



УДК 681.3:004.451.45(045)

В.В. Васильев, чл.-кор. НАН Украины,
Л.А. Симак, д-р техн. наук, **А.В. Васильев**, канд. техн. наук,
Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике
Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 5011295, e-mail: vsvv06@gmail.com)

Обработка сигналов и моделирование динамических систем дробного порядка на основе операционного исчисления аппроксимационного типа

Рассмотрено применение аппроксимационно-операционного метода, основанного на локальной и глобальной версиях полиномов Лежандра, для оценивания средних значений сигналов, средних значений производных первого и второго порядков, а также дробных производных различных порядков по Риману—Лиувиллю и Капуто. Приведены графические примеры применения метода для цифровой обработки сигналов и моделирования динамических систем дробного порядка в программной среде системы «Mathematica®».

Розглянуто застосування апроксимаційно-операційного методу, базованого на локальній та глобальній версіях поліномів Лежандра, для оцінювання середніх значень сигналів, середніх значень похідних першого і другого порядків, а також дрібних похідних різних порядків за Ріманом—Ліувіллем і Капуто. Наведено графічні приклади застосування методу для цифрової обробки сигналів і моделювання динамічних систем дробового порядку в програмному середовищі системи «Mathematica®».

К л ю ч е в ы е с л о в а: дробное исчисление, аппроксимация и обработка сигналов, операционное исчисление, динамическая система, дробная производная Капуто, дробная производная Римана—Лиувилля, система Mathematica®.

При исследовании нестационарных процессов в динамических системах различного назначения широкое распространение получили операционные методы, позволяющие алгебраизировать интегродифференциальные модели систем. К таким методам относятся преобразование Лапласа, Фурье, Z-преобразование, различные интегральные и дифференциальные преобразования [1—4]. Однако использование указанных методов при исследовании нелинейных динамических систем связано со значительными трудностями.

© В.В. Васильев, Л.А. Симак, А.В. Васильев, 2016

Развитие теории фрактальной динамики и дробного математического анализа [5—8] привело к созданию численно-аналитических и приближенных методов исследования нестационарных процессов, к которым относятся дифференциальные преобразования Пухова [2, 3] и аппроксимационно-операционное преобразование [6]. Последнее основано на использовании полиномиальной аппроксимации сигналов с различными системами базисных функций, формирующих аппроксимационный полином. Выражения, составляющие основу аппроксимационных методов, можно интерпретировать как операционное исчисление, причем различные базисные системы функций порождают различные варианты операционных исчислений. Использование ортогональных полиномов в качестве систем базисных функций позволяют наряду с алгебраизацией математических моделей динамических систем решать ряд задач цифровой обработки сигналов. Рассмотрим некоторые задачи цифровой обработки непрерывных сигналов и математического моделирования динамических систем дробного порядка.

Аппроксимационные методы обработки непрерывных сигналов позволяют выполнять эффективное сжатие информации о сигнале, дискретизацию сигнала, обеспечивают низкочастотную фильтрацию и выделение полезного сигнала на фоне помех, идентификацию параметров динамических систем, оценивание сигнала и его производных различных целых и дробных порядков. Ограничимся программами и примерами решения задач оценивания указанных параметров сигналов. Будем рассматривать полиномиальную аппроксимацию как операционный метод.

Полученные выражения для операционных матриц дифференцирования различных целых порядков позволили получить выражения для операционных аналогов операторов дробного дифференцирования по Риману—Лиувиллю и Капуто [5—7]. При реализации методов цифровой обработки сигналов и моделирования динамических систем дробного порядка в основном использованы системы базисных функций на основе локальной и глобальной версий полиномов Лежандра. Примеры программ обработки сигналов и моделирования динамических систем дробного порядка, реализованы в программной среде системы Mathematica [9].

Полиномиальная аппроксимация сигналов как операционное исчисление. Под полиномиальной аппроксимацией сигнала $x(t)$ подразумевают выражение

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{S}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^*$ — вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома; $\mathbf{S}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}^*$ — вектор системы базисных функций; (*) — символ транспонирования векторов и матриц.

Предположим, что сигнал и система базисных функций определены на одном и том же интервале изменения аргумента $0 \leq t \leq T$, а функции, образующие базисную систему, линейно независимы. Наилучшая аппроксимация достигается, если вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома выбран из условия минимума интеграла квадрата функции ошибки аппроксимации $\varepsilon(t) = x(t) - x_a(t)$ на интервале аппроксимации:

$$\mu(\mathbf{X}) = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Условие (2) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Q}. \quad (3)$$

Элементы матрицы \mathbf{W} зависят только от системы базисных функций,

$$\mathbf{W} = \int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}(t)^* dt, \quad (4)$$

а вектор \mathbf{Q} определяется выражением

$$\mathbf{Q} = \int_0^T \mathbf{S}(t) x(t) dt. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) и далее интегрирование векторных и матричных функций выполняется поэлементно. Решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Q}. \quad (6)$$

Формулы полиномиальной аппроксимации сигналов (1), (4)–(6) можно интерпретировать как операционное исчисление аппроксимационного типа, основные соотношения которого имеют вид

$$\mathbf{X} = \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}(t)^* dt \right)^{-1} \cdot \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) x(t) dt \right), \quad (7)$$

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t)^* \cdot \mathbf{X}. \quad (8)$$

С помощью прямого преобразования (7) сигналу $x(t)$ сопоставляется его операционный аналог или изображение в виде вектора \mathbf{X} коэффици-

циентов аппроксимирующего полинома, а с помощью обратного преобразования (8) осуществляется реконструкция сигнала в виде его аппроксимации:

$$x(t) \Rightarrow \mathbf{X} \Rightarrow x_a(t). \quad (9)$$

Цепочка преобразований (9) получила название S -преобразования [2].

Для S -преобразования как операционного метода существуют правила выполнения математических операций над изображениями сигналов в пространстве изображений, эквивалентных заданным операциям над сигналами в пространстве оригиналов. Рассмотрим некоторые из этих правил.

