УДК 519.9:681.3

И.Н. ПАРАСЮК, Ф.В. КОСТУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВАНИИ НЕЧЕТКИХ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ДОВЕРИЯ

Аннотация. Предложены основы математического обеспечения для исследования состояний сложных систем методами вероятностного вывода на базе нечетких сетевых моделей доверия и их расширений. Введены понятия нечетких потенциалов и операций над ними, разработан математический аппарат двухэтапного точного вероятностного вывода, процедура оценивания и прогнозирования состояний исследуемой системы, описаны архитектурные аспекты компьютерной реализации соответствующей информационной технологии.

Ключевые слова: нечеткая вероятность, нечеткий потенциал, сетевые модели доверия, нечеткие байесовские сети, нечеткие диаграммы влияния, трансформация сетей, вероятностный вывод, узловое дерево, информационные технологии.

ВВЕДЕНИЕ

Сети доверия, известные как байесовские сети (БС), а также структурно-функциональные расширения этих моделей — диаграммы влияния (ДВ), эффективно применяются для вероятностного моделирования состояний сложных систем в условиях неопределенности [1, 2]. При этом можно построить более адекватные модели исследуемых систем, а также получить более информативные результаты моделирования, если к решению этих проблем дополнительно привлечь аппарат теории нечетких множеств [3]. Цель данной работы — обобщив результаты исследований [4–7], с учетом известных в этой области достижений [8–13] создать основы математического обеспечения для изучения состояний сложных систем методами точного вероятностного вывода на базе нечетких сетевых моделей доверия и их расширений. В частности, при оценивании вероятности переменных в нечетком измерении посредством нечетких (толерантных или унимодальных) чисел [3] в работе введено понятие нечетких вероятностных потенциалов и операции над ними, осуществлена имплементация этих понятий в математический аппарат двухэтапного точного вероятностного вывода, процедур оценивания и прогнозирования состояний исследуемых систем, описаны некоторые аспекты компьютерной реализации соответствующей информационной технологии.

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Под нечеткой оценкой вероятности P (далее — нечеткой вероятностью) будем понимать нечеткое число $\mathrm{Im}(P)$, определенное на четком подмножестве универсального множества [0; 1], при этом $\mu(p)$ и $\mathrm{dom}\,(\mu)$ — его функция принадлежности и область ее определения соответственно.

Результатом операции $\otimes$ (сложения «+», умножения «·», вычитания «−») нечетких вероятностей P_1 и P_2, заданных α-сечениями [3] нечетких (толерантных или унимодальных) чисел, является нечеткая вероятность P_3:

$$\mathrm{Im}\,(P_3) = \mathrm{Im}\,(P_1) \otimes \mathrm{Im}\,(P_2) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [a_1^\alpha \otimes b_1^\alpha,\, a_2^\alpha \otimes b_2^\alpha]$$

с функцией принадлежности

$$\mu(p_3) = \sup_{p_3 = p_1 \otimes p_2} \min\,(\mu_1(p_1), \mu_2(p_2)),$$

где $p_1 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}\,(P_1))$, $p_2 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}\,(P_2))$, $p_3 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}\,(P_3))$.

Для ранжирования нечетких вероятностей выбран метод, основанный на центре тяжести, учитывающий природу нечеткой вероятности P для каждого α-сечения [14], вычисляемый следующим образом:

$$m_P = \int_{\mathrm{dom}\,(\mu)} p\mu(p)dp \Big/ \int_{\mathrm{dom}\,(\mu)} \mu(p)dp,$$

где $\mu(p)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\mathrm{Im}(P)$.

Масштабирование нечеткой вероятности P_1 с помощью нечеткой вероятности P_2 — это процесс преобразования нечеткой вероятности P_1 в P_3 по формуле

$$\mathrm{Im}(P_3) = \mathrm{Im}\,(P_1) \div \mathrm{Im}(P_2) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [a_1^\alpha / b_1^\alpha,\, a_2^\alpha / b_2^\alpha]$$

с функцией принадлежности

$$\mu(p_3) = \mu(p_1 / p_2),\ \ p_1 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}(P_1)),\ \ p_2 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}\,(P_2)),\ \ p_3 \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{Im}\,(P_3)),$$

здесь и далее «÷» и «/» — символы нечеткого и четкого деления соответственно.

Нечеткие вероятности P_i, $i = 1, 2, \ldots n$, нормализуются по формуле $\mathrm{Im}(P_i) = \mathrm{Im}(P_i) \div \mathrm{Im}(P)$, причем $P = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ (четкая единица).

НЕЧЕТКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Нечеткие вероятностные потенциалы. Расширением классического понятия распределения четких вероятностей является понятие нечеткого вероятностного потенциала.

Пусть $X=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — множество вероятностных переменных, область определения которых есть полное (исчерпывающее) множество взаимоисключающих событий. Декартово произведение областей определений переменных множества X образует пространство его состояний $\mathrm{dom}(X)$, а $x\in\mathrm{dom}(X)$ — информационное состояние (далее — состояние) ассоциируется либо с условно-зависимыми, либо с совместными событиями.

Нечеткий вероятностный потенциал (далее, где это не приводит к двусмысленности, — потенциал) — это функция $\varphi:\mathrm{dom}(X)\to\{P_i\}$ $(i=1,2,\ldots,m=$ $=|\mathrm{dom}(X)|)$, ставящая в соответствие каждому состоянию $x\in\mathrm{dom}(X)$ множество нечетких вероятностей, $\mathrm{dom}(\varphi)=\mathrm{dom}(X)$ — область определения потенциала. Потенциал, определенный над пространством состояний $\mathrm{dom}(X)$, обычно обозначают φ_X или $\varphi(X)$. Если элементы пространства состояний $\mathrm{dom}(X)$ — это условно-зависимые состояния, то потенциал $\varphi(X)$ — распределение условных нечетких вероятностей, в противном случае он определяет общее распределение нечетких вероятностей переменных множества X.

