

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ДАТЧИКАМ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ. Сообщение 2*

А. Я. НЕДОСЕКА, С. А. НЕДОСЕКА

ИЭС им. Е.О. Патона НАНУ. 03680, г. Киев-150, ул. Боженко, 11. E-mail: office@paton.kiev.ua

Рассмотрены колебания лежащих на упругой основе тонких пластинок ограниченных размеров при сосредоточенном центральном ударе по их поверхности. Принято во внимание, что сопротивление упругой основы зависит от скорости перемещения пластинки в направлении координаты z . Такое влияние способствует затуханию колебаний и может регулироваться в широких пределах в зависимости от свойств клеящего состава. Библиогр. 8, рис. 8.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, системы акустической эмиссии, колебания тонкой пластинки, метод интегральных преобразований

В настоящей работе авторы продолжили использовать метод интегральных преобразований для решения задачи колебаний тонкой пластинки при различных условиях закрепления и наличия сопротивления упругой подложки ее колебаниям. Эта задача важна для разработчиков акустических датчиков, а в нашем случае – датчиков акустической эмиссии (АЭ). Метод интегральных преобразований можно отнести к математическому моделированию, когда законы протекания физических процессов при колебаниях могут быть представлены рядом математических операторов, а главное, весь процесс колебаний может быть расчленен на элементарные составляющие с сохранением физического смысла каждого такого элемента. Произведя далее все необходимые действия по расчету и согласованию параметров, характеризующих явление, можно приступить к сборке элементарных составляющих и анализировать явление уже в целом в замкнутом виде. Используя этот метод, нам удалось решить ряд сложных задач, не поддававшихся решению обычными прямыми методами. Удалось вскрыть и проанализировать ранее завуалированные процессы, протекающие в материалах при их возбуждении.

Математическое моделирование является достаточно сложной задачей анализа физических процессов математическими методами. Особенность моделирования заключается в наиболее удачном и близком к реальным условиям выборе основных исходных данных, выборе модели, описывающей процесс, и как можно более точном представлении граничных и начальных условий задачи. Наиболее перспективным, имеющим достаточную гибкость методом решения таких задач в настоящее время и является метод интегральных преобразований.

Ниже представлена технология применения этого метода для задач колебания тонких пластинок, применяемых в АЭ датчиках.

Известно, что одним из самых важных элементов систем АЭ являются датчики, воспринимающие колебания элементов контролируемой конструкции, преобразующие эту информацию в электрические сигналы и передающие их далее в прибор для последующей обработки. Главным элементом АЭ датчика является жесткая пластинка – генератор акустических сигналов (рис. 1). От рода сигналов, генерируемых этой пластинкой, существенно зависит сложность программного обеспечения аппаратуры АЭ и быстродействие ее работы в режиме регистрации сигналов и оценки состояния контролируемой конструкции. Немаловажно также знать, какую информацию будет передавать пластинка, работая в качестве генератора сигналов в режиме сканирования деформирующегося материала конструкции. Полагаем, что существенную роль в этом процессе играет способ закрепления пластинки в датчике, ее размеры и расположение [1–5]. Последнее приводит к появлению и других типов колебаний, таких как продольные и поперечные колебания массы пластинки, приводящие к изменению ее толщины. В данной работе мы рассмотрим колебания только изгибного типа тонких пластинок с отношением диаметра к толщине 10 и более.

Ранее [6] мы анализировали колебания пластинок ограниченного диаметра в предположении отсутствия затухания колебаний с течением времени. Однако в действительности силы крепления пластинки к основанию датчика имеют способностью «гасить» колебания с течением времени за счет рассеяния энергии, приводящей к возникновению колебательного процесса в кле-

* Сообщение 1 см. в журнале «Техническая диагностика и неразрушающий контроль». – 2015. – №1. – С. 17–22.

