УДК 519.854.2

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ДОПУСТИМОГО РАСПИСАНИЯ С МАКСИМАЛЬНО ПОЗДНИМ МОМЕНТОМ ЗАПУСКА И МИНИМАЛЬНЫМ СУММАРНЫМ ОПЕРЕЖЕНИЕМ

М.З. ЗГУРОВСКИЙ, А.А. ПАВЛОВ, Е.А. ХАЛУС

Рассмотрена задача составления расписания выполнения одним прибором независимых работ с различными длительностями и директивными сроками по критериям максимизации момента запуска работ и минимизации суммарного опережения, в котором все работы не запаздывают. Для установленного момента запуска представлен алгоритм построения допустимого расписания с минимальным суммарным опережением. Приведено доказательство того, что задача построения допустимого расписания оптимального одновременно по критериям максимизации момента запуска и минимизации суммарного опережения работ, заданных в лексикографическом порядке является *P*-разрешимой. Предложен точный полиномиальный алгоритм определения допустимого расписания, оптимального по критерию минимизации суммарного опережения для заданного момента запуска в системе, состоящей из множества независимых работ, выполняемых одним прибором.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия со стороны многих исследователей уделяется существенное внимание постановкам и методам решения задач оперативно-календарного планирования в сложных системах. Увеличение этого интереса является естественным, так как эффективное решение задач календарного планирования обеспечивает увеличение продуктивности, уровня обслуживания и гибкости, а также уменьшение затрат.

В теории расписаний особое место занимают задачи с одним прибором. Результаты, получаемые при исследовании таких задач, могут быть использованы для построения алгоритмов решения сложных задач со многими приборами и многостадийных задач, возникающих на практике. Классические задачи теории расписаний с одним прибором являются схематичными теоретическими моделями многих задач, встречающихся на практике. Исследование таких задач помогает изучить фундаментальные свойства и структуру практических задач, что способствует построению эффективных алгоритмов их решения.

Простейшие одномашинные среды важны по нескольким причинам. Во-первых, такая среда является частным случаем всех сред. Модели на одном приборе часто имеют свойства, которых нет ни у элементарных сред, состоящих из параллельных машин, ни у многостадийных конвейерных сред. Результаты, полученные для одного прибора, могут служить мощными эвристиками для построения расписаний в более сложных машинных средах. Также на практике задачи операционного планирования в более сложных машинных средах часто могут декомпозироваться на подзадачи, каждая из которых моделируется одним прибором.

Рассматриваемые задачи оптимизации отражают требования к планированию в современных рыночных условиях, для них не были известны точные эффективные методы решения.

Цель работы:

исследовать свойства следующих задач: задачи построения допустимого расписания с максимально поздним моментом запуска; задачи построения расписания с минимальным суммарным опережением для заданного момента запуска;

разработать алгоритмы их решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задано множество независимых работ $J = \{1, 2, ..., n\}$, каждая из которых состоит из одной операции. Для работы $j \in J$ известны длительность выполнения p_j и директивный срок выполнения d_j. Работы поступают в систему одновременно. Прерывания выполнения работ не допускаются. Процесс выполнения работ является непрерывным: после выполнения первой по порядку работы сразу же начинает выполняться вторая и так до тех пор, пока не будут выполнены все работы. Необходимо найти допустимое расписание, в котором:

момент начала выполнения работ (r) является максимально поздним;

суммарное опережение моментов окончания работ относительно директивных сроков принимает минимальное значение.

Определение 1. Расписание называется *допустимым*, если в нем удовлетворены все директивные сроки (все задания не запаздывают).

Определение 2. Для заданного расписания под *моментом запуска* понимается момент начала выполнения работы, которая в расписании стоит на первой позиции.

Теорема 1. Пусть для некоторого момента запуска существует допустимая последовательность выполнения работ $\sigma = \{j_1, j_2, ... j_n\}$, где j_i обозначает работу на позиции i в текущей последовательности. Тогда последовательность работ, упорядоченная по неубыванию значений директивных сроков, также допустима [1].

Следствие 1.1. Если расписание с нулевым моментом запуска, упорядоченное по неубыванию директивных сроков, является недопустимым, то допустимого расписания не существует [1].

В работе [2] получены новые логико-аналитические условия реализации полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма решения задачи по критерию минимизации суммарного запаздывания для одного прибора.