Над нечеткими вероятностными потенциалами, как и над четкими [6], определены операции сложения, умножения, вычитания, маргинализации (проецирования), масштабирования и нормализации.

Пусть φ_1 и φ_2 — потенциалы, определенные над $\mathrm{dom}(X)$, $X\subseteq W$, и $\mathrm{dom}(Y)$, $Y\subseteq W$, соответственно, а $z\in\mathrm{dom}(X\cup Y)$, $X\cup Y\subseteq W$ (W — множество переменных), есть некоторое состояние. Тогда сумма (произведение, разность) потенциалов $\varphi_1\otimes\varphi_2$ определяется суммой (произведением, разностью) нечетких вероятностей для соответствующих состояний пространства $\mathrm{dom}(X\cup Y)$ следующим образом:

$$(\varphi_1\otimes\varphi_2)(z)=\varphi_1(z_X)\otimes\varphi_2(z_Y),$$

где z_X и z_Y — проекции z на $\mathrm{dom}(X)$ и $\mathrm{dom}(Y)$ соответственно. Отметим, что перед сложением (умножением, вычитанием) потенциалов их области определения расширяются до $\mathrm{dom}(Z)=\mathrm{dom}(X\cup Y)$, а элементами этих областей становятся состояния z пространства $\mathrm{dom}(Z)$.

Пусть X — множество переменных, над которыми определен нечеткий вероятностный потенциал $\varphi(X)$, и пусть $W\subseteq X$. Тогда результат маргинализации $\varphi(X)$ на W, обозначаемый $\varphi^{\downarrow W}(X)$, будет нечетким вероятностным потенциалом, определенным над $\mathrm{dom}(W)$ и вычисляемым по одной из формул

$$\varphi^{\downarrow W}(X)=\varphi(W)=\sum_{y\in\mathrm{dom}(X\setminus W)}\varphi(x_W, y), \tag{1}$$

$$\varphi^{\downarrow W}(X)=\varphi(W)=\max_{y\in\mathrm{dom}(X\setminus W)}\varphi(x_W, y), \tag{2}$$

где $(x_W, y)\in\mathrm{dom}(X)$.

Операции маргинализации (1) и (2) позволяют вычислить потенциал, определенный на множестве, которое является подмножеством области определения исходного потенциала. Они играют весьма важную роль в алгоритмах распространения доверия, в частности, используются для вычисления коэффициента обновления доверия. Локальные вычисления этого коэффициента с операцией sum-маргинализации потенциалов позволяют находить апостериорное распределение отдельно для каждой переменной вероятностной модели, а с операцией max-маргинализации — вычислить элемент пространства состояний, имеющий наибольшую нечеткую вероятность, одновременно для всех переменных вероятностной модели или получить оптимальное решение для модели принятия решений.

Масштабирование потенциалов осуществляется так:

$$(\varphi_1 \div \varphi_2)(z) = \begin{cases} \varphi_1(z_X) \div \varphi_2(z_Y), & \text{если } \varphi_2(z_Y) \neq 0, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где z_X и z_Y являются проекциями z на $\mathrm{dom}(X)$ и $\mathrm{dom}(Y)$ соответственно.

Нормализация потенциала выполняется следующим образом:

$$\eta(\varphi(X)) = \varphi(X) \div \sum_{x \in \mathrm{dom}(X)} \varphi(x).$$

Потенциалы решений и оценка полезности. Потенциал решения ψ — это структурное объединение нечеткого вероятностного потенциала $\varphi(X, D)$ и нечеткого потенциала полезности $u(X, D)$: $\psi = \{\varphi(X, D), u(X, D)\}$, где X и D соответственно множества вероятностных переменных и переменных-решений, $Z = X \cup D$. Потенциал полезности u — это нечеткий потенциал, связанный с переменной-решением (или ее следствиями) и оценивающий полезность принимаемого решения. Общая полезность принятых решений оценивается суммой конечного числа локальных потенциалов полезности, т.е. $u(X, D) = \sum_{i=1}^{k} u_i(Z_i)$. Пространство $\mathrm{dom}(Z_i)$ состоит из состояний таких подмножеств пространства $\mathrm{dom}(Z) = \mathrm{dom}(X, D)$, на которых определены локальные потенциалы полезности u_i.

Произведение $\psi_1 \cdot \psi_2$ потенциалов решений $\psi_1 = (\varphi_1, u_1)$ и $\psi_2 = (\varphi_2, u_2)$, определенных над $\mathrm{dom}(Z_2)$ и $\mathrm{dom}(Z_1 \cup Z_2)$ соответственно, вычисляется с помощью умножения и сложения нечетких вероятностей для соответствующих состояний из $\mathrm{dom}(Z_1 \cup Z_2)$ по формуле

$$\psi_1 \cdot \psi_2(Z) = (\varphi_1(Z) \cdot \varphi_2(Z), u_1(Z) + u_2(Z)),$$

где $Z = Z_1 \cup Z_2$ и хотя бы один из потенциалов ψ_1 или ψ_2 определен (или может быть приведен к этому) на $\mathrm{dom}(Z)$.

