

КРОНЕКЕРОВЫ (ТЕНЗОРНЫЕ) МОДЕЛИ НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ГРАНУЛ

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с грануляцией информации и гранулярными вычислениями (гранулярный компьютеринг) при представлении нечетко-множественной гранулы (НМ-гранулы) в виде кронекерова произведения. Показана универсальность предложенной модели, в частности, при вычислении обратного значения нечеткой переменной вида $\tilde{X} = \{x / \mu^x\}$ и решении других задач управления в условиях неопределенности. Показано, что предложенная форма НМ-гранулы — тензорное (кронекерово) произведение компонент $x \otimes \mu^x$, позволяет сохранить свойство целостности гранул и существенно продвинуться в решении проблемы гранулярного компьютеринга и преобразования гранул.

Ключевые слова: тензор, нечеткое множество, кронекерово произведение, норма, информационная гранула, SVD-разложение.

ВВЕДЕНИЕ

Гранулирование информации и гранулярные вычисления (гранулярный компьютеринг) (ГрК) обусловлены необходимостью повышения эффективности решения задач управления в условиях неопределенности. Нечеткое множество (НМ) $\tilde{X} = \{x / \mu^x\}$ как информационная гранула (ИГр или просто Гр) является примитивом и играет важную роль в решении этой проблемы, но способ представления НМ как подмножества упорядоченных пар, наделенных субъективной функцией принадлежности (ФП), в ряде случаев серьезно препятствует этому. Несмотря на многообразие ФП, большинство задач управления ограничивается треугольной ФП. В нечеткой математике, которая базируется на принципе нечеткого расширения и интервального анализа существует ряд необоснованных предположений, что может поставить под сомнение корректность ее результатов. В частности, необоснованные эвристики при определении обратных величин для НМ (по умножению и сложению) проявляются в достаточно сложных задачах.

Несмотря на то, что НМ рассматривается как гранула (НМ-Гр), ее свойства изучены недостаточно, в самом определении НМ и Гр заложено противоречие. В данной статье изучается возможность определения новых свойств НМ-Гр, представленных в тензорно-матричной форме. Отметим, что ИГр играют ведущую роль в представлении и обработке знаний когнитивными агентами: выделение скрытых знаний, определение новых свойств информационных объектов на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД) (например, интеллектуальный кластерный анализ в условиях неопределенности [1]) и другие задачи, которые успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Первой публикацией, где поставлен вопрос грануляции нечеткой информации и определения способов ее обработки, была работа Л. Заде [2], в которой Гр определена как группа объектов (или точек), представленных (изображенных) объединенно на основе неразличимости/различимости сходства, близости. Последующее развитие идеи грануляции нечеткой информации получено в работе [3]. В [4] приведены примеры, показывающие иерархичность грануляции.

© Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева, 2014

Практически во всех работах основная идея ГрК состоит в использовании групп, классов или кластеров элементов, называемых гранулами, в силу того, что они не могут быть определены более детально. Необходимость рассмотрения гранул возникает тогда, когда появляется необходимость в сокрытии информации в гранулах: неопределенность, неполнота или недостоверность. Типичный пример тому — теория грубых множеств [5]. Отметим, что даже в ситуациях, где имеется подробная и доступная информация, может быть достаточно оснований использовать гранулы, чтобы получить эффективное решение, так как фактически для многих прикладных проблем точных решений не требуются.

В работе [3] приведена трактовка гранулы как формальной группировки объектов, определенных обобщенным ограничением, а также представлен тип гранулы, определяемой как декартово произведение Гр, например $\mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_j$. Термины «гранула» и «грануляция» своим появлением обязаны ИАД. Попытка моделирования информационных систем на уровне моделей искусственного интеллекта неизбежно приводит к информационным гранулам, так как они являются атрибутом естественного интеллекта. Следует учитывать, что уровень грануляции (размер и структура гранулы) имеет существенное значение для формулирования проблемы и выбора стратегии ее решения; следовательно, вопрос достаточности НМ с треугольной ФП для построения сложных Гр является правомерным.

Важная особенность Гр — целостность динамической информационной структуры и ее целенаправленность. Размер Гр является проблемно-ориентированным и зависящим от задачи и предполагаемого способа ее решения; преобразование Гр представляет проблему в гранулярном вычислении. В работе [9] показано, что по природе разума человека вся воспринимаемая им информация является гранулярной; величину гранулярности можно определять, используя ширину гранулы, если последняя есть НМ, представленное в координатах значения/ФП. Такой подход позволяет полагать, что в пределе при уменьшении степени гранулярности имеем Гр бесконечно малой ширины, т.е. точку — объект стандартной математики. Отметим, что здесь допущена неточность — стандартная математика нормально работает не только с числом, но и с множеством чисел, когда в роли числа выступает матрица.

Интерпретации и классификации гранул даны в работах [2, 3]. Следует отметить многообразие классификаций гранул. Они могут отличаться по своей природе, сложностью, размером, уровнем абстрактности–детализации. Термин «грануляция» предполагает процессы композиции (формирование более крупных гранул или объединение группы элементов) и декомпозиции (формирование более мелких гранул). В цитированных работах Л. Заде приведены типичные модели Гр. Выделим те из них, которые связаны с рассматриваемой задачей: интервалы, НМ, лингвистические переменные, кластеры.