Теорема 2. Если расписание с нулевым моментом запуска, упорядоченное по неубыванию директивных сроков, является допустимым, то оно оптимально, в противном случае в оптимальном расписании суммарное запаздывание будет строго больше нуля [2].

В работе [1] был разработан алгоритм **A** определения самого позднего момента запуска выполнения работ в системе $n/1/r \to \max$, при котором расписание остается допустимым. Суть алгоритма состоит в следующем. Вначале работы упорядочиваются по неубыванию директивных сроков, затем определяется момент запуска выполнения работ, при котором в расписании хотя бы одна работа будет запаздывающей. Определяется максимальное из запаздываний и вся последовательность работ сдвигается влево на эту величину.

Теорема 3. Алгоритм А строит допустимое расписание, в котором момент r начала выполнения работ (момент запуска) является самым поздним [1].

Теорема 4. Допустимое расписание с моментом запуска $r_{\max}$, построенное по неубыванию директивных сроков, является оптимальным по критерию минимизации суммарного опережения при выполнении условий:

$$d_{j_1} \le d_{j_2} \le \ldots \le d_{j_n}, \quad p_{j_1} \ge p_{j_2} \ge \ldots \ge p_{j_n}, \tag{1}$$

где j_i — это номер задания, которое в допустимом расписании занимает i-ю позицию [1].

Система условий (1) является достаточным условием оптимальности по двум критериям.

В случае, когда расписание σ не удовлетворяет условию (1), то его оптимальность по критерию минимизации суммарного опережения не гарантирована.

Пусть расписание σ не удовлетворяет условиям (1), тогда для этой задачи может существовать другое допустимое расписание, в котором момент запуска заданий также является максимально поздним, но у которого суммарное опережение меньше. Поставим задачу: для установленного момента запуска $r_{\max}$ построить допустимое расписание с минимальным суммарным опережением.

Имеет место лемма 1.

Лемма 1. Пусть σ — допустимое расписание выполнения n работ с максимально поздним моментом запуска. Тогда существует и допустимое расписание с работой K в последней позиции, которое сохраняет момент запуска работ максимально поздним и одновременно минимизирует суммарное опережение работ и удовлетворяет условию:

а) работа K выполняется последней, если это не нарушает допустимость расписания (не приводит к запаздыванию работ): $d_K \ge \sum_{j=1}^{n} p_j + r_{\max}$;

б) при этом длительность работы K минимальна среди всех работ, выполнение которых в последнюю очередь не приводит к запаздыванию: $p_K = \min\limits_{s \,/\, d_s \ge \sum_{j=1}^{n} p_j + r_{\max}} \{p_s\}$.

Доказательство. Рассмотрим расписание σ, со следующими свойствами:

расписание является допустимым (все работы не запаздывают);

момент запуска работ является максимально поздним;

работа K, которая выполняется последней, удовлетворяет условиям а) и б) леммы.

Покажем, что какое-либо перемещение работы K с последнего места приведет к запаздыванию и/или к увеличению суммарного опережения (если работа K единственная).

Примечание. Если существует более одной работы, которые удовлетворяют одновременно условиям а) и б) леммы (например, существует работа J с длительностью $p_J = p_K$), то их перестановка местами не изменит суммарного опережения работ.

Пусть работа J удовлетворяет условию а) и не удовлетворяет условию б), то есть $p_J > p_K$. Покажем, что перестановка J с K (рисунок) приведет к увеличению суммарного опережения работ.

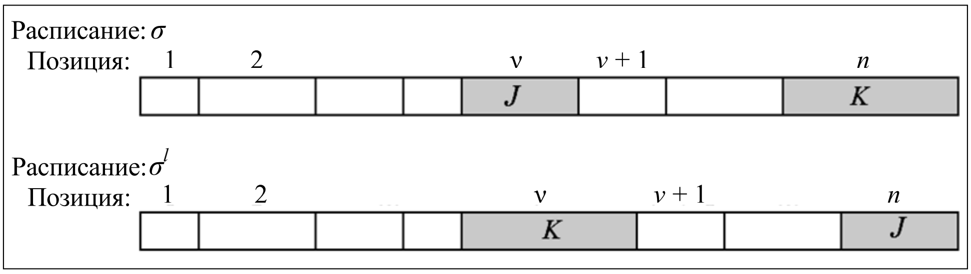

Рисунок. Расписания σ и $\sigma^{/}$

Пусть работа J стоит в расписании σ на позиции ν $(1 \le \nu < n)$. После смены местами работ J и K — получим расписание $\sigma^{/}$. Моменты завершения работ, которые стоят на позициях $1, 2, ..., \nu - 1$ в этих расписаниях совпадают, а моменты окончания работ, которые в этих расписаниях стоят на позициях $\nu,\ \nu+1,\ ...,n-1,$ отличаются.