Линейная комбинация сигналов. Этой операции соответствует такая же комбинация их изображений: $ax(t) \pm by(t) \Rightarrow a\mathbf{X} \pm b\mathbf{Y}$.

Интегрирование сигнала с переменным верхним пределом. Этой операции соответствует умножение изображения подынтегральной функции на операционную матрицу интегрирования:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{P}_S^1 \cdot \mathbf{X}.$$

Операционная матрица интегрирования определяется выражением

$$\mathbf{P}_S^1 = \mathbf{W}^{-1} \cdot \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot \left(\int_0^t \mathbf{S}(\tau)^* d\tau \right) dt \right).$$

Интегрирование с дробным порядком β по Риману—Лиувиллю. Дробному интегрированию сигнала соответствует также умножение его изображения на операционную матрицу интегрирования:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{P}_S^\beta \cdot \mathbf{X}. \quad (10)$$

Операционная матрица интегрирования дробного порядка определяется выражением

$$\mathbf{P}_S^\beta = \mathbf{W}^{-1} \cdot \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{S}(\tau)^* d\tau \right) dt \right).$$

Дифференцирование сигнала с целым порядком n . Взятию n -й производной сигнала соответствует умножение его изображения на операционную матрицу дифференцирования:

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Ldn} \cdot \mathbf{X}.$$

Операционная матрица дифференцирования определяется выражением

$$\mathbf{Ldn} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot \frac{d^n \mathbf{S}(t)}{dt^n} dt \right).$$

Для существования операционной матрицы дифференцирования функции базисной системы должны допускать дифференцирование с соответствующим порядком.

Нахождение производной дробного порядка β по Риману—Лиувиллю. Дифференцированию сигнала по Риману—Лиувиллю с порядком $(n-1 \leq \beta < n)$ соответствует выражение

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1} x(\tau) d\tau \right) \Rightarrow \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Ldn} \cdot \mathbf{P}_S^{n-\beta} \cdot \mathbf{X}.$$

Операционная матрица дифференцирования определяется выражением

$${}^{RL} \mathbf{Ld}^\beta = \mathbf{Ldn} \cdot \mathbf{P}_S^{n-\beta}.$$

Нахождение производной дробного порядка β по Капуто. Дифференцированию сигнала по Капуто с порядком $(n-1 \leq \beta < n)$ соответствует выражение

$$y(t) = \left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1} \frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n} d\tau \right) \Rightarrow \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}_S^{n-\beta} \cdot \mathbf{Ldn} \cdot \mathbf{X}. \quad (11)$$

Операционная матрица дифференцирования определяется выражением

$${}^C \mathbf{Ld}^\beta = \mathbf{P}_S^{n-\beta} \cdot \mathbf{Ldn}.$$

Операционные модели динамических систем целого и дробного порядков. Порядок построения операционных моделей динамических систем рассмотрим на примере задачи Коши для дифференциального уравнения, содержащего дифференциальные операторы целого и дробного порядков:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_0 {}^C \mathbf{D}_t^\beta y(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y_{00}, \quad y'(0) = y_{10}. \quad (12)$$

В (12) символом ${}^C \mathbf{D}_t^\beta$ обозначен оператор дробной производной по Капуто порядка β (11). Предположим для определенности, что интервал

изменения аргумента t и порядок производной β удовлетворяют неравенствам $0 \leq t < T$ и $1 \leq \beta < 2$. Введем новую переменную, заменяющую старшую производную в уравнении (12):

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t). \quad (13)$$

Интегрируя (13), получаем

$$\frac{dy(t)}{dt} = y_{10} + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad (14)$$

$$y(t) = y_{00} + y_{10}t + \int_0^t \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (15)$$

Подстановка (13)—(15) в (12) с учетом (11) приведет к следующему интегральному уравнению:

$$u(t) + aJ_t^{2-\beta} u(t) + b \int_0^t \left(\int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau = f(t) - b(y_{00} + y_{10}t). \quad (16)$$

В (16) символом $J_t^{2-\beta}$ обозначен оператор дробного интегрирования порядка $2-\beta$ по Риману—Лиувиллю (10). В операционном пространстве S -преобразования уравнению (16) соответствует следующее векторно-матричное алгебраическое уравнение:

$$\mathbf{U} + a \cdot \mathbf{P}^{2-\beta} \cdot \mathbf{U} + b \cdot \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} - b \cdot (y_{00} \cdot \mathbf{1} + y_{10} \cdot \mathbf{t}), \quad (17)$$

где \mathbf{U} — вектор коэффициентов полинома, аппроксимирующего производную (13); \mathbf{F} — вектор коэффициентов полинома, аппроксимирующего правую часть уравнения (12); $\mathbf{1}$ и \mathbf{t} — векторы коэффициентов полиномов, аппроксимирующих константу 1 и независимую переменную t ; \mathbf{P} — операционные матрицы интегрирования с указанием их целого или дробного порядков.

Решение (17) имеет вид

$$\mathbf{U} = (\mathbf{E} + a \cdot \mathbf{P}^{2-\beta} + b \cdot \mathbf{P}^2)^{-1} \cdot (\mathbf{F} - b \cdot (y_{00} \cdot \mathbf{1} + y_{10} \cdot \mathbf{t})),$$

где \mathbf{E} — единичная матрица.

Изображение искомого решения в операционном пространстве определяется формулой

$$\mathbf{Y} = b \cdot (y_{00} \cdot \mathbf{1} + y_{10} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{U}.$$

Используя обратное S -преобразование, получаем следующее выражение для аппроксимации решения уравнения (12):

$$y_a(t) = Y^* \cdot S(t). \quad (18)$$

При численном решении уравнения (18) должна быть выбрана система базисных функций $S(t)$ и определены все необходимые константы, а именно коэффициенты уравнения, диапазон изменения аргумента, необходимые начальные условия и порядки дифференциального оператора.