евом промежуточном слое. Этот процесс может быть описан динамическим коэффициентом затухания k_d , кгс/см³. В этом случае дифференциальное уравнение колебаний пластинки при различных заданных граничных и начальных условиях может быть записано [1] в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{k_d}{D} \frac{\partial w}{\partial t} + \beta^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{Q}{2\pi D r} \delta(r) \delta(t), \quad (1)$$

где w – прогиб пластины в направлении оси z , см; r – радиус вдоль поверхности пластины, см; t – текущее время, с; $D = E\delta^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, кг·см; ν – коэффициент Пуассона; δ – толщина пластинки, см; Q – импульсно приложенная в центре пластинки сила, кгс; $\delta(r)$ и

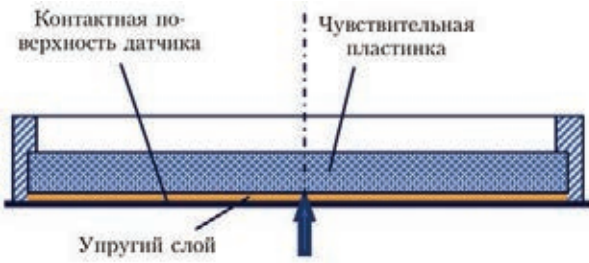


Рис. 1. Наклеенная и защемленная по контуру пластинка в корпусе АЭ датчика (схема)

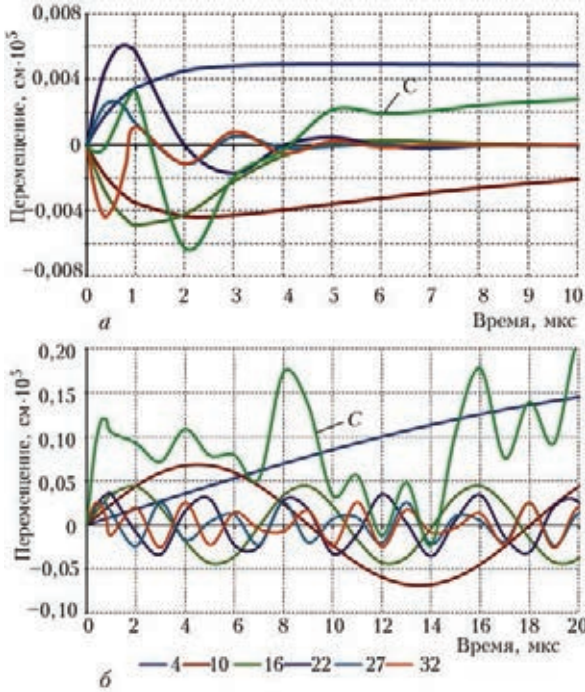


Рис. 2. Затухающие (а) и незатухающие (б) колебания защемленной по контуру пластинки толщиной 1 мм и диаметром 11 мм в зависимости от времени. Представлены суммарные колебания C по выделенным волновым числам и колебания по элементарным волновым числам, показанными под графиком