Введем обозначения.

Общие величины для расписаний σ и $\sigma^{/}$: $b = \sum_{i=\nu+1}^{n-1} p_{j_i}$ — суммарная длительность работ, которые в расписаниях σ и $\sigma^{/}$ стоят между работами J и K (то есть на позициях $\nu+1, \nu+2, ..., n-1$), где p_{j_i} — длительность работы, которая в расписании стоит в позиции i; $g = \sum_{i=1}^{\nu-1} p_{j_i}$ — суммарная длительность работ, которые в расписаниях σ и $\sigma^{/}$ стоят на позициях $1, 2, ..., \nu - 1$; $f = C_{j_n}(\sigma) = C_{j_n}(\sigma^{/})$ — момент окончания работы, которая стоит на позиции n (в расписаниях σ и $\sigma^{/}$ — это работы K и J соответственно).

Расписание σ:

$E_i(\sigma)$ — опережение работы i в расписании σ;

$E(\sigma)$ — суммарное опережение работ в расписании σ;

$E_{j_n}(\sigma) = E_K(\sigma) = d_K - f$;

$E_{j_\nu}(\sigma) = E_J(\sigma) = d_J - (g + p_J)$.

Расписание $\sigma^/$:

$E_i(\sigma^/)$ — опережение работы i в расписании $\sigma^/$;

$E(\sigma^/)$ — суммарное опережение работ в расписании $\sigma^/$;

$E_{j_i}(\sigma^/) = E_{j_i}(\sigma)$, $i = 1,2, ..., \nu - 1$;

$E_{j_i}(\sigma^/) = E_{j_i}(\sigma) + (p_J - p_K)$, $i = \nu + 1, \ldots, n - 1$;

$E_{j_n}(\sigma^/) = E_J(\sigma^/) = d_K - f$;

$E_{j_\nu}(\sigma^/) = E_K(\sigma^/) = d_K - (g + p_K)$.

Определим разность суммарных опережений работ в расписаниях $\sigma^/$ и σ:

$$E(\sigma^/) - E(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} E_{j_i}(\sigma^/) - \sum_{i=1}^{n} E_{j_i}(\sigma) = \sum_{i=\nu}^{n} E_{j_i}(\sigma^/) - \sum_{i=\nu}^{n} E_{j_i}(\sigma) =$$

$$= E_K(\sigma^/) - E_J(\sigma) + \sum_{i=\nu+1}^{n-1} E_{j_i}(\sigma^/) - \sum_{i=\nu+1}^{n-1} E_{j_i}(\sigma) + E_J(\sigma^/) - E_K(\sigma) =$$

$$= d_K - g - p_K - d_J + g + p_J + (n - \nu - 1)(p_J - p_K) + d_J - f - d_K + f =$$

$$= (n - \nu)(p_J - p_K).$$

То есть, перестановка местами работ J и K приводит к увеличению суммарного опережения на величину $(n - \nu)(p_J - p_K)$. Таким образом, на последнее место нужно ставить работу с минимальной длительностью, при условии, что это не нарушает допустимости расписания. ■

Теорема 5. Пусть σ — допустимое расписание выполнения n работ с максимально поздним моментом запуска $r_{\max}$, тогда допустимое расписание $\sigma_1 = \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ (j_i — это номер работы, которая в σ_1 занимает i-ю позицию) построенное по правилу:

$$p_{j_n} = \min_{s \,/\, d_s \geq \sum_{j=1}^{n} p_j + r_{\max}} \{p_s\}, \tag{2}$$

$$p_{j_i} = \min_{s \,/\, d_s \geq \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{l=0}^{n-i-1} p_{j_{n-l}} + r_{\max}} \{p_s\}, \; i = \overline{n-1,1} \tag{3}$$

является оптимальным по критерию минимизации суммарного опережения работ с максимально поздним моментом запуска $r_{\max}$.

Доказательство теоремы следует из леммы 1. Действительно, из леммы 1 и аддитивности функционала минимизации суммарного опережения следует выполнение принципа оптимальности Беллмана: любая начальная часть допустимого расписания, оптимального по минимуму суммарного опережения, также является оптимальной по этому критерию.