Примитивы языка гранулярных вычислений — покрытия, разбиения, окрестности. Данный контекст требует уточнения. К примитивам следует отнести тензоры и операции над ними [5, 6]. Грануляция информации можно реализовать методами классификации и кластерного анализа, с помощью отношений вложенности и нестандартных множеств. Приведем основные определения [10, 11], необходимые для дальнейшего понимания изложенного.

Определение 1. Гранула данных — множество с элементами x как членами НМ \tilde{G} с градациями из λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, т.е. $g = \overset{\Delta}{\{x \mid x \in_{\lambda} \tilde{G} \subseteq U\}}$, где U — универсум.

Определение 2. Вычислительная гранула — основная математическая структура, имеющая стабильную топологию и, по крайней мере, устройство (виртуальное) вычислительной способности или поведения.

Определение 3. Гранулярный компьютеринг — вычислительная методология, которая моделирует и осуществляет вычислительные структуры и функции гранулярной системой, где каждая Гр в системе выполняет встроенную функцию или взаимодействует с другими Гр в системе.

В работе [1] сформулирован обобщенный принцип системной абстракции, утверждающий, что систему можно представить как целое на данном уровне k аргументации, $1 \leq k \leq n$, без знания деталей на уровнях $k-1$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Гранулярный компьютеринг имеет достаточно много определений. Приведем одно из них, предложенное в работе [12]: «... современная парадигма, методология и методика информационного анализа неочевидно структурированных ... систем («нечетко» структурированных систем) ... ». Соответственно гранулярные вычисления включают «мягкие» вычисления (МВ). Отметим, что МВ — обобщенный термин, включающий математические теории общей топологии, теорию НМ, нейросетевые вычисления и др.

Естественно, гранула состоит из элементов, при этом элемент может быть гранулой, а гранула может быть элементом другой гранулы. Формально объединение элементов в гранулы, как это отмечалось выше, определяется, исходя из сходства, «близости» элементов и т.д., на практике нередко ограничиваются визуальным сходством [13]. Каждая Гр имеет внутренние, внешние и контекстуальные свойства. Понятие «минимальных» (или «начальных») гранул, из которых следует «собирать» крупные гранулы, не определено и зависит от контекста рассматриваемой проблемы. Ниже понятия множества элементов (в общем случае нечеткого) не рассматриваются. Это обстоятельство отображается, в частности, в том, что отношения между гранулами описываются с помощью нечетких графов и систем нечетких логических правил типа «если — то».

В работе [14] рассмотрен метод представления информационных гранул, индуцированный нечеткостью. Показано, что нечеткую гранулу (в общем случае НМ) можно представить как произведение независимых скалярных экспоненциальных функций. В настоящей статье гранула рассматривается как тензорное произведение векторов, являющихся элементами множества упорядоченных пар, т.е. $\{x / \mu^{(x)}\} \rightarrow x \otimes \mu^{(x)}$. В свою очередь, в соответствии с нотацией Matlab вектор есть одномерный массив.

Наиболее раскрыта роль НМ как пользователя — ориентированного процессорного каркаса ГрК в работе [15]. Нечеткие множества выступают как гранулярные представители числовых данных, компонуемых в некоторый контекст. С помощью ФП можно объединить НМ в виде компактного объекта. Нечеткие множества выступают как агрегаты числовых данных и могут формироваться на основе числовых данных путем их кластеризации (группирования).

Основные вопросы ГрК практически сосредоточены и рассматриваются в двух взаимосвязанных аспектах: формирования гранул и вычисления над ними [16]. Формируя новый вид гранулы, оперируют ее образованием, представлением и интерпретацией. Этот вид фокусируется в направлении семантики гранулярной конструкции.

Отметим еще одну особенность НМ-Гр, не учитываемую при гранулярном компьютеринге. Известно, что одной из характеристик гранул является их целостность, т.е. с гранулой необходимо работать, не расчленяя ее на компоненты. Нечеткое множество как гранула таковым в действительности не является, так как при реализации операций нечеткой арифметики, как известно, расчленяют НМ —

подмножество упорядоченных пар, на две компоненты: величину и функцию принадлежности. С величинами выполняют арифметические операции, с ФП — логические операции (определение $\max\min$ или $\min\max$). Отметим, что с тензорной гранулой, предложенной в настоящей работе, выполняются только операции одного вида и, таким образом, свойство целостности сохраняется.

В данной статье ставится задача: предложить такую форму НМ-Гр, чтобы она могла использоваться и в стандартной, и в нечеткой математике. Такую возможность дает кронекерово (тензорное) произведение (КП). Использование информации любой степени гранулярности в задачах моделирования, оптимального управления и других задачах в современных ПК возможно без учета свойств исследуемого объекта. Контролируемая степень гранулярности на основе КП позволяет существенно сократить объемы хранимой информации, что может не только привести к повышению быстродействия обработки, но и сформулировать новые задачи управления в условиях неопределенности.

Существует мнение, что уменьшением степени гранулярности можно существенно увеличить точность модели. Применение ближайшего КП (БКП) позволяет эту задачу конкретизировать и предостеречь от необоснованных поисков точной модели.

Один из важных результатов современной теории ГрК заключается в том, что представление НМ является четким. Как показано в работе [17], НМ-гранула — это нечеткое множество, которое имеет четкое множество представления. В данном случае гранулярное НМ рассмотрено в виде КП.

Изложим комплекс задач:

— представление информационной гранулы в виде тензоров с матрицами $m \times m$, где m — количество различных элементов, в случае НМ — число упорядоченных пар $\{x / \mu^{(x)}\}_1^m$;

— получение новой (скрытой) информации относительно свойств НМ, представленных в виде гранул;

— оценка влияния ФП на результат арифметической операции с информационной гранулой в прикладных задачах.