Программы и результаты моделирования.

Программа 1. Формирование систем базисных функций на основе полиномов Лежандра.

Задание шага дискретизации, числа интервалов дискретизации, порядка полиномов и диапазона изменения аргумента:

$$h = 1/25; m = 25; x = 10; T = 1;$$

Формирование смещенных полиномов Лежандра, ортогональных на шаге дискретизации или диапазоне изменения аргумента сигнала:

$$s [j_, i_, t_, h_] :=$$

$$\text{If} [(i-1) * h \leq t < i * h, \text{LegendreP} [j - 1, 1 - 2i + 2 t/h], 0]$$

Формирование подсистемы базисных функций на основе локальных полиномов Лежандра нулевого порядка:

$$V1 = \text{Table} [s [1, i, t, h], \{ i, m \}].$$

Формирование подсистемы базисных функций на основе локальных полиномов Лежандра первого порядка:

$$V2 = \text{Table} [s [2, i, t, h], \{ i, m \}].$$

Формирование подсистемы базисных функций на основе локальных полиномов Лежандра второго порядка:

$$V3 = \text{Table} [s [3, i, t, h], \{ i, m \}].$$

Формирование системы базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра, ортогональных на интервале $0 \leq t \leq T$ изменения аргумента t :

$$V = \text{Table} [s [j, 1, t, T], \{ j, r \}].$$

Визуализация некоторых функций локальных базисных подсистем представлена на рис. 1:

$$\text{po} = \text{Plot} [\{ V1 [[1]], V2 [[3]], V3 [[5]], V1 [[7]], V2 [[7]], V1 [[9]], V2 [[9]], V3 [[9]] \}, \{ t, 0, 0.41 \}].$$

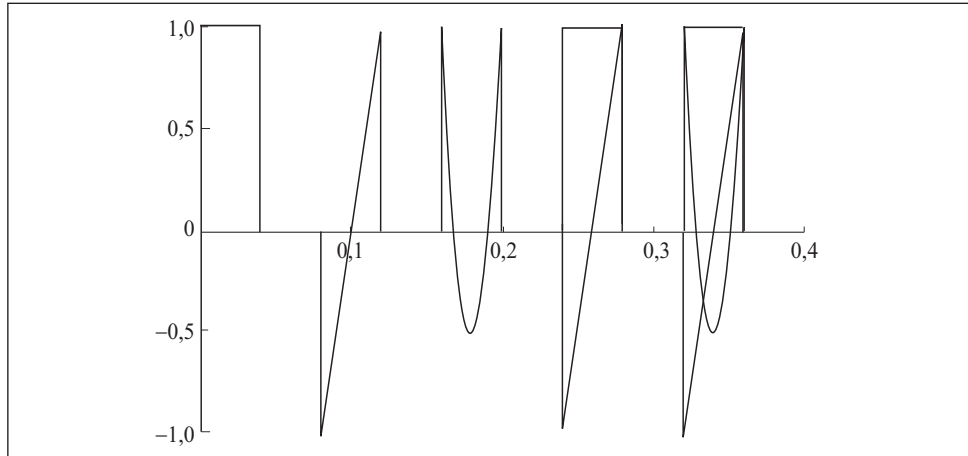


Рис. 1. Функции локальных базисных подсистем

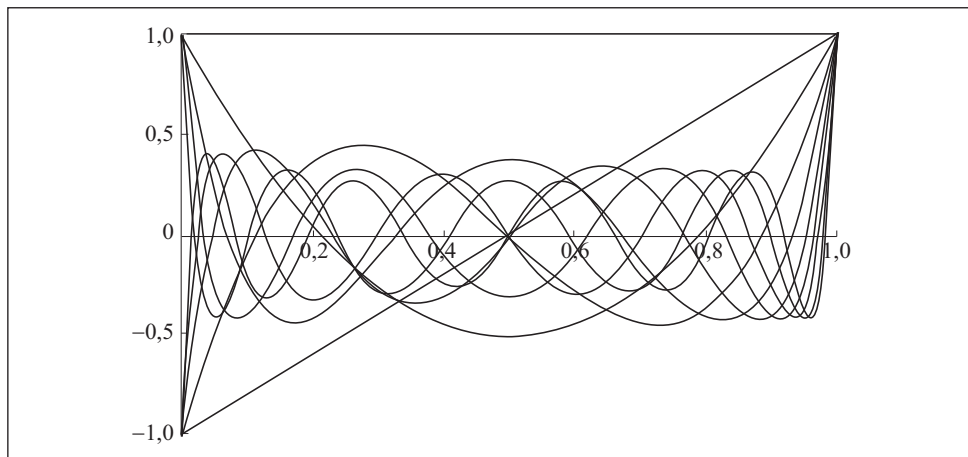


Рис. 2. Система полиномов Лежандра 10 порядка, ортогональных на интервале $T = 1$

Визуализация системы глобальной версии полиномов Лежандра 10 порядка представлена на рис. 2.

Программа 2. Аппроксимация тестового сигнала, дискретизация и оценивание средних значений сигнала и его производных первого и второго порядков. (Предполагается, что результаты работы программы 1 сохранены и активны.)