Согласно с рекуррентными соотношениями (2)–(3) окончательный вид допустимого расписания σ_1, в котором достигает минимума суммарное опережение с сохранением максимально позднего момента запуска, находится рекуррентно путем выбора последней, предпоследней и последующих других работ. Другими словами, допустимое расписание σ_1 строится по расписанию σ последовательно, начиная с определения последней работы и заканчивающегося определением первой работой и всегда реализуется, поскольку σ — допустимое расписание. При этом, в сравнении с расписанием σ, работы в расписании σ_1 либо остаются на своих местах либо смещаются (более короткие — влево, более длинные — вправо) не нарушая своего директивного срока. ■

Теорема 6. Задача построения допустимого расписания, оптимального одновременно по критериям максимизации момента запуска и минимизации суммарного опережения работ, заданных в лексикографическом порядке, является *P*-разрешимой.

Доказательство. Как следует из теоремы 5, расписание σ_1 является допустимым и оптимальным по двум критериям, заданным в лексикографическом порядке.

Доказательство теоремы базируется на двух фактах. Во-первых, согласно теореме 5, расписание σ_1, строится на основе расписания σ. Рекуррентная процедура (2)–(3) построения расписания σ_1 по расписанию σ является полиномиальной по сложности вычислений. Во-вторых, алгоритм **А** построения расписания σ также является полиномиальным по сложности. Следовательно, задача построения допустимого расписания оптимального одновременно по критериям максимизации момента запуска и минимизации суммарного опережения работ в лексикографическом порядке является *P*-разрешимой. ■

Следствие 5.1. Для любого заданного момента запуска $\forall r < r_{\max}$ расписание, построенное в соответствии с рекуррентными соотношениями (2)–(3), имеет минимальное суммарное опережение для данного r.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ СУММАРНОГО ОПЕРЕЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАННОГО МОМЕНТА ЗАПУСКА. АЛГОРИТМ А1

Алгоритм построения оптимального расписания по критерию суммарного опережения с моментом запуска r работ имеет следующую схему.

Шаг 1. Из совокупности работ, для которых директивные сроки больше либо равны моменту окончания всех работ, выбрать работу с наименьшей длительностью и поставить эту работу на последнее место:

$$p_{j_n} = \min_{s \,/\, d_s \ge \sum_{j=1}^{n} p_j + r} \{p_s\}. \tag{4}$$

Примечание. Если таких работ несколько, то выбор среди них осуществляется произвольно.

Шаг 2. Перейти к позиции $i = n-1$.

Шаг 3. Определить работу, которая будет выполняться на позиции i.

3.1. Найти момент окончания работы j_i (которая в расписании будет занимать i-ю позицию):

$$C_{j_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{l=0}^{n-i-1} p_{j_{n-l}} + r. \tag{5}$$

3.2. Из совокупности работ, для которых директивные сроки не меньше момента окончания C_{j_i}, выбрать работу с минимальной длительностью:

$$p_{j_i} = \min_{s \,/\, d_s \ge \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{l=0}^{n-i-1} p_{j_{n-l}} + r} \{p_s\}. \tag{6}$$

3.3. Разместить работу j_i на позицию i.

Шаг 4. Перейти к следующей позиции: $i = i-1$, ЕСЛИ $i = 0$, то КОНЕЦ, ИНАЧЕ — перейти к ШАГУ 3.

Если необходимо построить расписание, оптимальное по критерию 2 для максимально позднего момента запуска $r_{\max}$, то это достигается заменой величины r на $r_{\max}$ в соотношениях (4) и (5).

Следующий пример иллюстрирует процесс построения расписания, оптимального по двум критериям.

Пример 1. Дано: $n = 6$;

$$p_1 = 99;\ p_2 = 28;\ p_3 = 62;\ p_4 = 98;\ p_5 = 45;\ p_6 = 74;$$

$$d_1 = 240;\ d_2 = 260;\ d_3 = 249;\ d_4 = 514;\ d_5 = 481;\ d_6 = 449.$$

В соответствии с алгоритмом **А** найдено расписание σ с максимально возможным моментом запуска $r_{\max} = 71$, которое представлено в табл. 1.