Масштабированием потенциала решений $\psi(Z) = (\varphi(Z), u(Z))$, определенного над $\mathrm{dom}(Z)$ с помощью потенциала решений $\psi(W) = (\varphi(W), u(W))$, является потенциал решений $\psi^*(Z)$, $W \subseteq Z$, вычисляемый с помощью масштабирования и вычитания нечетких вероятностей для соответствующих состояний по формуле

$$\psi^*(Z) = \psi(Z) \div \psi(W) = (\varphi(Z) \div \varphi(W), u(Z) - u(W)),$$

где $\varphi(Z) \div \varphi(W) = 0$, если $\varphi(W) = 0$, а $\psi(W)$ при необходимости расширяется, чтобы иметь область определения $\mathrm{dom}(Z)$ до выполнения масштабирования.

Операции маргинализации потенциала решений учитывают структуру данного потенциала. Пусть множество переменных, над которыми определен потенциал решений, удовлетворяет условию $W \subseteq Z$ и пусть $\psi(Z) = (\varphi(Z), u(Z))$. Тогда результатом sum-маргинализации $\psi(Z)$ на W будет потенциал $\psi^{\downarrow W}(Z)$, определенный над W и вычисляемый по формуле

$$\psi^{\downarrow W}(Z) = \left(\varphi^{\downarrow W}(Z), \sum_{y \in \mathrm{dom}(Z \backslash W)} \varphi(z_W, y) u(z_W, y) \div \sum_{y \in \mathrm{dom}(Z \backslash W)} u(z_W, y) \right),$$

где $(z_W, y) \in \mathrm{dom}(Z)$. Таким образом, вероятностная часть потенциала решения маргинализуется обычным способом, тогда как оценка полезности маргинализуется с помощью вычисления центра тяжести нечетких параметров. Результатом max-маргинализации $\psi(Z) = (\varphi(Z), u(Z))$ на $W \subseteq Z$ есть потенциал $\varphi^{\downarrow W}(Z)$, определенный над W и вычисляемый по формуле

$$\psi^{\downarrow W}(Z) = (\varphi(z_W, y^*), (\varphi \cdot u)(z_W, y^*) \div \varphi(z_W, y^*)),$$

где y^* максимизирует $(\varphi \cdot u)(z_W, y)$ для каждой проекции состояния $y \in \mathrm{dom}(Z \setminus W)$,

т.е. $y^* = \arg \max\limits_{y \in \mathrm{dom}(Z \setminus W)} (\varphi \cdot u)(z_W, y),\ z_W \in \mathrm{dom}\,(W)$.

Нормализация составного потенциала решения ψ_Z выполняется с помощью нормализации каждой его части: $\eta(\psi(Z)) = \{\eta(\varphi(Z)), \eta(u(Z))\}$.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ВЫВОД НА НЕЧЕТКИХ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЯХ ДОВЕРИЯ

В общем случае цель задач вероятностного вывода, решаемых в процессе моделирования на нечетких сетевых моделях доверия, — установить, как изменяются нечеткие вероятности переменных модели, если известно, что некоторые из них находятся в определенных состояниях. Оригинальный подход и эффективные алгоритмы решения этой NP-сложной задачи изложены в [8, 9]. Отметим два этапа в этом подходе: трансформацию исходной сети в структуру типа «узловое дерево» и решение на нем задач вероятностного вывода.

Нечеткие байесовские сети и диаграммы доверия. Байесовская сеть $N = (X, G, \Phi)$ называется нечеткой (рис. 1, *а*), если она состоит из:

— ациклического орграфа $G = (V, E)$ с узлами $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и дугами $E = V \times V$;

— множества вероятностных переменных X, которые представлены вершинами графа G;

— множества нечетких вероятностных потенциалов $\Phi = \{\varphi(X_{v_1} \mid X_{pa(v_1)}), \ldots$ $\ldots, \varphi(X_{v_n} \mid X_{pa(v_n)})\}$, представляющих априорное распределение нечетких вероятностей (условных или маргинальных), здесь и далее $X_{pa(v)}$ — множество родительских переменных для подмножества переменных $X_v \in X$.

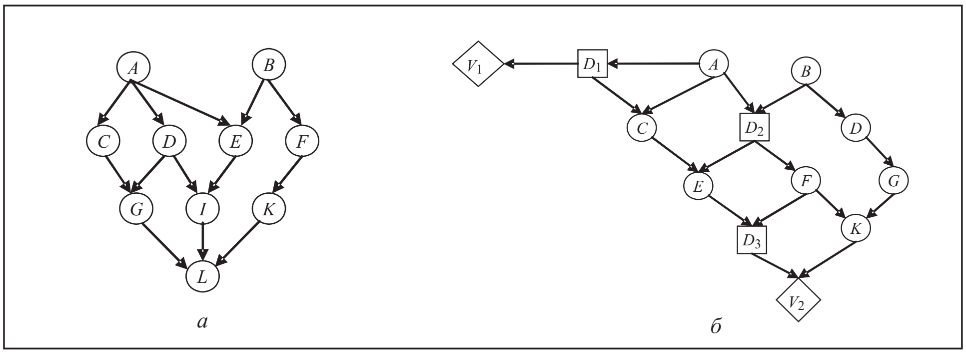

Рис. 1. Примеры графовых моделей НБС (*а*) и НДВ (*б*)

Нечеткая ДВ (НДВ) — одно из структурно-функциональных расширений нечетких БС (НБС). Формально ДВ $N = (X, G, \Phi, U)$ называется нечеткой, если в ее основе лежит нечеткая БС, дополненная следующими элементами:

— множеством переменных решений D таких, что $Z = X \cup D$ представлены вершинами в G;

— множеством функций полезности U, содержащим по одному нечеткому потенциалу полезности $u(X_{pa(v)})$ для каждого узла в подмножестве оценочных узлов $V_U \subset V$.