Определение тестового сигнала и его производных первого и второго порядков:

$$x = \sin [2\pi * t^2], \quad x1 = D [x, t],$$

$$4\pi t \cos [2 \pi t^2], \quad x_2 = D [x_1, t],$$

$$4\pi t \cos [2 \pi t^2] - 16 \pi^2 t^2 \sin [2 \pi t^2].$$

Определение элементов обратных матриц локальных подсистем и матрицы W (см. (3)):

$$m_1 = \left(\int_0^h s [1, 1, t, h]^2 dt \right)^{-1},$$

$$m_2 = \left(\int_0^h s [2, 1, t, h]^2 dt \right)^{-1},$$

$$m_3 = \left(\int_0^h s [3, 1, t, h]^2 dt \right)^{-1},$$

$$W = \text{DiagonalMatrix} \left[\text{Table} \left[\int_0^T (s [j, 1, t, T])^2 dt, \{j, r\} \right] \right].$$

Определение фрагментов векторов коэффициентов полиномов, аппроксимирующих сигнал, для локальных базисных подсистем:

$$X_1 = m_1 * N \left[\text{Table} \left[\int_0^T x * V_1 [[i]] dt, \{i, m\} \right] \right]$$

{0.00335101, 0.0234542, 0.0636198, 0.123645, 0.202923, 0.300086,
0.412556, 0.536025, 0.663952, 0.787156, 0.893676, 0.969071, 0.9973,
0.962855, 0.852771, 0.660828, 0.391118, 0.0616387, -0.293737,
-0.626264, -0.877618, -0.990168, -0.921564, -0.661076, -0.242975}

$$X_2 = m_2 * N \left[\text{Table} \left[\int_0^T x * V_2 [[i]] dt, \{i, m\} \right] \right]$$

{0.00502649, 0.0150749, 0.0250791, 0.0349085, 0.0442818,
0.0527138, 0.0594728, 0.0635637, 0.0637523, 0.0586524,
0.0468982, 0.0274181, -0.00018914, -0.0352038, -0.0753315,
-0.116368, -0.15216, -0.175056, -0.17703, -0.151526,
-0.0958666, -0.0137245, 0.0831577, 0.175088, 0.237362}

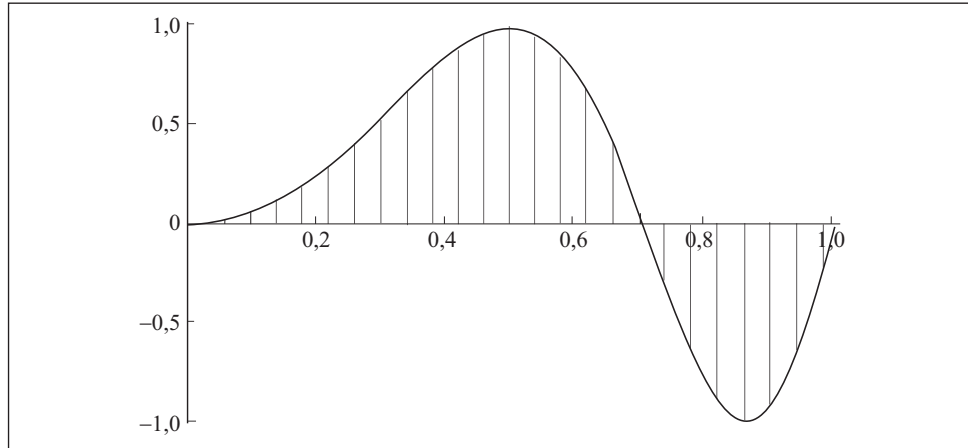


Рис. 3. Тестовый сигнал и результаты его дискретизации (оценивания)

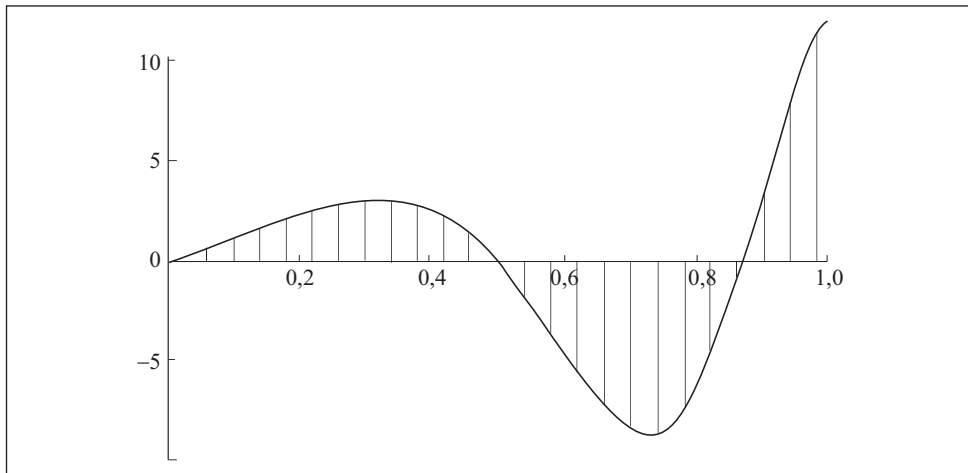


Рис. 4. Первая производная тестового сигнала и результаты ее дискретизации (оценивания)

$$X3 = m3 * N \left[\text{Table} \left[\int_0^T x * V3 [[i]] dt, \{i, m\} \right] \right]$$

{0.00167547, 0.00167317, 0.00165842, 0.00161103, 0.00150121,
 0.00129092, 0.000936745, 0.000395314, -0.000368123, -0.00136729,
 -0.00257904, -0.00392578, -0.00525965, -0.00635464, -0.00691467,
 -0.00660674, -0.00512643, -0.00229657, 0.00181183, 0.00676444,
 0.0117007, 0.0153819, 0.0164041, 0.0135946, 0.00654038}

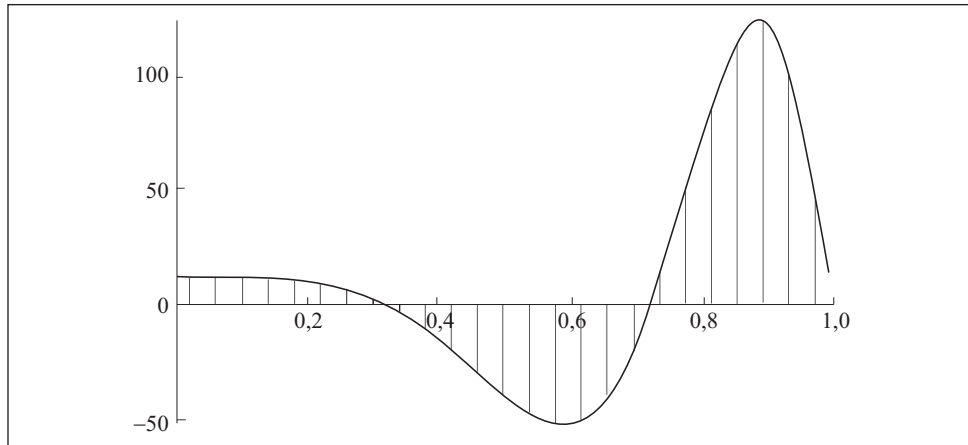


Рис. 5. Вторая производная тестового сигнала и результаты ее дискретизации (оценивания)