Нечеткое множество $\tilde{A} = \{U, \mu\}$, где U — универсум, μ — функция принадлежности, т.е. $\tilde{A} = \{u_i / \mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)} \rightarrow [0, 1]$, $\tilde{A} \subset U \times [0, 1]$, в работе рассматривается в виде тензорной гранулы (ТГр):

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \{u_i / \mu_i^{(u)}\} &\rightarrow \mathbf{A} = ([u] \times [\mu^{(u)}]^T)_{i=1}^n = \\ &= (u_1 \mu_1^{(u)} \dots u_1 \mu_n^{(u)}; \dots u_n \mu_1^{(u)} \dots u_n \mu_n^{(u)}), \end{aligned}$$

где \otimes — символ тензорного (кронекерова) произведения, знак Т (или ') — символ транспонирования, $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$, $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n] \ \forall i, \mu_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Пусть $\tilde{x} \stackrel{\Delta}{=} \{x = [3 \ 5 \ 7], \mu = [0 \ 1 \ 0]\}$, универсальное множество (УМ), на котором определен \tilde{x} , представим в виде $\{\{3 \ 5 \ 7\}, \mu = [1 \ 1 \ 1]\}$. Упорядоченные пары $X_1 \stackrel{\Delta}{=} \{x / 1\} \rightarrow \{\{3 \ 5 \ 7\}, \mu = [1 \ 1 \ 1]\}$ и $X_2 \stackrel{\Delta}{=} \{x / 0\} \rightarrow \{\{3 \ 5 \ 7\}, \mu = [0 \ 0 \ 0]\}$ назовем УМ полной принадлежности и полной непринадлежности соответственно. Будем рассматривать гранулы в связи с УМ, на котором задано НМ.

Тензорная форма НМ-гранулы как реализация тензорного (кронекерова) произведения $\tilde{x} = \{x / \mu^x\}$, $\tilde{x} \in X$, X — универсальное множество, $X = \{X_1, X_2\}$, $\mu^x \rightarrow [0, 1]$, $X_1 \stackrel{\Delta}{=} \{x / 1\}$, $X_2 \stackrel{\Delta}{=} \{x / 0\}$ дает следующие тензор-гранулы, являющиеся

аналогами НМ:

$$tx = \text{kron}(x, [010]') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{norm}(tx, 'fro') = 9.11,$$

$$tx1 = \text{kron}(x, [111]') = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{norm}(tx1, 'fro') = 15.78.$$

F -нормы (Frobenius нормы) матриц $tx, tx1$ соответственно равны 9.11 и 15.78.

Имеет место неравенство $0 \leq n_{tx} \leq n_{tx1}$, где $0, n_{tx}, n_{tx1}$ — нормы тензорных гранул четких множеств непринадлежности, принадлежности и НМ с треугольной ФП.

ФАДЗИФИКАЦИЯ И ДЕФАДЗИФИКАЦИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРНЫХ ГРАНУЛ

Представление НМ $\tilde{X} = \{x / \mu^x\}$, $\tilde{X} \in X$, $\mu^x \rightarrow [0, 1]$, в виде информационной гранулы предполагает внутреннюю целостность объекта, которая сохраняется при взаимодействии с другими объектами, при этом форма представления НМ-Гр как подмножества упорядоченных пар может естественно изменяться в зависимости от решаемой задачи. Предположим, что внутренние характеристики НМ-Гр (расстояния между векторами $\{x_i, \mu_i^x\}$ и $\{x_{i+1}, \mu_{i+1}^x\}$) при взаимодействии с другими объектами будут представлены в неявной форме. Например, тензорная форма $\tilde{X} = \{x / \mu^x\} \rightarrow t^x = (x \otimes \mu^x)$ приводит к внутренним элементам матрицы $t_{ij}^x \{x_i \cdot \mu_j^x\} \in t^x$, где семантика НМ $\{x_i / \mu_i^x\}$ не учитывается. В этих условиях естественно определить алгоритмы перехода от одной формы представления НМ-гранулы к другой.

Тензорная форма НМ-Гр предполагает, что входом системы нечеткого управления, в частности, может быть многомерный массив (тензор), который необходимо матрицизовать, или представить вход в виде НМ-Гр с принятой априори ФП, каковой в практическом большинстве считается треугольная ФП. Помимо трудностей, неизбежно возникающих в условиях многомерности объекта, часто интервал, в котором определяется ФП, выявляется неконструктивным, т.е. чрезмерно большим. В этих условиях определение тензорной НМ-Гр, ближайшей (в определенном смысле) к исходному множеству данных (ИМД), может существенно улучшить решение задачи управления в условиях неопределенности, в частности представленной множеством (массивом) данных.

