 + B_2 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнения (14) примут вид

$$\begin{gathered} \dot{\nu}_1 = -a_2(d_0 + d_2\nu_2)\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = a_1 b_0 \nu_3, \\ \dot{\nu}_3 = a_2 d_0 \nu_1 - a_1 b_0 \nu_2 + a_2 d_2 \nu_1 \nu_2. \end{gathered} \tag{26}$$

Система (26) допускает два первых интеграла

$$\alpha_0\nu_1 + 2d_0\nu_2 + d_2\nu_2^2 - \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\nu_1^2 = k_*, \qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{27}$$

Из интегралов (27) получим

$$\nu_1 = \alpha_0^{-1}\varphi_1(\nu_2), \qquad \nu_3 = \alpha_0^{-1}\sqrt{\varphi_3(\nu_2)}, \tag{28}$$

$$\varphi_1(\nu_2) = -d_2\nu_2^2 - 4d_0\nu_2 + k_*, \quad \varphi_3(\nu_2) = \alpha_0^2(1 - \nu_2^2) - \varphi_1^2(\nu_2). \tag{29}$$

Из второго уравнения системы (26) следует, что $\dot{\nu}_2 = a_1 b_0 \alpha_0^{-1} \sqrt{\varphi_3(\nu_2)}$. Зависимость $\nu_2 = \nu_2(t)$ определим путем обращения интеграла

$$\frac{\alpha_0}{a_1 b_0} \int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_2}{\sqrt{\varphi_3(\nu_2)}} = t - t_0. \tag{30}$$

Из равенства (30) следует, что $\nu_2 = \nu_2(t)$ является эллиптической функцией времени. С ее помощью из (28), (29) определяем $\nu_1(t), \nu_3(t)$, а затем из (8) находим $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$. Как и ранее, гиростатический момент находим из соотношений (9), (10).

Вывод. В статье установлены условия существования у уравнений (3)–(6) движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с переменным гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2^{(0)}\boldsymbol{\beta}$ трех линейных инвариантных соотношений. Получено два новых решения уравнений движения гиростата, которые выражаются посредством эллиптических функций времени.

1. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Ж. прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5.– P. 747-754.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
6. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 83–96.
7. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч.: М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31-152.
8. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
9. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
10. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
11. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
12. *Мазнев А.В.* Об одном классе трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Прикл. математика и механика. – 2013. – **77**, вып. 2. – С. 263–269.
13. *Горр Г.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента //Динамические системы. – Таврический нац. ун-т им. В.И. Вернадского. – 2012. – **2(30)**, № 1–2. – С. 23–32.

O.V. Maznyev, T.V. Belokon

The case of three invariant relations in the of problem motion symmetric gyrostatic

The problem of motion of an symmetric gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces, modeled by the generalized equations of Kirchhoff–Poisson class, is examined. Conditions of the existence of three special kind invariant relations of the equations of motion are investigated, assuming that gyrostat has two rotors. New solutions of equations of Kirchhoff–Poisson are constructed.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation.*

О.В. Мазнєв, Т.В. Білоконь

Один випадок трьох інваріантних співвідношень у задачі про рух неавтономного симетричного гіростата

Розглянуто задачу про рух симетричного гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил, що моделюється узагальненими рівняннями класу Кірхгофа–Пуассона. У припущенні, що гіростат несе два ротора, досліджено умови існування у рівнянь руху трьох інваріантних співвідношень спеціального виду. Побудовано нові розв'язки рівнянь Кірхгофа–Пуассона.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.*

Донецкий национальный ун-т
Получено 04.02.14
maznev_av@rambler.ru