В настоящей статье рассмотрены переменные НБС и НДВ с дискретными значениями.

Графически вершины ДВ изображаются в виде круга (вероятностная вершина), прямоугольника (вершина-решение) и ромба (вершина — оценка полезности или риска, соответствующая потенциалу полезности). Функциональные дуги (заканчивающиеся в вершинах-оценках) показывают влияние состояний вероятностных вершин и вершин-решений на оценку принимаемого решения. Информационные дуги (заканчивающиеся в вершине-решении) указывают, что решение в конце дуги принимается на основе ранее известных состояний всех вершин в начале соответствующих дуг.

Узловые деревья и методы их построения. Наиболее принципиальный и сложный шаг в процессах трансформации четких или нечетких сетей доверия — триангуляция первично преобразованного графа (морального графа). Собственно поэтому разработка эффективных алгоритмов триангуляции, в том числе эвристических, при построении интеллектуальных систем, основанных на графовых моделях, является по-прежнему весьма актуальной и нетривиальной задачей и в данной статье ей уделено особое внимание.

Для строгости изложения и однозначного понимания прежде, чем описать предложенный алгоритм трансформации, приведем согласно [5] определения некоторых ключевых понятий.

Граф G^m называется моральным, а процесс его создания — морализацией, когда он получен из входного ациклического орграфа после выполнения следующих действий: если узел имеет несколько родительских узлов, тогда все они попарно соединяются ребрами, т.е. родительские узлы «женятся»; все дуги входного графа заменяются ребрами.

Кликой C_U, заданной над подмножеством вершин $U \subseteq V$, называется такое подмножество вершин, в котором они образуют полный подграф графа G^m.

Сепаратором S_{AB}, являющимся нагрузкой для ребра между кликами C_A и C_B, называется клика, заданная пересечением клик $S_{AB} = C_A \bigcap C_B$.

Дерево называется узловым или соединительным, если его вершины — это клики и для любых двух клик: C_A и C_B, $C_A \neq C_B$, выполняются условия $C_A \not\subset C_B$ и $C_B \not\subset C_A$, а также на пути между любой парой клик C_A и C_B объединение всех сепараторов содержит пересечение $C_A \bigcap C_B$.

Узловое дерево называется строгим, если оно имеет хотя бы одну вершину R, отличную от других вершин и называемую строгим корнем, для которой каждая пара смежных клик C_A и C_B в этом дереве (где C_A находится ближе к R, чем C_B) имеет следующее свойство: элементы клики C_B частично упорядочены так, что элементы сепаратора S_{AB} предшествуют элементам $C_B \setminus C_A$. Это свойство гарантирует, что максимально ожидаемая полезность будет получена после применения к дереву алгоритма распространения доверия. Частичный порядок на множестве вершин начального графа устанавливается во время процесса преобразования начального графа в узловое дерево. Каждая вершина узлового дерева получает имя в процессе создания соответствующей клики.

Граф называется хордальным, если в нем каждый цикл с длиной более 3 имеет хорду. Поскольку любой простой цикл в хордальном графе является треугольником, такой граф еще называют триангулированным, а процесс его получения — триангуляцией [5].

Таким образом, для преобразования исходного графа G в кластерное дерево нужно выполнить следующую последовательность трансформаций [1, 2, 5], а именно осуществить морализацию графа G, создав моральный граф G^m, триангуляцию морального графа G^m, создав хордальный граф G^H и декомпозицию хордального графа на клики, а также создать множество сепараторов и, соединив ими клики, образовать узловое дерево.

Рассмотрим перечисленные этапы трансформации на примерах НБС и НДВ (см. рис. 1).

Для построения морального графа из НДВ необходимо выполнить следующие шаги:

1) в соответствии с временным порядком рассмотрения вершин-решений τ, заданном для НДВ, для каждой вершины-решения D_i создать множество вероят-

ностных вершин I_i, называемое информационным, состоящее из родительских вершин для D_i;

2) удалить ссылки, указывающие на вершины-решения;

3) добавить ребра для каждой пары узлов с общим ребенком (в том числе, если общий узел является вершиной-оценкой);

4) заменить дуги ребрами;

5) изъять вершины-оценки.

Поскольку вершины-оценки могут порождать моральные ребра, следовательно, важно их удалять после морализации. Для НБС, где существуют вершины одного типа — вероятностного, выполняются только шаги 3 и 4.

В основе алгоритма триангуляции морального графа лежит идея элиминации вершины (удаление по определенному правилу) из графа G^m. Во время элиминации вершина морального графа G^m удаляется, а сам граф дополняется ребрами, которые попарно соединяют все вершины, смежные с удаляемой. Такие ребра называют хордальными. Алгоритм триангуляции морального графа, полученного из НДВ, предусматривает последовательную элиминацию вершин в соответствии с временным порядком τ, т.е. соответствует последовательности информационных множеств и вершин-решений $I_{h+1}, D_h, I_h, D_{h-1}, \ldots, D_1, I_0$, где $1 \le h \le n$.

Качество и время проведения триангуляции существенно зависят от эвристического критерия $c(v)$, с помощью которого определяется порядок элиминации вершин. Критерием $c(v)$ [1], не зависящим от интерпретации случайных величин, является выбор вершины таким образом, чтобы число дополнительных ребер, которые необходимо добавить в граф после удаления вершины, было минимальным. Такой критерий $c(v)$ позволяет получить хордальный граф для произвольного морального графа. Согласно [10] оценка времени выполнения алгоритма триангуляции (на основе элиминации вершины) с учетом применения критерия $c(v)$, т.е. зависимость количества операций в алгоритме от n — количества вершин в графе, равна $O(n^3)$.