Изложим исходные данные и их преобразования на основе ближайшего кронекера произведения. БКП определяется, исходя из условия равенства F -норм [17–19]

$$\|\mathbf{Q} - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2\|_F^2 = \|\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^T\|_F^2,$$

где \mathbf{a}_1 — векторизованная версия матрицы \mathbf{A}_1 , сформированная в виде колонки столбцов матрицы \mathbf{A}_1 , $\mathbf{a}_1 = \text{vec}(\mathbf{A}_1)$; $\mathbf{a}_2 = \text{vec}(\mathbf{A}_2)$; $\hat{\mathbf{Q}}$ — переформированная матрица \mathbf{Q} ; $\|\cdot\|_F$ — Frobenius норма. Хотя БКП ($\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2$) не отличается однозначностью или точностью, но в ряде случаев его применение эффективно. Стандартная форма БКП предполагает наличие только двух матриц: \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 , которые определяются в SVD-разложении со своими двойными компонентами — левым и правым сингулярными векторами. SVD-разложение \mathbf{Q} дает ближайшую rank-1 матрицу $\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2$ на \mathbf{Q} . Оптимальные величины векторов $\mathbf{a}_1 = \text{vec}(\mathbf{A}_1)$, $\mathbf{a}_2 = \text{vec}(\mathbf{A}_2)$ определяются в виде $\mathbf{a}_1 = \sigma_1 U_1$ и

$\mathbf{a}_2 = V_1$, где σ_1 — наибольшая сингулярная величина \mathbf{Q} ; U_1 и V_1 — соответственно левый и правый сингулярные векторы. Процедура матрицизации векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 дает оптимальные БКП матриц \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 .

В общем случае задача определения БКП формулируется в следующем виде. Пусть матрица \mathbf{A} имеет размер $m \times n$, $m = m_1 \times m_2$, $n = n_1 \times n_2$; необходимо найти матрицы \mathbf{B} и \mathbf{C} размера $m_1 \times n_1$ и $m_2 \times n_2$ соответственно, минимизирующие ошибку $f(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}\|_F$. Кроме того, векторы $\text{vec}(\mathbf{B}) = \sigma_1 U_1$ (в некоторых случаях $\sigma_1^{1/2} U_1$), $\text{vec}(\mathbf{C}) = V_1$, где U_1, V_1 — левый и правый сингулярные векторы SVD-разложения \mathbf{A} , решают задачу $\underset{\mathbf{A}}{\text{minimize}} f(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

В рассматриваемом здесь случае задача поиска БКП ориентирована на поиск НМ, сформированного на базе БКП. Пусть ИМД представлено в виде матрицы \mathbf{A} размера $m \times n$, где m — количество элементов в НМ, n — количество измерений, нечеткое множество $\tilde{X} \stackrel{\Delta}{=} \{x / \mu^x\} \rightarrow \mathbf{t}_x = (x \otimes \mu^x)$ должно иметь одинаковое количество элементов для x и μ^x . Следовательно, матрица \mathbf{A} должна быть представлена в виде $\tilde{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m} = \mathbf{A}_{n \times m} \otimes \mathbf{1}_{m \times n}$ или $\check{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m} = \mathbf{1}_{m \times n} \otimes \mathbf{A}_{n \times m}$.

Пример. Пусть ИМД задано в виде матрицы $\mathbf{A}_{4 \times 3}$, регуляризованные матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m} = \mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}$, $\check{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}$ имеют размер 12×12 . Хотя эти матрицы различны, однако их F -нормы равны, т.е. $\|\tilde{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m}\|_F^2 = \|\check{\mathbf{A}}_{n \cdot m \times n \cdot m}\|_F^2 = \|\mathbf{A}_{n \times m}\|_F^2$. Это вытекает из определения F -нормы, так как $\|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{B}\|_F$, $\|\mathbf{1}\|_F = 1$. Например, для матриц $\mathbf{A}_{4 \times 3}$, $\mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}$ их F -нормы равны: $\|\mathbf{A}_{4 \times 3}\|_F = \|\mathbf{1}_{3 \times 4} \otimes \mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_{3 \times 4}\|_F$ (для заданной матрицы $\mathbf{A}_{4 \times 3}$), при этом сами матрицы различны.

Рассмотрим пример фадзификации ИМД, заданного в виде матрицы $(\mathbf{x})_3^9$.

1^0 . Представим ИМД, которое фадзифицировано с помощью БКП. Матрицы \mathbf{x} , $(\mathbf{x}_1)_9^9 = \mathbf{1}_{1 \times 3} \otimes (\mathbf{x})_3^9$, $(\mathbf{x}_2)_9^9 = (\mathbf{x})_3^9 \otimes \mathbf{1}_{1 \times 3}$ с F -нормами $\|\mathbf{x}\|_F = \|\mathbf{x}_1\|_F = \|\mathbf{x}_2\|_F = 38.79$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6.00 & 1.00 & 6.00 \\ 8.00 & 13.00 & 0 \\ 4.00 & 3.00 & 5.00 \\ 11.00 & 3.00 & 3.00 \\ 5.00 & 0 & 13.00 \\ 0 & 9.00 & 9.00 \\ 8.00 & 8.00 & 13.00 \\ 8.00 & 1.00 & 9.00 \\ 3.00 & 9.00 & 11.00 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{x}_1)_9^9 = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} 6.00 & 1.00 & 6.00 \\ 8.00 & 13.00 & 0 \\ 4.00 & 3.00 & 5.00 \\ 11.00 & 3.00 & 3.00 \\ 5.00 & 0 & 13.00 \\ 0 & 9.00 & 9.00 \\ 8.00 & 8.00 & 13.00 \\ 8.00 & 1.00 & 9.00 \\ 3.00 & 9.00 & 11.00 \end{matrix} \right)_3^9 \\ 0 \\ \left(\begin{matrix} 6.00 & 1.00 & 6.00 \\ 8.00 & 13.00 & 0 \\ 4.00 & 3.00 & 5.00 \\ 11.00 & 3.00 & 3.00 \\ 5.00 & 0 & 13.00 \\ 0 & 9.00 & 9.00 \\ 8.00 & 8.00 & 13.00 \\ 8.00 & 1.00 & 9.00 \\ 3.00 & 9.00 & 11.00 \end{matrix} \right)_3^9 \end{pmatrix}_6^9,$$