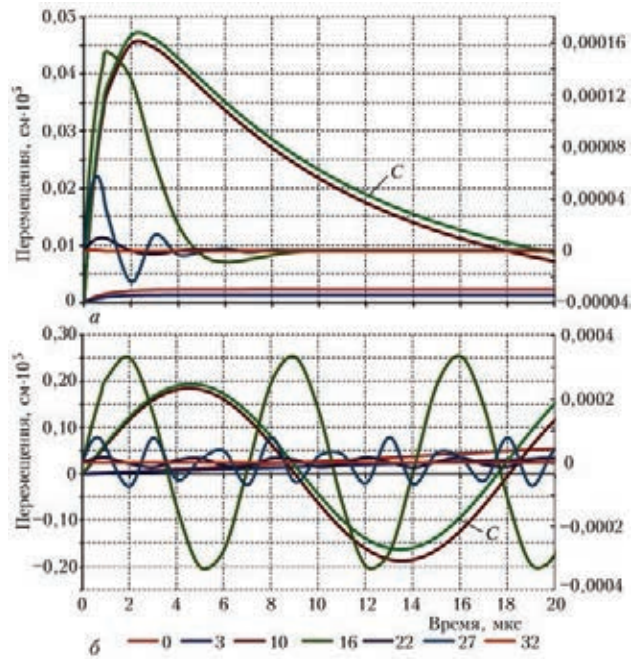
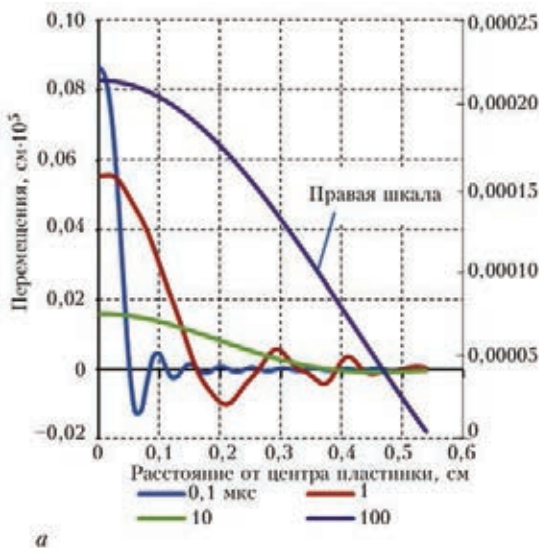


Рис. 4. Затухание колебаний приклеенной свободной пластинки толщиной 1 мм и диаметром 11 мм в зависимости от времени (а) и колебания без затухания (б). Представлено суммарное колебание C по выделенным волновым числам и колебания по элементарным волновым числам, показанными под графиком. Правая шкала построена для значений $\alpha_n = 16; 22; 27; 32$ см⁻¹

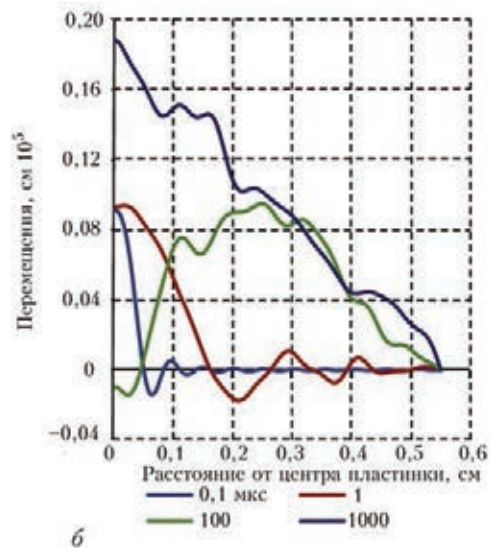


Рис. 3. Распределение вдоль радиуса затухающих колебаний защемленной и приклеенной пластинки толщиной 1 мм диаметром 11 мм (а) и такой же пластинки без затухания (б)



$\delta(t)$ – импульсные функции Дирака, характеризующие сосредоточенность и мгновенность приложения нагрузки Q .

Проведя интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля дифференциального уравнения (1), получим:

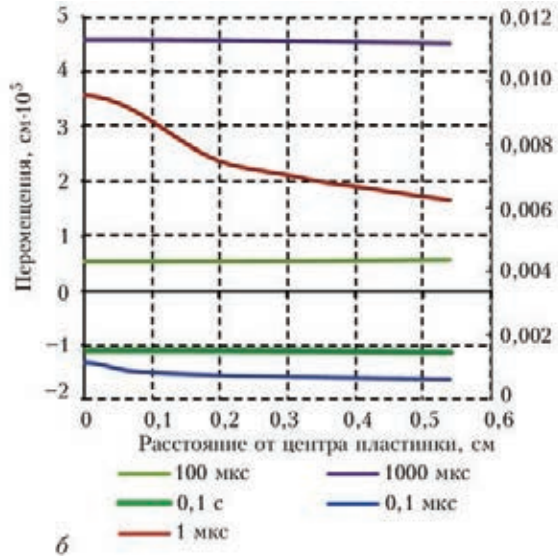
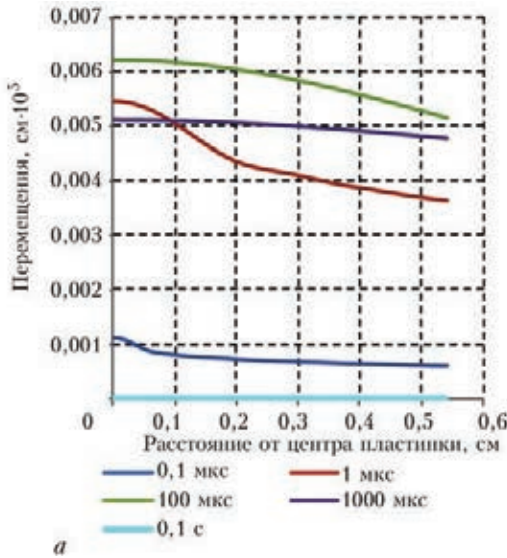


Рис. 5. Колебания пластинок, приклеенных к контактной поверхности датчика АЭ и свободных от краевого закрепления: а – с затуханием колебаний; б – без затуханий (правая шкала для времени 0,1 и 1 мкс)

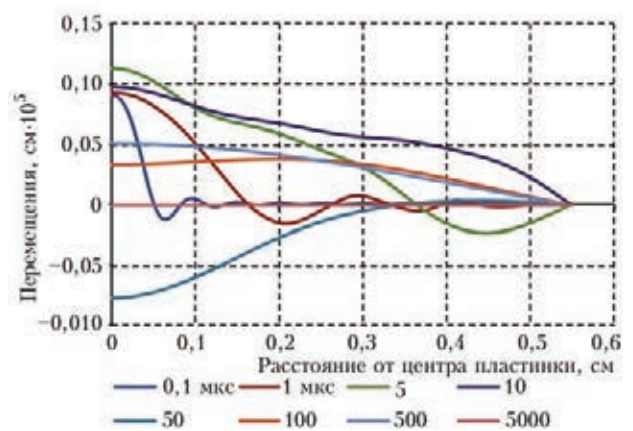
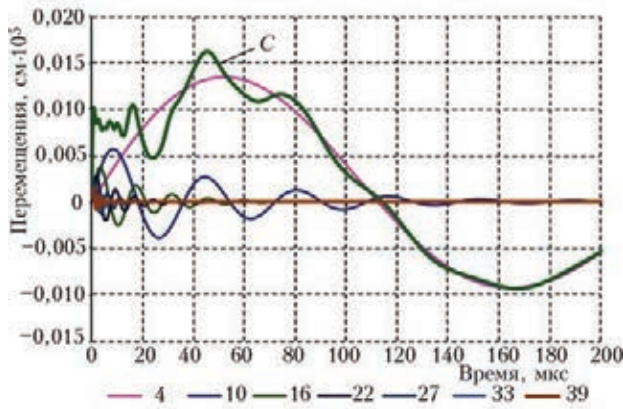


Рис. 6. Колебания заземленной и приклеенной пластинки в точке $r = 0$ в зависимости от волнового числа α_n и времени; C – суммарное значение амплитуды колебаний для волновых чисел, представленных под графиком

Рис. 7. Колебания круглой наклеенной пластинки с заземленным контуром с зависящим от волнового числа коэффициентом затухания (диаметр пластинки 11 мм, толщина 1 мм)