В предложенном модифицированном алгоритме триангуляции используются следующие обозначения: $ne(v)$ — множество вершин, смежных с вершиной v; K_v — связный подграф графа G^m, где $K_v = v \cup ne(v)$; $\mathrm{List}(K)$ — список всех K_v, т.е. $\mathrm{List}(K) = \{K_{vi} \mid v_i \in V\}$; F_v — количество дополнительных ребер, дополняющих K_v до клики C_v; $c(K_v)$ — критерий для выбора K_v, которому соответствует минимальное F_v или наименьшее пространство состояний вершин, входящих в его состав, в случае равенства; k — среднее количество ребер, инцидентных вершинам в графе G^m.

Модифицированный алгоритм триангуляции (на основе элиминирования вершин) состоит из подготовительных действий (препроцессинга) и основного алгоритма.

Алгоритм препроцессинга.

1. Для каждой вершины G^m вычислить K_v, F_v, добавить K_v в список $\mathrm{List}(K)$.

2. Отсортировать список $\mathrm{List}(K)$.

Модифицированный алгоритм триангуляции.

1. Все вершины ненумерованы, счетчик вершин $i = n$ и счетчик информационных множеств $j = h+1$.

2. Пока существуют ненумерованные вершины:

2.1. Если существует $I_j \ne \varnothing$, то выбрать из $\mathrm{List}(K)$ такое K_v, что вероятностная вершина $v \in I_j$ и выполняется критерий $c(K_v)$, иначе выбрать вершину-решение $v = D_{j-1}$ и уменьшить j на единицу.

2.2. Отметить выбранную вершину номером i, т.е. $v_i = v$.

2.3. Создать клику C_i, состоящую из v_i и ее ненумерованных соседей.

2.4. Удалить K_v из списка $\mathrm{List}(K)$ и уменьшить i на единицу.

2.5. Повторить для каждого дополнительного ребра $F_v = (s, t)$:

2.5.1. Добавить ребро (s, t) в K_s, вычислить F_s.

2.5.2. Добавить ребро (s, t) в K_t, вычислить F_t.

2.5.3. Для каждой вершины $r \in ne(s)$: если $t \in K_r$, то добавить ребро (s, t) в K_r, вычислить F_r.

2.5.4. Для каждой вершины $r \in ne(t)$: если $s \in K_r$, то добавить ребро (s, t) в K_r, вычислить F_r;

2.6. Удалить старые элементы K_s, K_t, K_r из списка $\mathrm{List}(K)$.

2.7. Вставить, сохраняя список $\mathrm{List}(K)$ отсортированным, новые элементы K_s, K_t, K_r.

С каждой кликой узлового дерева связан линейный список ListName, элементами которого являются наименования вершин начального графа (номер вершины, полученный после трансформации начального графа в узловое дерево, и строковое имя вершины), входящих в состав соответствующей клики. Алгоритмически для именования клики узлового дерева (после выполнения алгоритма триангуляции) нужно:

1) упорядочить список ListName по убыванию номеров вершин;

2) идентификатору клики присвоить номер первой вершины из списка ListName, который является уникальным, что следует из алгоритма триангуляции;

3) создать строковое имя клики как результат конкатенации строковых имен из списка ListName.

Отметим, что вычислительная сложность модифицированного алгоритма триангуляции всегда ниже сложности оригинального алгоритма $O(n^3)$ с аналогичным критерием $c(v)$ [1]. Для триангуляции морального графа, полученного из НБС, применяется алгоритм триангуляции, приведенный выше, в котором нет шага с выбором вершины-решения.

Множество клик, созданных на этапе триангуляции морального графа, порождает узловое дерево с помощью следующего алгоритма (здесь и далее операция «имя $\leftarrow$ выражение» обозначает наименование результата, полученного в ходе вычисления выражения):

1. Создать в соответствии с порядком элиминации вершин подпоследовательность $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$; $i \leftarrow n$ — счетчик клик из последовательности $\mathbf{C}$.

2. Повторить для каждой клики C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

2.1. Создать множество сепараторов $S_{ij} \leftarrow C_i \bigcap C_j$, где $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

2.2. Среди созданных сепараторов выбрать сепаратор S_{iq}, который содержит наибольшее количество вершин.

2.3. Соединить клики $C_i \bigcap C_q$.

В полученном узловом дереве удаляются клики, которые являются подмножествами других клик. Корень узлового (строгого) дерева, построенного на основе НДВ, — клика с наименьшим номером, а узлового дерева, полученного на основе НБС, — произвольная клика в нем. На рис. 2 показано строгое узловое дерево для НБС и НДВ (см. рис. 1).

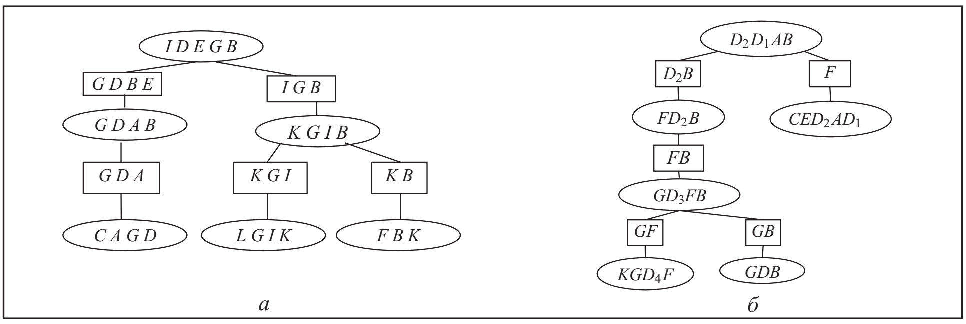

Рис. 2. Строгое узловое дерево, полученное для НБС (*а*) и НДВ (*б*)

Все многообразие решаемых задач вероятностного вывода на НБС можно сформировать в виде следующих типов запросов [1]:

1) вычислить апостериорное распределение нечетких вероятностей для каждой переменной НБС с учетом свидетельств (переменных с известными состояниями);

2) вычислить наиболее вероятное общее состояние всех переменных сетевой модели, которое наилучшим образом объясняет наличие свидетельств.