Таблица 1. Расписание σ с максимально возможным моментом запуска $r_{\max} = 71$

Порядковый номер в расписании	**Номер работы,** j	**Длительность,** p_j	**Директивный срок,** d_j	**Момент окончания,** C_j	**Опережение,** E_j
1	1	99	240	170	70
2	3	62	249	232	17
3	2	28	260	260	0
4	6	74	449	334	115
5	5	45	481	379	102
6	4	98	514	477	37
					$E(\sigma) = 341$

Суммарное опережение при максимально возможном моменте запуска $E(\sigma) = 341$.

Выберем из совокупности работ, для которых директивные сроки больше либо равны моменту окончания всех работ, работу с наименьшей длительностью и поставим на последнее место:

$$p_{j6} = \min_{s \,/\, d_s \geq \sum_{i=1}^{6} p_i + r_{\max}} \{p_s\} = \min_{s \,/\, d_s \geq 477} \{p_s\} = \min\{p_4; p_5\} = 45.$$

Директивный срок не меньше, чем 477, имеют работы 4 и 5, но так как у работы 5 меньше длительность выполнения $(p_5 = 45 < p_4 = 98)$, то на последнее место назначается работа 5. В результате получаем такую заключительную последовательность оптимального расписания, как это показано в табл. 2.

Таблица 2. Заключительная последовательность оптимального расписания (работа 5 на последнем месте)

Порядковый номер в расписании	**Номер работы,** j	**Длительность работы,** p_j	**Директивный срок,** d_j	**Момент окончания работы,** C_j	**Опережение работы,** E_j
1					
2					
3					
4					
5				432	
6	5	45	481	477	4

Найдем момент окончания предпоследней работы:

$$C_{j5} = \sum_{j=1}^{6} p_j - p_{j6} + r_{\max} = 406 - 45 + 71 = 432.$$

Из совокупности оставшихся работ, для которых директивные сроки не меньше момента окончания C_{j5}, выберем работу с минимальной длительностью.

$$p_{j5} = \min_{s \,/\, d_s \geq \sum_{j=1}^{6} p_j - p_{j6} + r_{\max}} \{p_s\} = \min_{s/d_s \geq 432} \{p_s\} = \min\{p_4; p_6\} = 74.$$

На предпоследнее место назначается работа 6 и в результате получаем такую заключительную последовательность оптимального расписания, как это показано в табл. 3.

Таблица 3. Заключительная последовательность оптимального расписания (на предпоследнем месте работа 6)

Порядковый номер в расписании	**Номер работы,** j	**Длительность,** p_j	**Директивный срок,** d_j	**Момент окончания,** C_j	**Опережение,** E_j
1					
2					
3					
4				358	
5	6	74	449	432	17
6	5	45	481	477	4

В соответствии с алгоритмом А1 дальнейших изменений в расположении работ 1, 2, 3 и 4 не будет. Таким образом, получили оптимальное расписание σ^{opt} с максимально возможным моментом запуска $r_{\max} = 71$ и минимальным суммарным опережением $E(\sigma^{\text{opt}}) = 264$ (табл. 4).

Задача решена.

Таблица 4. Расписание, оптимальное по критерию минимизации суммарного опережения при $r_{\max}$

Порядковый номер в расписании	**Номер работы,** j	**Длительность,** p_j	**Директивный срок,** d_j	**Момент окончания,** C_j	**Опережение,** E_j
1	1	99	240	170	70
2	3	62	249	232	17
3	2	28	260	260	0
4	4	98	514	358	156
5	6	74	449	432	17
6	5	45	481	477	4
				$E(\sigma^{\text{opt}}) = 264$	

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача теории расписаний выполнения независимых работ с различными длительностями и различными директивными сроками одним прибором, в котором момент запуска работ является максимально поздним и достигает минимума суммарное опережение работ. Доказано, что задача построения допустимого расписания оптимального одновременно по критериям максимизации момента запуска и минимизации суммарного опережения работ, заданных в лексикографическом порядке является *P*-разрешимой. Разработан точный полиномиальный алгоритм определения допустимого расписания, оптимального по критерию минимизации суммарного опережения для заданного момента запуска в системе $n/1$.

ЛИТЕРАТУРА

Павлов А.А., Мисюра Е.Б., Халус О.А. Исследование свойств задачи календарного планирования для одного прибора по критерию минимизации суммарного опережения заданий при условии допустимости расписании // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка» — 2012. — № 56. — С. 98–102.

Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: монография. — К.: Наук. думка, 2010. — 573 с.

Поступила 19.12.2014