Определение вектора коэффициентов полинома, аппроксимирующего сигнал для глобальной базисной системы:

$$X = \text{Inverse}[W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T x * s[j, 1, t, T] dt, \{j, r\} \right] \right]$$

$$\{0.171708, -0.515124, -0.945975, 0.288801, 0.902188, \\ 0.350798, -0.095126, -0.130934, -0.0400863, 0.00441312\}$$

Визуализация сигнала и его средних значений на сетке с шагом h (рис. 3):

```
p12 = ListPlot [ Table [ { (i - 0.5) / m, X1 [[ i ] ] }, { i, m } ],
    Filling -> Axis, FillingStyle -> Red],
    p13 = Plot [ x, { t, 0, 1 } ],
    p14 = Show [ p12, p13 ] .
```

Визуализация первой производной сигнала и ее средних значений (оценивания) на сетке с шагом h (рис. 4):

```
p15 = Plot [ x1, { t, 0, 1 } ],
    p17 = ListPlot [ Table [ { (i - 0.5) / m, (2 / h) * X2 [[ i ] ] }, { i, m } ],
    Filling -> Axis, FillingStyle -> Red ],
    p19 = Show [ p15, p17 ] .
```

Визуализация второй производной сигнала и ее средних значений (оценивания) на сетке с шагом h (рис. 5):

```
p16 = Plot [x2, {t, 0, T}],
p18 = ListPlot [Table [{{(i-0.5)/m, 12/h^2 * X3[[i]]}, {i, m}},
Filling -> Axis, FillingStyle -> Red],
p20 = Show [p16, p18].
```

Программа 3. Определение операционных матриц дифференцирования различных целых и дробных порядков в базисе полиномов Лежандра.

Задание порядка базисной системы и диапазона изменения аргумента:

$$r = 10; T = 1.$$

Определение базисной системы функций на основе глобальной версии полиномов Лежандра:

```
so [t_, T_, i_] := LegendreP [i-1, -1+ 2 t / T],
So = Table [so [t, T, i], {i, r}].
```

Определение операционной матрицы **W**:

$$W = \text{DiagonalMatrix} \left[\text{Table} \left[\int_0^T (\text{so} [t, T, j])^2 dt, \{j, r\} \right] \right].$$

Задание числового значения дробного порядка интегрального (дифференциального) оператора:

$$\beta = 1/2 .$$

Определение операционной матрицы интегрирования дробного порядка:

$$P\beta := N \left[\text{Inverse} [W]. \text{Table} \left[\int_0^T \text{so} [t, T, i] * \left(\frac{1}{\text{Gamma} [\beta]} * \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} * \text{so} [\tau, T, j] dt \right) dt, \{i, r\}, \{j, r\} \right] \right].$$

Определение векторов производных первого и второго порядков от базисной системы функций:

$$S1 = D [So, t]; S2 = D [So, {t, 2}].$$

Определение вектора производных порядка n от базисной системы функций So порядка r ($n < r$):

$$sn := D [So, {t, n}].$$

Определение операционной матрицы дифференцирования порядка n в базисе системы полиномов Лежандра порядка r :

$$Ldn := \text{Inverse}[W] \cdot \text{Table} \left[\int_0^1 \text{so}[t, 1, i-1] * \text{sn}[[j]] dt, \{i, r\}, \{j, r\} \right].$$

Определение операционных матриц дифференцирования первого и второго порядков:

$$Ld1 := \text{Inverse}[W] \cdot \text{Table} \left[\int_0^1 \text{so}[t, 1, i] * S1[[j]] dt, \{i, r\}, \{j, r\} \right],$$

Ld1 // MatrixForm.

Операционная матрица дифференцирования 1-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 14 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 18 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Ld2 := \text{Inverse}[W] \cdot \text{Table} \left[\int_0^1 \text{so}[t, 1, i] * S2[[j]] dt, \{i, r\}, \{j, r\} \right],$$

Ld2 // MatrixForm.

Операционная матрица дифференцирования 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & 40 & 0 & 84 & 0 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 168 & 0 & 324 & 0 & 528 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 360 & 0 & 660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 252 & 0 & 616 & 0 & 1092 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 396 & 0 & 936 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 572 & 0 & 1320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 780 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение операционных матриц дифференцирования по Риману—Лиувиллю и Капуто дробного порядка β ($n-1 \leq \beta < n$) (в данном случае выбрано $n = 2$):

$$DRL = Ld2 \cdot P\beta ,$$

$$DC = P\beta \cdot Ld2 .$$

Пример 1. Определить изображения первой и второй производной тестового сигнала $y = \sin(\pi t)$ в базисе полиномов Лежандра 10 порядка, используя выражения операционных матриц дифференцирования, и сравнить их с изображениями, полученными путем аппроксимации соответствующих производных тестового сигнала.