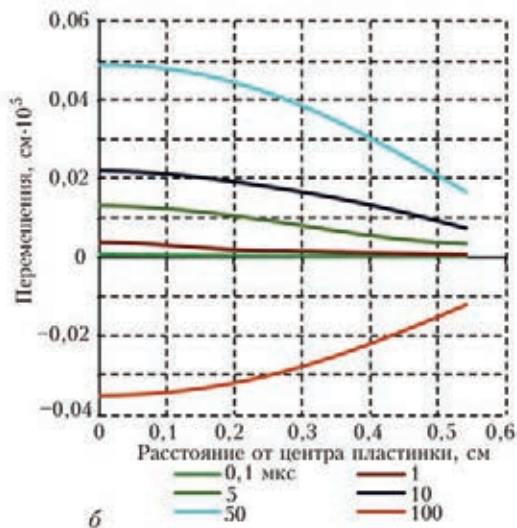
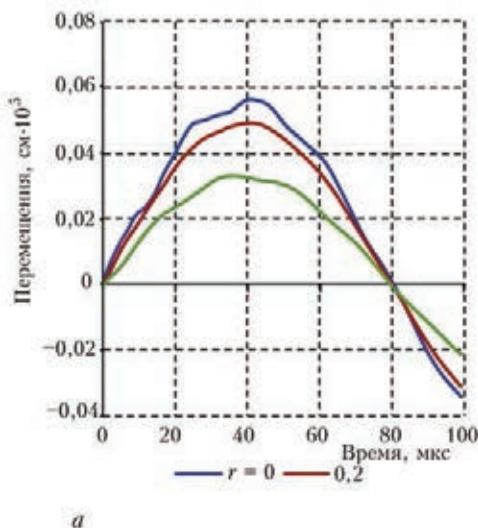


Рис. 8. Колебания круглой наклеенной пластинки со свободным контуром с зависящим от волнового числа коэффициентом затухания (диаметр пластинки 11 мм, толщина 1 мм) в зависимости от времени (а) и расстояния от центра пластинки (б)



$$\left(\alpha^4 + \frac{k_{\perp}}{D} p + \beta^4 p^2 \right) \Big|_{w = \frac{Q}{2\pi D}} = \frac{Q}{2\pi D} \cdot \frac{1}{\alpha^4 + \frac{k_{\perp}}{D} p + \beta^4 p^2}$$

Рассмотрим два случая крепления пластинки в корпусе АЭ датчика на клеевой основе с заземленным контуром и пластинки, приклеенной к основе со свободным контуром, и случай 3, когда реакция упругой подложки зависит от частоты колебаний пластинки.

Случай 1. В этом случае с учетом [6] граничные и начальные условия могут быть записаны в виде:

$$w = 0, \partial w / \partial r \neq 0 \text{ при } r = r_0 \text{ и } w = 0 \text{ при } t = 0.$$

Обратное преобразование Лапласа представленного выше выражения будет [7]:

$$\bar{w} = \frac{Q}{2\pi D \beta^2} \exp\left(-\frac{k_{\perp} t}{2D\beta^4}\right) \frac{\text{sh}\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}\right)}{\sqrt{\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}}, \quad (2)$$

$$\bar{w} = \frac{Q}{2\pi D \beta^2} \exp\left(-\frac{k_{\perp} t}{2D\beta^4}\right) \frac{\sin\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}}\right)}{\sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}}}. \quad (3)$$

Формула (2) показывает, что в начальный период, когда волновое число α_n^4 меньше $\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}$, характеризующего процесс затухания, то колебательного процесса не существует. Имеется только рост амплитуды в соответствии с показаниями гиперболического синуса. Как только величина α_n^4 станет больше $\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}$, начинается постепенно затухающий колебательный процесс. Полученное преобразование Лапласа является общим для всех случаев крепления пластинки.

Обратное преобразование по r для первого случая выполним, применив формулу конечных преобразований Ханкеля, когда искомая величина представляется в виде бесконечного ряда по конкретным значениям спектральных чисел α_n , полученным из уравнения $J_0(\alpha_n r_0) = 0$ [1–6]:

$$w = \frac{2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(\alpha_n r_0)} \bar{f}(\alpha_n) J_0(\alpha_n r_0).$$

Здесь $\bar{f}(\alpha_n)$ – изображение оригинала.