Задачи логико-вероятностного вывода на НДВ сводятся к оптимизационной задаче поиска оптимального решения с учетом состояний переменных. Ответом на эти запросы является результат применения алгоритма распространения доверия (АРД), использующий узловое дерево в качестве исходной структуры.

В основу АРД положены архитектурные принципы [9, 11, 12], однако некоторое предпочтение [13] отдано архитектуре HUGIN [12]. Общим принципом этих архитектур есть схема двухэтапного вычисления: первый этап — накопление свидетельств, и второй — их распространение. Функционирование АРД начинается с выбора корня R в узловом дереве: для дерева, построенного на основе НБС, корень — произвольная клика; для дерева, построенного на основе НДВ, — клика, содержащая переменную с наименьшим номером в элиминационной последовательности Λ. Потенциал каждой клики инициализируется либо произведением потенциалов, области определения которых являются подмножествами клики, либо объединением таких потенциалов в множество. В последнем случае их произведения вычисляются во время выполнения АРД. После выбора корня в узловом дереве осуществляются рекурсивные вычисления от листьев дерева к корню (этап накопления свидетельств) и от корня к листьям дерева (этап распространения свидетельств). Применяя рекурсивное описание этапов вычислений, накопление свидетельств можно реализовать с помощью алгоритма поиска в «глубину» [15], а распространение — алгоритма поиска в «ширину» [15]. Выполнение АРД осуществляется как для сетевой модели с априорными числовыми параметрами, так и при наличии свидетельств (апостериорный вывод). В последнем случае изменяются только оценки состояний, порядок выполнения АРД остается прежним.

Отметим, что АРД для НДВ осуществляется только для сбора свидетельств с учетом временного порядка τ принятия решений для НДВ и полученной для нее элиминационной последовательности Λ. Результатом применения АРД к НДВ является оптимальная политика принятия решений.

Общий функционально-архитектурный принцип АРД — наличие ключевого механизма (процедуры) обновления доверия (передачи сообщения), активно использующегося на обоих этапах для обновления нечетких потенциалов на основе потенциалов смежных клик. Принципиальное отличие архитектуры HUGIN от двух других архитектур с вычислительной точки зрения состоит в том, что для передачи сообщения выполняется операция деления нечетких потенциалов, определенных над сепараторами узлового дерева.

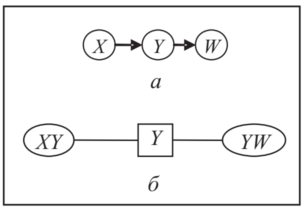

Рис. 3. Простая НБС (*а*) и соответствующее ей узловое дерево (*б*)

Рассмотрим процедуру передачи сообщения на примере узлового дерева (рис. 3, *б*). Пусть процедура маргинализации потенциала $\varphi^{\downarrow Y}(X)$, где $Y \subseteq X$, $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{dom}(X)$. Передача сообщения от клики $C_1 = \{X, Y\}$ к клике $C_2 = \{Y, W\}$ выполняется с помощью следующего алгоритма.

1. Вычислить маргинальное распределение $\varphi^*(Y) \leftarrow \varphi^{\downarrow Y}(C_1)$.

2. Вычислить коэффициент обновления доверия $\varphi^*(Y) \leftarrow \dfrac{\varphi^*(Y)}{\varphi(Y)}$, где $\varphi(Y)$ — нечеткий потенциал сепаратора $S = \{Y\}$, $\varphi(Y) \equiv 1$.

3. Вычислить обновленный потенциал клики $\varphi_{\text{new}}(C_2) \leftarrow \varphi(C_2) \cdot \varphi^*(Y)$.

Передача сообщения в обратном порядке — от клики $C_2 = \{Y, W\}$ к клике $C_1 = \{X, Y\}$ выполняется аналогично.

1. Вычислить маргинальное распределение $\varphi^{**}(Y) \leftarrow \varphi_{\text{new}}^{\downarrow Y}(C_2)$.

2. Вычислить коэффициент обновления доверия $\varphi^{**}(Y) \leftarrow \dfrac{\varphi^{**}(Y)}{\varphi^*(Y)}$.

3. Вычислить обновленный потенциал клики $\varphi_{\text{new}}(C_2) \leftarrow \varphi(C_2) \cdot \varphi^{**}(Y)$.

В результате проведенных вычислений маргинальное распределение нечетких вероятностей для X определяется на основе распределения совместных нечетких вероятностей $\varphi^*(C_1)$, для W — на основе $\varphi^*(C_2)$, для Y — на основе $\varphi^*(C_1)$, $\varphi^*(C_2)$ или $\varphi^{**}(Y)$. Если $\varphi^{\downarrow Y}(X)$ — операция sum-маргинализации, то результатом применения АРД к НБС или НДВ будет ответ на первый тип запроса. Если $\varphi^{\downarrow Y}(X)$ — операция max-маргинализации, то результатом применения АРД к НБС будет ответ на второй тип запроса.