Задание тестового сигнала и его двух производных:

$$y = \text{Sin} [\pi * t]$$

$$y1 = D [y, t]$$

$$y2 = D [y, \{t, 2\}]$$

Определение изображений тестового сигнала и его производных:

$$Y = \text{Inverse} [W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * y \, dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{0.63662, 0., -0.687085, 0., 0.051779, 0., -0.00133046, 0., 0.0000171322, 0.\}$$

$$Y1 = \text{Inverse} [W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * y1 \, dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{0., -3.81972, 0., 0.706517, 0., -0.028896, 0., 0.000510015, 0., -5.00604 \times 10^{-6}\}$$

$$Y2 = \text{Inverse} [W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * y2 \, dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{-6.28319, 0., 6.78126, 0., -0.511038, 0., 0.0131311, 0., -0.000169088, 0.\}$$

Определение изображений первой и второй производных тестового сигнала в операционной области с использованием операционных матриц дифференцирования:

$$Y1a = Ld1 \cdot Y$$

$$\{0., -3.81972, 0., 0.706519, 0., -0.0288931, 0., 0.000513967, 0., 0.\}$$

$$Y2a = Ld2 \cdot Y$$

$$\{-6.28316, 0., 6.7814, 0., -0.510825, 0., 0.0133631, 0., 0., 0.\}$$

Анализ полученных результатов свидетельствует об удовлетворительной точности оценивания изображений первой и второй производных: $Y1 \approx Y1a$, $Y2 \approx Y2a$.

Пример 2. Определить изображения дробных производных тестового сигнала $z(t) = e^{-t} t^5$ порядка 1.5 по Риману—Лиувиллю и Капуто в базе полиномов Лежандра 10 порядка, используя выражения операционных матриц дифференцирования, и сравнить их с изображениями, полученными путем аппроксимации соответствующих производных тестового сигнала. Диапазон изменения аргумента $T = 1$.

Задание тестового сигнала и его производной второго порядка:

$$z[t_] := t^5 * e^{-t}; \quad z2[t_] := D[z[t], \{t, 2\}].$$

Определение изображений тестового сигнала и его производной второго порядка:

$$Z = \text{Inverse}[W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * z[t] dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{0.0713022, 0.145695, 0.108181, 0.0391033, \\ 0.00456341, -0.000892997, -0.0000991821, 0., 0., 0.\}$$

$$Z2 = \text{Inverse}[W] \cdot N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * z2[t] dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{1.47152, 2.20728, 0.599336, -0.203916, \\ -0.0443434, 0.019659, -0.00314903, 0., 0., 0.\}$$

Нахождение изображения производной по Капуто порядка 1.5 тестового сигнала путем аппроксимации:

$$z1c = \frac{1}{\text{Gamma}[1/2]} * \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} * z2[\tau] d\tau$$

$$\text{ConditionalExpression} \left[\frac{1}{16\sqrt{\pi}} (-\sqrt{t} (45 + 4t (15 + 2t (9 + 2(-7 + t)t))) + \right.$$

$$\left. (45 + 2t (45 + 4t (15 + 2t (15 + t(-15 + 2t)))))) \text{DawsonF}[\sqrt{t}], t > 0 \right]$$

$$z1c = \frac{1}{16\sqrt{\pi}}$$

$$(-\sqrt{t} (45 + 4t (15 + 2t (9 + 2(-7 + t)t))) +$$

$$+ (45 + 2t (45 + 4t (15 + 2t (15 + t(-15 + 2t)))))) \text{DawsonF}[\sqrt{t}])$$

$$ZC = \text{Inverse} [W] . N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * z1c dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{0.76356, 1.292, 0.570328, -0.000786606,$$

$$-0.0403096, 0.00383376, 0.00094223, 0., 0., -9.5\}$$

Нахождение изображения производной по Капуто порядка 1.5 тестового сигнала с использованием операционной матрицы дифференцирования:

$$ZC1 = DC . Z$$

$$\{0.765956, 1.28889, 0.571318, -0.00369742, -0.041201,$$

$$0.00229511, -0.00192962, 0.00119086, -0.000803159, 0.000581764\}$$

Нахождение изображения производной по Риману—Лиувиллю порядка 1.5 тестового сигнала на основе аппроксимации сигнала производной:

$$zr1 = D \left[\frac{1}{\text{Gamma} [0.5]} * \int_0^t (t-\tau)^{-0.5} * z [\tau] d\tau, \{t, 2\} \right]$$

$$10.3166 t^{3.5} \text{Hypergeometric1F1} [6, 6.5, -t] -$$

$$4.23246 t^{4.5} \text{Hypergeometric1F1} [7, 7.5, -t] +$$

$$0.359117 t^{5.5} \text{Hypergeometric1F1} [8, 8.5, -t]$$

$$ZRL1: = \text{Inverse} [W] . N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, 1, i] * zr1 dt, \{i, r\} \right] \right]$$

$$\{0.76356, 1.292, 0.570328, -0.000786606, -0.0403096,$$

$$0.00383359, 0.000918912, -0.000389609, 0.000106094, -0.0000317606\}$$

Нахождение производной по Риману—Лиувиллю порядка 1.5 тестового сигнала с использованием операционной матрицы дифференцирования:

$$ZRL = Ld2 . (P\beta . Z)$$

$$\{0.76356, 1.292, 0.570328, -0.000786606, -0.0403096,$$

$$0.00383359, 0.000918912, -0.000389609, 0.000106094, -0.0000317606\}$$

Анализ полученных результатов свидетельствует об удовлетворительной точности оценивания изображений производных дробного порядка по Риману—Лиувиллю и Капуто: $ZC \approx ZC1$, $ZRL \approx ZRL1$.