Тогда в соответствии с приведенной формулой и с учетом граничных условий получим:

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2 r_0^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{k_{\perp} t}{2D\beta^4}\right) \text{sh}\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}\right)}{J_1^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}} J_0(\alpha_n r), \quad (4)$$

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2 r_0^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{k_{\perp} t}{2D\beta^4}\right) \sin\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}}\right)}{J_1^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_{\perp}^2}{4D^2\beta^4}}} J_0(\alpha_n r).$$

Используя формулы (4), построим графики затухания колебаний в зависимости от времени. Интересно отметить, что затухание колебаний пластинки зависит от волнового числа α_n , см⁻¹. Чем больше число α_n , тем быстрее происходит затухание колебаний, связанных с этим числом. Частота колебаний f_n связана с α_n следующим соотношением: $f_n = \alpha_n^2 / 2\pi\beta^2$. Другими словами, чем больше волновое число α_n , тем больше частота колебаний элементарных составляющих перемещений. Частота колебаний и волновое число являются величинами дискретными и определяются спектральным уравнением $J_0(\alpha_n r_0) = 0$.

Как видно из графиков (рис. 2), спектральный состав двух случаев расчета различен. На рис. 2, б видны спектральные составляющие колебаний, которые не затухают с течением времени. В то же время рис. 2, а показывает, что колебания достаточно интенсивно затухают и чем больше волновое число, тем выше степень их затухания.

Распределение перемещений пластинки в направлении оси z для случая затухающих колебаний приведены на рис. 3. Анализируя эти графики, видим, что колебания двух представленных вариантов пластинок при одном и том же закреплении существенно отличаются, если время превышает 1 мкс. Последнее необходимо учитывать, если расчеты выполняются по формулам, не учитывающим влияние затухания колебаний с течением времени, что характерно для вариантов, когда значение коэффициента затухания k_{\perp} неизвестно.

Случай 2. Если пластинка приклеена в контактной поверхности АЭ датчика со свободным от закрепления контуром, то граничные условия задачи становятся другими. В этом случае необходимо, чтобы изгибающие моменты на свободном контуре пластинки были равны нулю [6]. Поэтому обратное преобразование Ханкеля может быть также выполнено по формуле конечного преобра-



зования, но при других условиях отыскания значений α_n , таких, при которых граничные условия решаемой задачи будут удовлетворены. Удовлетворив граничным условиям, получим [6]:

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2 r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{k_d t}{2D\beta^4}\right)}{\left[1 + \frac{\alpha_n^2 r_0^2}{(1+\nu)^2}\right]} \times \text{sh}\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\frac{k_d^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}\right) J_0(\alpha_n r) \times \dots \frac{J_0^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\frac{k_d^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}}{J_0^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_d^2}{4D^2\beta^4}}}$$

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2 r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{k_d t}{2D\beta^4}\right)}{\left[1 + \frac{\alpha_n^2 r_0^2}{(1+\nu)^2}\right]} \times \sin\left(\frac{t}{\beta^2} \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_d^2}{4D^2\beta^4}}\right) J_0(\alpha_n r) \times \dots \frac{J_0^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\alpha_n^4 - \frac{k_d^2}{4D^2\beta^4}}}{J_0^2(\alpha_n r_0) \sqrt{\frac{k_d^2}{4D^2\beta^4} - \alpha_n^4}}$$

Спектральное уравнение для этого случая будет: $hJ_0(\alpha_n r_0) + a_n J_1(\alpha_n r_0) = 0$; из граничных условий $h = a_n^2 r_0 / (1 + \nu)$.

Результаты расчетов по формулам (5) представлены на графиках рис. 4. Видно, что наличие демпфирующей среды приводит к быстрому уменьшению амплитуд колебаний пластинок. При этом существенное различие в колебательных процессах в обоих случаях появляется в момент начала колебаний.