Процедура передачи сообщения основана на двух операциях с нечеткими потенциалами: умножение и маргинализация потенциалов. Чтобы увеличить эффективность выполнения маргинализации потенциала клики, применяются различные эвристические подходы, описанные, например, в [7]. В настоящей работе для этой цели предложен модифицированный обобщенный алгоритм элиминации вершины, использующий модифицированный алгоритм триангуляции и применяемый как к НБС, так и к НДВ. При этом введены следующие обозначения: Φ — объединение множеств нечетких вероятностных потенциалов и потенциалов полезностей, определенных над кликой C, состоящей из n вершин; Z — множество переменных, для которых вычисляется маргинальное распределение нечетких вероятностей; $G(\Phi)$ — граф, соответствующий распределению общих нечетких вероятностей $\varphi(C) = \prod_{\varphi \in \Phi} \varphi \sum_{u \in \Phi} u$, где φ — вероятностные составные, u — оценочные составные потенциала-решений.

Приведем модифицированный обобщенный алгоритм элиминации вершины.

1. Для клики C создать граф $G(\Phi)$.

2. Выполнить морализацию графа, чтобы создать моральный граф $G^m(\Phi)$.

3. Выполнить модифицированный алгоритм триангуляции графа $G^m(\Phi)$: результат — элиминационный порядок σ.

4. Упорядочить в Λ вероятностные переменные в границах информационных множеств, которым они принадлежат, в соответствии с порядком σ получить новый порядок Λ'.

5. Вычислить оценочный потенциал клики $C: u_C \leftarrow \sum_{u \in \Phi} u$.

6. Повторить для каждой переменной $Y \in C \setminus Z$ в соответствии с порядком Λ':

   6.1. Создать множество потенциалов $\Phi_Y = \{\varphi \mid Y \in \text{dom}(\varphi) \cup u_C\}$.

   6.2. Вычислить, если Y вероятностная переменная, $\varphi_Y \leftarrow \sum_{y \in \text{dom(Y)}} \prod_{\varphi \in \Phi_Y} \varphi \cdot u_C$,

   иначе (если Y — переменная-решение) $\varphi_Y \leftarrow \max_{y \in Y} \prod_{\varphi \in \Phi_Y} \varphi \cdot u_C$.

   6.3. Изменить множество потенциалов $\Phi \leftarrow \Phi \setminus \Phi_Y \cup \{\varphi_Y\}$.

7. Вычислить маргинальный потенциал $\varphi(Z) \leftarrow \prod_{\varphi \in \Phi} \varphi$.

Поскольку НБС содержат только вероятностные вершины, приведенный выше алгоритм применяется к ним с такими упрощениями:

— отсутствуют шаги 4 и 5;

— шаг 6 выполняется только в соответствии с элиминационным порядком σ, полученным на шаге 3;

— на шаге 6.1 создается множество только из вероятностных потенциалов;

— шаг 6.2 выполняет вычисление для вероятностного потенциала по формуле $\varphi_Y \leftarrow \sum_{y \in \mathrm{dom}(\mathrm{Y})} \prod_{\varphi \in \Phi_Y} \varphi$.

Описанный поход является высоко эффективным уже в том случае, когда клики узлового дерева инициализируются более чем тремя нечеткими потенциалами.

АРХИТЕКТУРНЫЕ АСПЕКТЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ НЕЧЕТКИХ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Для автоматизации этапов моделирования на НБС и НДВ далее предложена послойная архитектура программной системы (табл. 1). Механизм обмена данными между компонентами системы спроектирован согласно модельно-ориентированному подходу и реализуется с помощью обмена метаданными между подсистемами. Таким образом, структура классов системы делится на четыре слоя: основа, ресурс, механизм вывода, управление.

Т а б л и ц а 1. Послойная архитектура программной системы

<table>
<tr><th>Слой</th><th colspan="4">Функции архитектурных слоев программной системы</th></tr>
<tr><td>Управление</td><td colspan="4">Создание, чтение, запись НБС или НДВ</td></tr>
<tr><td>Механизм вывода</td><td>Трансформация (модель, настройка)</td><td>Алгоритмы распространения доверия</td><td colspan="2">Информационная визуализация</td></tr>
<tr><td>Ресурс</td><td colspan="2">XML-ресурс</td><td colspan="2">База данных (технология ADO)</td></tr>
<tr><td>Основа</td><td>Вершины орграфа и узлового дерева</td><td>Дуги НБС, НДВ, ребра узлового дерева</td><td>Сепараторы узлового дерева</td><td>Потенциалы</td></tr>
</table>

Основа состоит из классов, поддерживающих спецификацию базовых структурных элементов, которые используются классами верхних уровней. В этот слой входят классы, представляющие вершины, дуги, ребра орграфа и узлового дерева, нечеткие вероятностные потенциалы вершин, индексы состояний в потенциалах и векторы ключей для установления соответствия между областями определения перемножаемых потенциалов.

Ресурс состоит из классов, предназначенных для описания информационных источников, представленных в формате стандарта PMML, использующим XML-формат для описания моделей данных, и базы данных, робота с которой организуется средствами технологии ADO. В процессе вызова метода записи НБС или НДВ проверяются соответствующие настройки на необходимость изменения внутреннего формата данных системы в формат, используемый внешней системой. Перед изменением формата над данными выполняется ряд трансформаций: дефаззификация, нормализация, отображение дискретных значений из одной шкалы в другую. В процессе считывания НБС или НДВ выполняется обратное изменение форматов и проверка на необходимость трансформации данных — дискретизации, фаззификации [16], нормализации, отображения дискретных значений из одной шкалы в другую.