$$(\mathbf{x}_2)_9^9 = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} 6.00 & 0 & 0 \\ 8.00 & 0 & 0 \\ 4.00 & 0 & 0 \\ 11.00 & \vdots & 0 \\ 5.00 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 3.00 & 0 & 0 \end{matrix} \right)_3^9 \\ 1.00 \\ \left(\begin{matrix} 6.00 & 0 & 0 \\ 8.00 & 0 & 0 \\ 4.00 & 0 & 0 \\ 11.00 & \vdots & 0 \\ 5.00 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 3.00 & 0 & 0 \end{matrix} \right)_3^9 \\ 6.00 \\ \left(\begin{matrix} 6.00 & 0 & 0 \\ 8.00 & 0 & 0 \\ 4.00 & 0 & 0 \\ 11.00 & \vdots & 0 \\ 5.00 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 8.00 & \vdots & 0 \\ 3.00 & 0 & 0 \end{matrix} \right)_3^9 \end{pmatrix}_9.$$

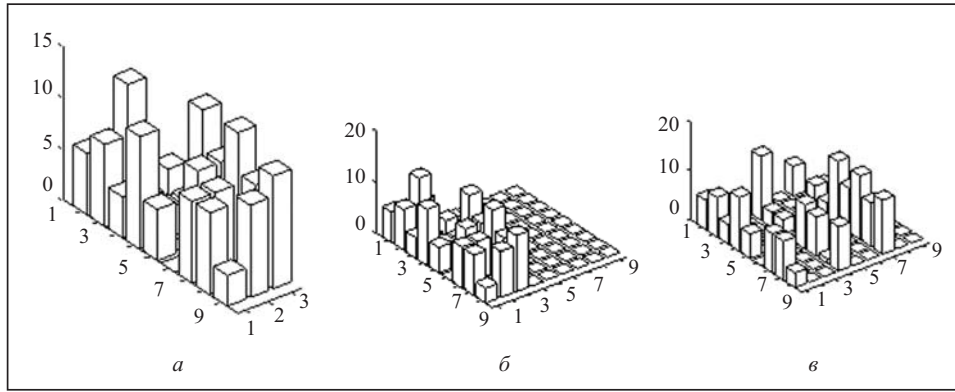


Рис. 1. Исходное множество (а), регуляризованные множества (б, в) данных, представленные с помощью Matlab-процедуры `bar(x)`, `bar(x1)`, `bar(x2)`

На рис. 1 представлены матрицы x , x_1 , x_2 в графическом виде.
 2⁰. Вычислим SVD-разложения¹ матриц x , x_1 и x_2 :

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(x):$$

$$u(:, 1) = (-0.23 \ -0.30 \ -0.21 \ -0.27 \ -0.35 \ -0.32 \ -0.50 \ -0.32 \ -0.40)^T,$$

$$\sigma_1 = 34.08, \ v(:, 1) = (-0.50 \ -0.48 \ -0.72)^T;$$

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(x_1):$$

$$u(:, 1) = (-0.23 \ -0.30 \ -0.21 \ -0.27 \ -0.35 \ -0.32 \ -0.50 \ -0.32 \ -0.40)^T,$$

$$\sigma_1 = 34.08, \ v(:, 1) = (-0.50 \ -0.48 \ -0.72 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T;$$

$$[u \ s \ v] = \text{svd}(x_2):$$

$$u(:, 1) = (-0.23 \ -0.30 \ -0.21 \ -0.27 \ -0.35 \ -0.32 \ -0.50 \ -0.32 \ -0.40)^T,$$

$$\sigma_1 = 34.08, \ v(:, 1) = (-0.50 \ 0 \ 0 \ -0.48 \ 0 \ 0 \ -0.72 \ 0 \ 0)^T.$$

Поскольку сингулярные векторы $\sigma_1 \cdot u(:, 1)$ и $v(:, 1)$ являются ортогональными и согласно способу их определения всегда $\text{abs}(v(:, 1)) \in [0, 1]$ и $\text{abs}(\sigma_1 \cdot u(:, 1)) \in [0, \sigma_1]$, целесообразно придать $\text{abs}(v(:, 1))$ и $\text{abs}(\sigma_1 \cdot u(:, 1))$ смысл упорядоченных пар, образующих НМ, т.е. $\tilde{U}_v \stackrel{\Delta}{=} \{\sigma_1 \cdot \text{abs}(u(1, 1)) / \text{abs}(v(1, 1)), \sigma_1 \cdot \text{abs}(u(2, 1)) / \text{abs}(v(2, 1)), \dots, \sigma_1 \cdot \text{abs}(u(n, 1)) / \text{abs}(v(n, 1))\}$, где $\text{abs}(v(:, 1))$ выступает в роли ФП. Хотя теоретические исследования, подтверждающие математическую корректность такого обобщения отсутствуют, практические вычисления показывают абсолютную правдоподобность и прикладную пригодность такого допущения. Ниже приведены расчеты, подтверждающие это свойство БКП в контексте НМ.