Анализ графиков рис. 5 показывает существенные различия в колебаниях пластинок свободно приклеенных к контактной поверхности АЭ датчика. Демпфирующий слой клея вызывает быстрое затухание амплитуд сигналов АЭ. Рис. 5, б показывает, что наличие упругого основания без демпфирования для крепления пластинки приводит к тому, что ее колебания протекают практически без затухания.

Случай 3. Следует отметить, что расчет колебаний пластинок в некоторых случаях затруднителен из-за незнания конкретных значений коэффициента затухания k_d . Экспериментальные данные по величинам этого коэффициента сегодня отсутствуют. Поэтому целесообразно попытаться в расчет ввести не экспериментальные значения k_d , а значения, основанные на физических константах, имеющихся в современных справочниках. Если принять во внимание размерность коэффициента

k_d , то его значение для рассматриваемого случая может быть представлено в следующем виде¹:

$$k_d^* = \alpha_n^2 \beta_k^2 D_k, \text{ кгс/см}^3. \quad (6)$$

Как видно, величина коэффициента k_d в предлагаемом варианте зависит от волнового числа α_n^2 , коэффициентов β_k^2 и D_k , характеризующих способность подложки поглощать энергию колебаний пластинки². Проведя анализ размерностей физических величин, входящих в выражение (6), отмечаем, что размерность k_d будет кгс/см³. Эта размерность полностью соответствует размерности коэффициента k_d в предыдущих формулах.

Проведя замену коэффициента k_d на k_d^* в формуле (4), получаем следующее выражение для расчета перемещений w в этом варианте:

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_n^2 \beta_k^2 D_k t}{2D\beta^4}\right)}{\alpha_n^2 r_0^2 J_1^2(\alpha_n r_0)} \times \sin\left[\frac{\alpha_n^2 t}{\beta^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_k^2 D_k}{2D\beta^2}\right)^2}\right] J_0(\alpha_n r) \times \dots \frac{J_0^2(\alpha_n r_0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_k^2 D_k}{2D\beta^2}\right)^2}}$$

$$J_0(\alpha_n r_0) = 0.$$

Сравнивая графики, представленные на рис. 2, б и 6, видим, что амплитуды колебаний отличаются. Суммарные значения амплитуд не похожи одна на другую, хотя затухание процесса колебаний отличается незначительно. В то же время обе методики расчета дают похожие результаты и эксперимент должен уточнить, какая из методик наиболее приемлема. На графиках рис. 7 приведены результаты расчета колебаний защемленной и наклеенной пластинки в зависимости от расстояния до центра излучения и времени. Можно наблюдать, что колебания пластинки стали более плавными по сравнению с рис. 3, а, хотя сравнивать графики достаточно сложно из-за трудности сопоставления коэффициентов затухания в обоих случаях.

Физические постоянные, принятые во всех приведенных расчетах с учетом [6, 8]: $E_k = 50 \text{ МПа}$; $\rho_k = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$; $\nu_k = 0,48$; $D_k = 0,06 \text{ кг}\cdot\text{см}$; $\beta_k^2 = 0,00134 \text{ с/см}^2$; $E = 5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$; $\rho = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$; $g = 0,981 \cdot 10^3 \text{ см/с}^2$; $Q = 1 \cdot 10^{-8} \text{ кг}\cdot\text{с}$; $k_d = 0,458 \text{ кг/см}^3$,

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{\rho \delta}{gD}} = 287 \cdot 10^{-6}; 144 \cdot 10^{-6}; 95,7;$$

$$71,8; 48 \cdot 10^{-6} \text{ с/см}^2$$

для $\delta = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 \text{ см}$;

¹ Величина k_d введена, чтобы избежать путаницы в обозначениях

² Индекс «к» означает обобщенное понятие подложки или клея



$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} = 4,58; 36,6; 123,6; 293; 989 \text{ кг} \cdot \text{см} -$$