Механизм вывода состоит из трансформации, алгоритма, информационной визуализации. Этот слой является основной частью бизнес-логики системы, поэтому каждая его составляющая имеет сложную структуру. Классы, которые принадлежат трансформации, концептуально объединяют две области: модель и настройку. Первая состоит из классов, представляющих метаданные, которые описывают набор входных атрибутов для построения графа, процедуры его конструирования, результат соответствующего этапа трансформации, процедуры проверки корректности модели. Основным классом пакета алгоритм является АРД, содержащий описание процедуры распространения доверия в узловое дерево. Используя настройки, заданные пользователем (вид маргинализации, наличие свидетельств), выполняется алгоритм вероятностного вывода.

К информационной визуализации принадлежат следующие классы:

— представляющие метаданные для визуализации НБС, НДВ, узлового дерева, таблиц потенциалов и результатов вычислений в виде диаграмм;

— описывающие входные параметры визуализации;

— специфицирующие процедуру визуализации изображения НБС, НДВ и узлового дерева.

Графический интерфейс системы позволяет пользователю создавать и вносить изменения в структуру НБС, НДВ и значения нечетких вероятностных потенциалов вручную или для автоматического построения соединяться с источником данных (в том числе с отдаленным), который содержит информацию о созданной ранее НБС или НДВ. С помощью интерфейса системы пользователь имеет возможность пересмотреть, как изменяются значения нечетких потенциалов на каждом этапе вероятностного вывода на НБС или НДВ.

Управление состоит из классов, специфицирующих процессы контроля за загрузкой, сохранением и внесением изменений в структуру и числовые параметры НБС или НДВ. В этот слой включены объекты, которые на основе технологии ADO устанавливают соединение с источником данных, получают в ответ на созданный пользователем запрос данные для построения НБС или НДВ. В результате система получает универсальный доступ (в том числе и отдаленный) к источникам, которые содержат информацию о НБС или НДВ.

В соответствии с приведенной архитектурой программная система совмещает ряд объектно-ориентированных подсистем, каждая из которых является самостоятельной универсальной программной единицей и предназначена для автоматизации отдельных этапов трансформации и выполнения АРД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описано построение новых нечетких сетевых моделей и на их основе программно-алгоритмических средств моделирования состояний сложных систем, в частности, нового (модифицированного) алгоритма трансформации нечетких байесовских сетей и диаграмм влияния в узловое дерево, использующего дополнительные структуры данных и эффективные алгоритмы сортировки для ускорения процесса построения узлового дерева. Этот алгоритм применен для модификации алгоритма маргинализации на основе элиминации переменной.

Построен также алгоритм моделирования распространения вероятностей, позволяющий вычислять апостериорные оценки состояний и наиболее вероятностные информационные состояния сложных систем на основе размытых знаний о предметной области путем использования нечетких вероятностных потенциалов. Для вычисления оценок доверия представляется возможность использовать альтернативные стратегии вывода, что позволяет сравнивать их результаты для разных моделей одного процесса или системы. Построенный алгоритм выполняется корректно и требует меньших затрат вычислительных ресурсов по сравнению с применением аналогичных алгоритмов распространения доверия. Примечательно, что основные свойства алгоритмов, разработанных для нечетких байесовских сетей, присущи для нечетких диаграмм влияний.

Представленные теоретические результаты служат методологической базой при построении соответствующей нечеткой информационной технологии моделирования состояний сложных систем в условиях неопределенности и размытости причинно-следственных связей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Probabilistic networks and expert systems / R.G. Cowell, A.P. Dawid, D.J. Spiegelhalter, S.L. Lauritzen. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 321 p.
2. Kjaerulff U.B., Madsen A.L. Bayesian networks and influence diagrams. — S.l.: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. — 318 p.
3. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня (сб. статей, пер. с англ.). — М.: Знание, 1974. — С. 5–48.
4. Верёвка О.В., Парасюк И.Н. О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниями // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 153–169.
5. Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В. Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компьютерная математика. — К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2008. — № 1. — С. 70–80.
6. Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В. Нечеткие потенциалы и вопросы их применения в алгоритмах распространения доверия на байесовских сетях // Там же. — 2009. — № 1. — С. 67–75.
7. Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В. Об одном эффективном алгоритме распространения вероятностей в нечетких байесовских сетях доверия // Там же. — 2010. — № 2. — С. 102–112.
8. Pearl J. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. — San Mateo: Morgan Kaufmann, 1991. — 552 p.
9. Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J. Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems // J. Royal Statist. Soc. Ser.B. — 1988. — **50**, N 2. — P. 157–224.
10. Heggernes P. Minimal triangulations of graphs: A survey // Discrete math. — 2006. — **306**, Iss. 3. — P. 297–317.
11. Shenoy P.P., Shafer G. Axioms for probability and belief-function propagation // Uncertainty in Artif. Intellig. — 1990. — **4**. — P. 169–198.
12. Jensen F., Lauritzen S., Olesen K. Bayesian updating in causal probabilistic networks by local computations // SIAM J. Comp. — 1990. — N 4. — P. 269–282.
13. Lepar V., Shenoy P. A comparison of Lauritzen–Spiegelhalter, Hugin and Shenoy–Shafer architectures for computing marginals of probability distributions / Ed. G. Cooper and S. Moral. — Proc. of the 14th Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-98). — S.l.: Morgan Kaufmann, 1998. — P. 328–337.
14. Detyniecki M., Yager R.R. A note on ranking fuzzy numbers using a-weighted valuations // Intern. J Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Syst. — 2000. — **8**. — P. 573–591.
15. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ. под ред. А. Шеня. — М.: МЦНМО:БИНОМ. Лаб. знаний, 2004. — 960 с.
16. Прикладные нечеткие системы / Пер. с япон. К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др. под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. — М.: Мир, 1993. — 368 с.

Поступила 27.05.2013