На рис. 2 и 3 изображены пары сингулярных векторов, образующих БКП для матриц x_1 и x_2 . Для ИМД и БКП, полученных с учетом неоднозначности, были сформированы с помощью стандартных методов НМ, которые сравнивались с НМ типа $\tilde{U}_v \stackrel{\Delta}{=} \{\text{abs}(\sigma_1 \cdot u(:, 1)) / \text{abs}(v(:, 1))\}$.

На рис. 4 показаны НМ с треугольной ФП, сформированные стандартным методом, согласно которому НМ формируется как

$$\tilde{a} \stackrel{\Delta}{=} \{a^{\min} / \mu_{a^{\min}} = 0 \ a^{\text{aver}} / \mu_{a^{\text{aver}}} = 1 \ a^{\max} / \mu_{a^{\max}} = 0\}.$$

¹ Ввиду ограниченного объема статьи матрицы $[u \ s \ v]$ не приведены, для всех разложений сохранены только левый и правый сингулярные векторы, а также максимальное значение сингулярных величин: $u(:, 1)$, $v(:, 1)$ и σ_1 соответственно.

Для ИМД (0/0 6.5/1 13/0) (1) и кронекеровой аппроксимации ИМД (7/0 11/1 17/0) (2) вычисленное НМ имеет вид приблизительно $\tilde{9} = \{7.5/0 \ 9/1 \ 12.5/0\}$ (показано темным цветом). Нетрудно видеть, насколько эффективным является рассмотренный метод: ИМД имеет интервал длиной 13 усл. ед. и дефадзифицированное значение 6.5 (приблизительно 6.5), аппроксимация с помощью БКП (приблизительно 11) с длиной интервала 10 ед., вычисленное значение $\tilde{9}$ (приблизительно 9) с длиной интервала 5 ед.

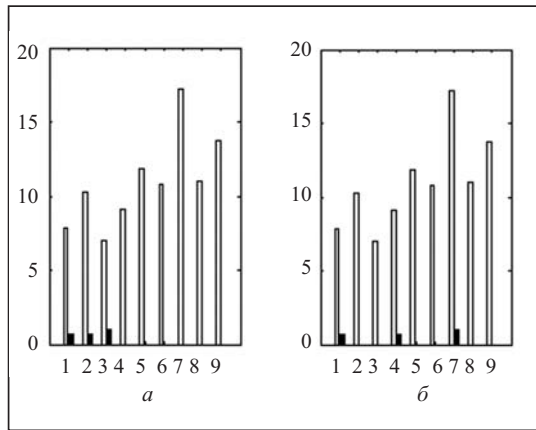


Рис. 2. Пары сингулярных векторов, образующих БКП: для матрицы $x_1: u(:, 1) \& v(:, 1)$ (а); для матрицы $x_2: u(:, 1) \& v(:, 1)$ (б); светлые столбцы — $u(:, 1)$, темные — $v(:, 1)$

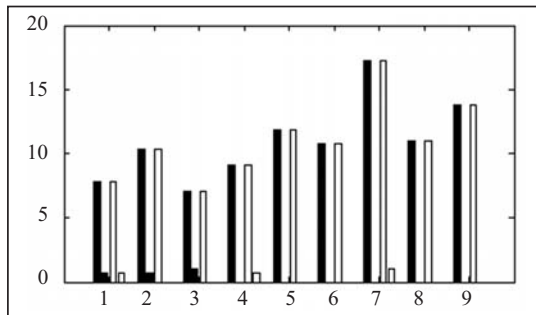


Рис. 3. Пары сингулярных векторов, образующих БКП для матрицы $x_1: u(:, 1) \& v(:, 1)$ (темные столбцы) и для матрицы $x_2: u(:, 1) \& v(:, 1)$ (светлые столбцы)

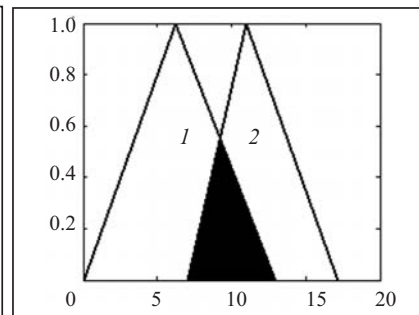


Рис. 4. Стандартное НМ с треугольной ФП для ИМД (1) и кронекеровой аппроксимации ИМД (2)

ПСЕВДОИНВЕРСНЫЕ СВОЙСТВА ТНМ-Гр

Ранее отмечалось, что одним из недостатков теории нечетких множеств (ТНМ) является отсутствие формального определения обратной величины для нечеткой переменной (НП). Тензорные модели НП-ИТГр дают возможность решения этой задачи. Из линейной алгебры [20] известно, что если \mathbf{A} — $m \times n$ -матрица rank r , то существуют ортогональные матрицы $\mathbf{U}_{m \times m}$ и $\mathbf{V}_{n \times n}$ такие, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{R} \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \mathbf{V}^T.$$

Псевдоинверсия \mathbf{A} по Мооре–Пенрозе, обозначаемая как \mathbf{A}^\dagger , есть $n \times m$ -матрица вида

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m} \cdot \mathbf{U}^T.$$

С учетом изложенного рассмотрим пример определения обратной НП приблизительно 5 на основании ИТГр. Пусть НП задана в виде $\tilde{5}_{\text{trimf}} \triangleq \{3/0 \ 5/1 \ 7/0\}$, ТГр $([3 \ 5 \ 7] \otimes [0 \ 1 \ 0])^T$ представлена как $(\tilde{5}_{\text{КП}}) = [000; 357; 000]$, т.е. $\tilde{5}_{\text{trimf}} \rightarrow (\tilde{5}_{\text{КП}})$.