для $\delta = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 \text{ см}$

Рассматривая колебания пластинки, приклеенной к контактной поверхности АЭ датчика со свободным от ограничений контуром, можно сделать вывод, что ее колебания при $\alpha_n = 0$ отсутствуют и для этого случая

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^4 r_0^2} t.$$

Это выражение показывает, что пластинка просто перемещается параллельно самой себе, не встречая сопротивления клеевой прослойки ($k_\alpha = 0$, так как $\alpha_n = 0$). В действительности этого не происходит, поскольку прослойка имеет определенную упругость и возвращает квазистатическое перемещение пластинки с течением времени в исходное состояние. Этот процесс может быть оценен по следующей формуле:

$$w = \frac{2Q}{\pi k_\alpha r_0^2} \left[\frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{k_\alpha t}{2D\beta^4}\right) \text{sh}\left(\frac{k_\alpha t}{2D\beta^4}\right) \right].$$

Остальные перемещения пластинки для $\alpha_n > 0$ носят колебательный характер и рассчитываются по формуле:

$$w = \frac{Q}{\pi D \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_n^2 \beta^2 D t}{2D\beta^2}\right)}{\alpha_n^2 r_0^2 \left(1 + \frac{\alpha_n^2 r_0^2}{(1+\nu)^2}\right)} \dots \times \frac{\sin\left[\frac{\alpha_n^2 t}{\beta^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_k^2 D_k}{2D\beta^2}\right)^2}\right] J_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n r_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_k^2 D_k}{2D\beta^2}\right)^2}},$$

$hJ_0(\alpha_n r_0) + a_n J_1(\alpha_n r_0) = 0$; из граничных условий
 $h = a_n^2 r_0 / (1 + \nu)$.

Vibrations of thin plates of limited dimensions supported by an elastic base at concentrated central shock over their surface are considered. It is taken into account that elastic base resistance depends on plate displacement velocity in the direction of coordinate z. Such influence enhances vibration damping and can be adjusted in a broad range, depending on adhesive composition properties. 8 References, 8 Figures.

Key words : nondestructive testing, acoustic emission system, thin plate vibrations, integral transformation method

На рис. 8 представлены такие колебания в зависимости от времени t и радиуса r . Для выполнения расчетов, как и ранее, была создана специальная программа с выводом получаемых результатов в Excel для построения и редактирования графиков и таблиц. Программа позволяла в широких пределах проводить анализ полученной информации для более глубокого изучения сущности процессов, протекающих в пластинках, в зависимости от влияния тех или иных факторов.

Выводы

На основе конечных интегральных преобразований Ханкеля и преобразований Лапласа получены аналитические зависимости для расчета колебаний тонких пластинок ограниченных размеров с учетом затухания колебаний с течением времени. Полученные аналитические зависимости позволяют рассчитывать колебания пластинок при различных способах их закрепления.

Предложена физическая величина коэффициента затухания, зависящая от волновых чисел (частоты колебаний), жесткости и вязкости соединительного слоя, крепящего чувствительную пластинку к контактной поверхности АЭ датчика.

1. Недосека А. Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций / Под ред. Б.Е. Патона. – Киев: Индпром, 2008. – 815 с.
2. Акустическая эмиссия и ресурс конструкций / Б.Е. Патон, Л.М. Лобанов, А.Я. Недосека и др. – Киев: Индпром, 2012. – 312 с.
3. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз. – Т.1, 1960. – 380 с.; Т.2, 1965. – 480 с.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.
6. Недосека А. Я., Недосека С. А. Моделирование колебаний чувствительной пластинки применительно к датчикам акустической эмиссии. Сообщение 1. // Техн. диагностика и неразруш. контроль. – 2015. – № 1. – С. 17–22.
7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
8. Чайлдс У. Физические постоянные / Справ. пособие для студентов вузов. – М.: Физматгиз, 1961. – 95 с.

Поступила в редакцию
12.09.2014