Пример 3. Найти решения дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто при различных правых частях уравнения и нулевых начальных условиях:

$$D_t^{3/2}(y(t)) + y(t) = f_i(t), \quad 0 \leq t < 10, \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$f_1(t) = 1; \quad f_2(t) = te^{-t}; \quad f_3(t) = \frac{1}{t} e^{-1/t}; \quad f_4(t) = e^{-t} \sin(0.2t);$$

Выполнив замену переменных, как это сделано, выше,

$$y''(t) = u(t); \quad y'(t) = y'_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau; \quad y(t) = y_0 + y'_0 t + \int_0^t \int_0^\tau u(\alpha) d\alpha d\tau,$$

получим следующее интегральное уравнение:

$$D_t^{-1/2}(u(t)) + \int_0^t \int_0^\tau u(\alpha) d\alpha d\tau = f_i(t) - y_0 - y'_0 t.$$

Решение уравнения в области S -преобразования имеет вид:

$$\mathbf{U}_i = (\mathbf{P}^{1/2} + \mathbf{P}^2)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i - y_0 \mathbf{1} - y'_0 \mathbf{t}), \quad \mathbf{Y}_i = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{U}_i + y_0 \mathbf{1} + y'_0 \mathbf{t}.$$

Программа и результаты решения. Формирование базисной системы функций и S -преобразования:

$r = 10; \quad T = 10;$

$so [t, T, i] := \text{LegendreP}[i - 1, -1 + 2 t / T];$

$So = \text{Table}[so[t, T, i], \{i, r\}];$

$W = \text{DiagonalMatrix}\left[\text{Table}\left[\int_0^T (so[t, T, j])^2 dt, \{j, r\}\right]\right];$

$\beta = 1/2;$

$P_{1/2} := N\left[\text{Inverse}[W]. \text{Table}\left[\int_0^T so[t, T, i] \cdot\right.\right.$

$\left.\left. \cdot \left(\frac{1}{\text{Gamma}[\beta]} \cdot \int_0^t (t - \tau)^{\beta - 1} \cdot so[\tau, T, j] d\tau\right) dt, \{i, r\}, \{j, r\}\right]\right];$

$P_2 := \text{Inverse}[W]. \text{Table}\left[\int_0^T so[t, T, i] \cdot\right.$

$\left.\left. \cdot \left(\frac{1}{\text{Gamma}[2]} \cdot \int_0^t (t - \tau) \cdot so[\tau, T, j] d\tau\right) dt, \{i, r\}, \{j, r\}\right]\right];$

$$Em = \text{IdentityMatrix}[r];$$

$$\text{One} = \text{Inverse}[W] \cdot \text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * 1 dt, \{i, r\} \right];$$

$$\text{Tim} = \text{Inverse}[W] \cdot \text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * t dt, \{i, r\} \right].$$

Нахождение изображения правых частей уравнения:

$$F1 = \text{Chop} \left[\text{Inverse}[W].N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * f1[t] dt, \{i, r\} \right] \right] \right]$$

$$F2 = \text{Chop} \left[\text{Inverse}[W].N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * f2[t] dt, \{i, r\} \right] \right] \right]$$

$$F3 = \text{Chop} \left[\text{Inverse}[W].N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * f3[t] dt, \{i, r\} \right] \right] \right]$$

$$F4 = \text{Chop} \left[\text{Inverse}[W].N \left[\text{Table} \left[\int_0^T \text{so}[t, T, i] * f4[t] dt, \{i, r\} \right] \right] \right]$$

Результаты вычисления:

{1., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

{0.0999501, -0.180183, 0.0795514, 0.0548915, -0.11097,
0.0950427, -0.0567712, 0.0266838, -0.0104317, 0.00350451}

{0.182292, -0.11335, -0.00729871, 0.0795161, -0.102313,
0.0927816, -0.067649, 0.0388361, -0.0133216, -0.00573164}

{0.0192272, -0.0355156, 0.016756, 0.0100798, -0.0220875,
0.0193228, -0.0116028, 0.00541199, -0.00207266, 0.000672874}

Нахождение изображений второй производной решений уравнения:

$$U1 = \text{Inverse}[P_{1/2} + P_2] \cdot F1$$

$$U2 = \text{Inverse}[P_{1/2} + P_2] \cdot F2$$

$$U3 = \text{Inverse}[P_{1/2} + P_2] \cdot F3$$

$$U4 = \text{Inverse}[P_{1/2} + P_2] \cdot F4$$

Результаты вычисления:

{-0.00359237, -0.0717939, 0.265745, -0.658183, 0.688209,
-0.562009, 0.281819, -0.392301, 0.221457, -0.581021}

{0.000526988, 0.00134678, 0.0617316, -0.232947, 0.237781,
-0.0140704, -0.123512, 0.122238, -0.0570961, 0.0493043}

{-0.000161724, -0.00609428, 0.0806893, -0.19226, 0.154759,
0.0496775, -0.160368, 0.177463, -0.109552, 0.104649}

{0.000101173, 0.000251924, 0.011831, -0.0461981, 0.0482296,
-0.00354331, -0.0247242, 0.0247711, -0.0116095, 0.00987791}

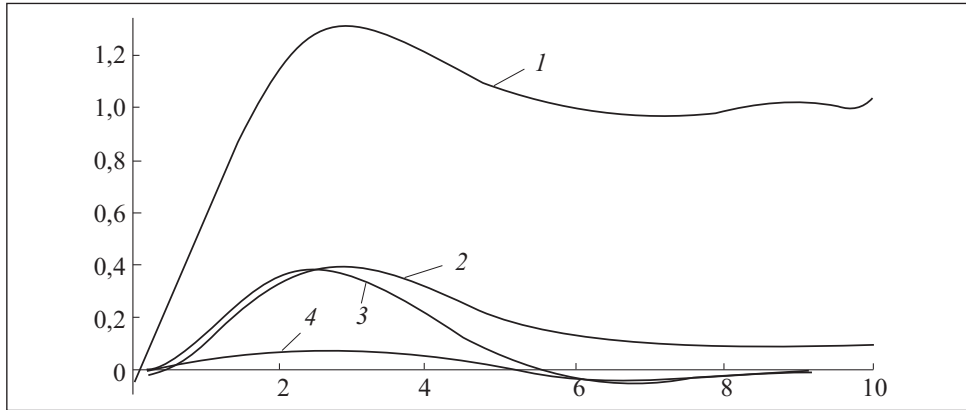


Рис. 6. Аппроксимация решений дифференциального уравнения дробного порядка при различных значениях $f(t)$: 1 — $f_1(t)=1$; 2 — $f_2(t)=te^{-t}$; 3 — $f_3(t)=1/t e^{-1/t}$; 4 — $f_4(t)=e^{-t} \sin(0,2t)$