Псевдообратная матрица имеет вид

$$(\tilde{5}_{\text{КП}})^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из SVD-разложения псевдообратной матрицы вытекает $[u \ s \ v] = \text{svd}(\cdot)$:

$$u = \begin{pmatrix} -0.33 & -0.94 & 0 \\ -0.55 & 0.19 & -0.81 \\ -0.77 & 0.27 & 0.69 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем левый и правый сингулярные векторы: $u(:, 1) = 0.11^{1/2} * [0.33 \ 0.55 \ 0.77] = [0.11 \ 0.18 \ 0.25]$; $v(:, 1) = [0 \ 1 \ 0]$. Формируем $\text{НП}^{-1} = \{0.11/0 \ 0.18/1 \ 0.25/0\}$.

Таким образом, $\text{НП} = \{3/0 \ 5/1 \ 7/0\} \rightarrow \text{НП}^{-1} = \{0.11/0 \ 0.18/1 \ 0.25/0\}$.

Отмечаем, что интуитивное и визуальное представление результата является корректным, поскольку $(\text{def}(\tilde{5}))^{-1} = 0.2$ и $\text{def}(\tilde{5}_{\text{КП}})^{-1} = 0.18$, где def — процедура дефадзификации, т.е. результаты дефадзификации практически совпадают.

Рассмотрим дефадзификацию на основании КП. Известно, что если задана НП $\tilde{X} = \{x / \mu^x\}_1^n$, $\tilde{X} \subset U$, то ее четкое значение может быть получено в результате выполнения процедуры дефадзификации, в частности по методу центра тяжести (ЦТ), т.е.

$$\tilde{X} = \{x / \mu^x\}_1^n \rightarrow x^{\text{def}} = \frac{\sum_{i=1, n} x_i \mu_i^x}{\sum_{i=1, n} \mu_i^x},$$

где x^{def} — дефадзифицированное значение \tilde{X} . Если существуют два НМ: $\tilde{X} \stackrel{\Delta}{=} \text{приблизительно } A = \{x / \mu^x\}_1^n \rightarrow x^{\text{def}}$ и $\tilde{Y} \stackrel{\Delta}{=} \text{приблизительно } B = \{y / \mu^y\}_1^m \rightarrow y^{\text{def}}$ и при этом $x^{\text{def}} \approx y^{\text{def}}$, то утверждение совпадения \tilde{X} с \tilde{Y} не только правдоподобно, но и корректно.

Дефадзификацию по Кронекеру определим в виде

$$\otimes_{x^{\text{def}}} = \frac{\sum_{i=1, n} x_i \otimes \mu_j^x}{\sum_{j=1, n} \mu_j^x} = \frac{\sum_{i=1, n} \left(x_i \cdot \sum_{j=1, n} \mu_j^x \right)}{\sum_{j=1, n} \mu_j^x} = \frac{\sum_{i=1, n} x_i \cdot \sum_{j=1, n} \mu_j^x}{\sum_{j=1, n} \mu_j^x} \sum_{i=1, n} x_i.$$

Практические расчеты показывают, что стандартная дефадзификация по методу ЦТ и дефадзификация по Кронекеру связаны соотношением

$$\otimes_{x^{\text{def}}} \cong x^{\text{def}} n, \quad \otimes_{y^{\text{def}}} \cong y^{\text{def}} m,$$

где n и m — число измерений и число элементов НМ \tilde{X} и \tilde{Y} соответственно.

Пример 1.

```
x=[0:10];
y=trapmf([0:10],[3 5 7 9]);
defuzz(x,y,'centroid') = 6.00 Стандартная дефадзификация по методу ЦТ
sum(sum(kron([0:10],[3 5 7 9]))) / sum(trapmf([0:10],[3 5 7 9])) = 55.00
55/(11-1)=5.5 Дефадзификация на основании КП
```

```

y1=trapmf([0:2:10],[3 5 7 9]);
defuzz([0:2:10],y1,' centroid') = 6.00 Стандартная дефаздификация по методу ЦТ
sum(sum(kron([0:2:10],[3 5 7 9]))) / sum(trapmf([0:2:10],[3 5 7 9])) = 30.00
30/(6-1) =6 Дефаздификация на основании КП

```

Пример 2.

```

X=[1:10];
a=gaussmf(X,[1,5])
 $\otimes x^{\text{def}} = 55 \rightarrow x^{\text{def}} = 5,5$ 
X=[1:2:10];
b=gaussmf(X,[1,5])
 $\otimes x^{\text{def}} = 25 \rightarrow x^{\text{def}} = 5$ 

```

Отметим, что для НМ с треугольной стандартной² ФП величина inf-нормы, представляющая наибольшую строчную сумму, совпадает с дефаздификацией по Кронекеру. Это следует из того, что для $\tilde{X} = \{x_1 / 0 \quad x_2 / 1 \quad x_3 / 0\}$ НМ-Гр в форме КП-гранулы $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \otimes [0 \ 1 \ 0]$ имеет соответственно вид $\mathbf{X} = (0 \ 0 \ 0; x_1 \ x_2 \ x_3; 0 \ 0 \ 0)$. Известно, что процедура Matlab norm (X, inf) вычисляет наибольшую строчную сумму, т.е. norm (X, inf) = max (sum (abs (X))) = (x₁ + x₂ + x₃), что, в свою очередь, является дефаздификацией по Кронекеру. Таким образом, этот вид нормы может использоваться для сравнения нечетких чисел в случае, если последние описывают идентичное семантическое высказывание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представление НМ-гранулы $\tilde{X} = (x_1 \mu^{x_1}; \dots; x_m \mu^{x_m})$ в виде кронекерова произведения (тензорной гранулы) векторов (одномерных массивов) $\{x_1 \dots x_m\}$ и $\{\mu^{x_1} \dots \mu^{x_m}\}$ позволяет существенно упростить процедуру обработки информации в условиях неопределенности за счет использования ИМД в первоначальном виде без эвристического определения ФП. Тензор-гранула как модель НМ позволяет реализовать все операции нечеткой математики и логики, решения нечетких уравнений и др.

Сингулярное разложение ИМД, рассматриваемого как многомерный массив, дает возможность при необходимости использовать его также в виде НМ-гранулы, компонентами которой являются правый и левый сингулярные векторы.

Отметим, что целостность динамической информационной структуры при использовании НМ как гранулы нарушена, так как при реализации нечеткой арифметики с компонентами НМ выполняются разные операции. Предложена новая форма НМ-гранулы — тензорное (кронекерово) произведение компонент, что позволяет сохранить свойство целостности гранул и существенно продвинуться в решении проблемы гранулярного компьютеринга — преобразования гранул.

Рассмотренные примеры показывают эффективность применения тензорных информационных гранул (полученных как для НМ, так и для исходных множеств данных, представленных в виде многомерных массивов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю., Минаева Ю. И. Гранулярный компьютеринг в системе нечетких множеств на уровне тензорных гранул // Пробл. информатизации и управления. — 2012. — № 4(40). — С. 51–61.

² Во всех случаях, когда в контексте упоминаются стандартные методы (построения ФП, дефаздификации, сингулярного разложения и др.), речь идет о соответствующих процедурах ППП Matlab.

2. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // *Fuzzy Sets and Systems*. — 1997. — **90**, N 2. — P. 111–127.
3. Zadeh L.A. Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities // *J. Statist. Planning and Inference*. — 2002. — **105**, N 1. — P. 233–264.
4. Aja-Fernández S., Alberola-López C. Fuzzy granules as a basic word representation for computing with words // *SPECOM'2004: 9th Conf. Speech and Computer* (St. Petersburg, Russia), Sept., 20–22, 2004. ISCA. — <http://www.isca-speech.org/archive>.
5. Lin T., Yao Y., Zadeh L. Data mining, rough sets and granular computing. — Heidelberg: Physica-Verlag Heidelberg, 2002. — P. 23–42.
6. Тарасов В.Б. Нестандартные множества и гранулированные вычисления // 5-е Поспеловские чтения «Искусственный интеллект — проблемы и перспективы». — http://www.posp.raai.org/data/posp_2011/tarasov.ppt.
7. Тарасов В.Б. Теория нечетких множеств: новый виток развития. Интеллектуальные системы и технологии // Науч. сессия МИФИ-2006. — Т. 3. — <http://www.library.mephi.ru/elbib/izdvuza/scientific-sessions?Year=2006...2>.
8. Вopenка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность / Пер. со словац. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. — 611 с.
9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 798 с.
10. Zadeh L.A. Generalized theory of uncertainty-principal concepts and ideas // *Computat. Statistics & Data Analysis*. — 2006. — **51**. — P. 15–46.
11. Wang Yi., Zadeh L.A., Yao Y. On the system algebra foundations for granular computing // *Int. J. Soft. Sci. and Comput. Intel.* — 2009. — **1**, N 1. — P. 64–86.
12. Давыдов А.А. Системная социология. — М.: КомКнига, 2006. — 192 с.
13. The structural representation of proximity matrices with MATLAB // *cda_toolbox_manual*. — http://cda.psych.uiuc.edu/matlab_class_material/clusteringchapter_r1.
14. Castellano G., Fanelli A.-M., Mencar C. Fuzzy information granules: a compact, transparent and efficient representation. — http://researchgate.net/profile/Corrado_Mencar/publication/220064409_Fuzzy_Information_Granules_a_Compact_Transparent_and_Efficient_Representation/file/d912f50977b51ef5be.pdf.
15. Pedrycz W. Fuzzy sets as a user-centric processing framework of granular computing // *Handbook of Granular Comput.* / W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (Eds). — John Wiley & Sons Ltd, 2008. — 1150 p.
16. Yao Y.Y. Granular computing: basic issues and possible solutions. — <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.64.8302&rep=rep1&type=pdf>.
17. Lin T.Y. Measure theory on granular fuzzy sets // *Fuzzy Inform. Proces. Soc., NAFIPS: 18th Intern. Conf. of the North American* (Jul., 1999). — 1999. — P. 809–813.
18. Langville A.N., Stewart W.J. The Kronecker product and stochastic automata networks // *J. Comput. and Appl. Math.* — 2004. — **167**, N 2. — P. 429–447.
19. Van Loan C. The ubiquitous Kronecker product // *Ibid.* — 2000. — **123**, N 1–2. — P. 85–100.
20. Van Loan C., Pitsianis N. Approximation with Kronecker products // *Linear Algebra for Large Scale and Real Time Applications* / M.S. Moonen, G.H. Golub (Eds). — Kluwer Publ., 1993. — P. 293–314. — <http://www.cs.duke.edu/~nikos/KP/home.html>.

Поступила 27.05.2013