Нахождение изображений решений уравнения:

$$Y1 = P_2 \cdot U1$$

$$Y2 = P_2 \cdot U2$$

$$Y3 = P_2 \cdot U3$$

$$Y4 = P_2 \cdot U4$$

Результаты вычисления:

```
{0.981318, 0.157999, -0.389563, 0.469736, -0.207802,
-0.071304, 0.110102, -0.0544681, -0.00272142, 0.0429146}
{0.100446, -0.166683, -0.0482308, 0.257521, -0.131902,
-0.0707546, 0.0918761, -0.0262993, -0.00581806, 0.00507873}
{0.182572, -0.0804292, -0.132053, 0.21601, -0.0708939,
-0.0747719, 0.0769364, -0.0233653, -0.00134038, 0.00274155}
{0.0193052, -0.0329886, -0.00818725, 0.0508563, -0.0271896,
-0.0136426, 0.0185332, -0.00545923, -0.00113301, 0.00104507}
```

Аппроксимация и визуализация решений:

$$y1a = Y1.So;$$

$$y2a = Y2.So;$$

$$y3a = Y3.So;$$

$$y4a = Y4.So;$$

$$p1 = \text{Plot}[y1a, \{t, 0, T\}, \text{PlotRange} \rightarrow A11]$$

$$p2 = \text{Plot}[y2a, \{t, 0, T\}]$$

$$p3 = \text{Plot}[y3a, \{t, 0, T\}]$$

$$p4 = \text{Plot}[y4a, \{t, 0, T\}]$$

$$\text{Show}[p1, p2, p3, p4]$$

Аппроксимация решений представлена на рис. 6.

Выводы

Использование базисных систем на основе локальной и глобальной версий полиномов Лежандра позволило сформировать выражения для операционных матриц дифференцирования целых порядков. Программы, написанные на языке Mathematica®, допускают изменение вида базисных систем, основных параметров и вида сигналов и могут быть применены при использовании методов S -преобразования для цифровой обработки непрерывных сигналов и моделирования задач дробной динамики систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poularikas A.D.* (Editor-in-Chief). *The Transforms and Applications Handbook*. — CRC Press & IEEE Press. — 2000.
2. *Пухов Г.Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. — Киев: Наук. думка, 1978.
3. *Pukhov G.E.* *Differential Transforms and Circuit Theory// Circuit Theory and Applications*. — 1982. — Vol. 10. — P. 265—276.
4. *Симак Л.А.* Дифференциальные преобразования на основе производных дробного порядка и моделирование дробно-степенных спектров // Доклады АН УССР, Сер. А: Физико-математические и технические науки. — 1986. — № 8. — С. 79—82.
5. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. — 512 с.
6. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Академ пресс, 2008. — 256 с.
7. *Oldham K.B., Spanier J.* *The Fractional Calculus*. — Academic Press, 1974. — 234 p.
8. *Podlubny I.* *Fractional Differential Equations*. — Academic Press, 1999. — 340 p.
9. *Wolfram Stephen.* *The Mathematica book*. — Wolfram Media / Cambridge University Press, 1996. — 1403 p.

V.V. Vasiliev, L.A. Simak, A.V. Vasiliev

SIGNAL PROCESSING AND MODELING OF FRACTIONAL ORDER DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON APPROXIMATED TYPE OPERATIONAL CALCULUS

The application of approximation-operational method based on the local and global versions of the Legendre polynomials for estimating the average signal values, the average values derivatives of the first and second orders, as well as the evaluation of the fractional derivatives of various orders in the Riemann-Liouville and Caputo sense. Illustrative examples of the method application for digital signal processing and simulation of dynamic systems of fractional order in the system software environment «Mathematica®»

Key words: fractional calculus, approximation and signal processing, operational calculus, dynamical system, Caputo type fractional derivative, Riemann-Liouville type fractional derivative, Mathematica® System.

REFERENCES

1. Poularikas, A.D. (2000), The transforms and applications handbook, Ed by A.D. Poularikas, CRC Press & IEEE Press.
2. Pukhov, G.E. (1978), *Preobrazovaniya Teilora i ikh primeneniya v elektrotekhnike i elektronike* [Taylor transforms and their application in electro engineering and electronics], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine.
3. Pukhov, G.E. (1982), "Differential transforms and circuit theory", *Circuit Theory and Applications*, Vol. 10, pp. 265-276.
4. Simak, L.A. (1986), "Differential transforms based on fractional order derivatives and fractional-power spectra modeling", *Doklady akademii nauk Ukrainy, Seria A: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, no. 8, pp. 79-82.
5. Uchaikin, V.V. (2008), *Metod drobnih proizvodnykh* [Method of fractional derivatives], Artishok Publ., Ulyanovsk, Russia.
6. Vasiliev, V.V. and Simak, L.A. (2008), *Drobnoye ischislenie i approksimatsionnye metody v modelirovanii dinamicheskikh sistem* [Fractional calculus and approximated methods in dynamical systems modeling and simulation], Akadem press, Kiev, Ukraine.
7. Oldham, K.B. and Spanier, J. (1974), *The fractional calculus*, Academic Press, New York, USA.
8. Podlubny, I. (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, USA.
9. Wolfram, S. (1996), *The mathematica book*, Wolfram Media / Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Поступила 19.05.16

ВАСИЛЬЕВ Всеволод Викторович, чл.-кор. НАН Украины, руководитель Отделения гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1958 г. окончил Таганрогский радиотехнический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование динамических систем, электроника и моделирование в энергетике.

СИМАК Лилия Алексеевна, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Отделения гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1959 г. окончила Таганрогский радиотехнический ин-т. Область научных исследований — операционные методы анализа динамических систем, математический анализ нецелых порядков.

ВАСИЛЬЕВ Алексей Всеволодович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Отделения гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1982 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование динамических систем, информационные системы.

