Сафонова Н.В., Баринов В.С.

ПРЕОДОЛЕВАЕМЫ ЛИ АПОРИИ ЗЕНОНА СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИКИ?

Парадоксы Зенона затрагивают множество масштабных, актуальных и взаимосвязанных проблем. Это вопросы непрерывного и дискретного, построения универсальной математической модели пространства-времени, проблема бесконечного, описания движения и другие. Многие отмахиваются от апорий Зенона, называя их гносеологическим кошмаром. Каков же современный взгляд на проблемы, поставленные Зеноном? Как правило, решения сводятся к двум типам: либо идет речь о сходимости указанного ряда, либо констатируется факт того, что парадоксы Зенона не преодолены и поныне (в основном, точка зрения современных авторов). Из последних работ наиболее интересной, на наш взгляд, представляется статья Руслана Смородинова [9].

Особняком стоит публикация С.А. Яновской «Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апорий Зенона»? [10]. С.А. Яновская предлагает собственное расширение аксиоматики движения, сформулированной японским логиком С. Шираиши. Эта аксиоматика исходит из того, что между любыми двумя точками, которые проходит движущееся тело, можно установить одно из следующих трех отношений: «предшествовать», «следовать за» и «быть неотличимыми». Таким образом, Яновская видит решение проблемы в построении более адекватной математической модели пространства-времени.

Авторам представляется интересным ответить на вопрос: разрешимы ли, в принципе, апории Зенона средствами математики? В работе получены следующие результаты:

1) предложено решение парадокса «Ахилл и черепаха» средствами математики, без обращения к аксиоме о бесконечном, возможно так, как это делали современники Зенона (эта часть работы выполнена Бариновым В.С.);

2) рассмотрен вопрос: можно ли, вообще, разрешить данную апорию средствами математики и, с этой точки зрения, определить в каком направлении искать пути решения.

В настоящее время существует достаточно большое разнообразие трактовок интересующего нас парадокса, при этом суть сводится к следующему. «Медленного (бегуна) никогда не догонит быстрый (бегун), ибо необходимо, чтобы догоняющий прежде достиг (той точки), откуда стартовал убегающий, поэтому более медленный (бегун) по необходимости всегда должен быть чуть впереди» [1, 239b].

Идея апории восходит к сцене, изложенной в гомеровской «Илиаде»: Ахилл гонится за Гектором и останавливается, так и не догнав быстроного врага. А если бы Ахилл гнался не за быстроногим Гектором, а за медленно ползущей черепахой? Из парадокса Зенона путем логических рассуждений следует, что Ахилл никогда не догонит черепаху.

Противоречие состоит в том, что эмпирический опыт говорит нам обратное: Ахилл догонит и перегонит черепаху. По преданию, этот аргумент весьма демонстративным образом предъявил Диоген: услышав апорию, он встал и начал ходить. Этот факт нашел отзвук у А.С. Пушкина:

«Движенья нет, сказал мудрец брадатый
Другой смолчал и стал пред ним ходить».

Зенон отбрасывает этот аргумент, так как, по его мнению, изменений (движения) не существует, наш эмпирический опыт – обман чувств.

Второй аргумент более весомый: решение парадокса предлагается средствами математики.

Как правило, в большинстве имеющейся на сегодняшней день литературе предлагается следующее решение апории средствами математики. Удобно предположить, что расстояние от старта до финиша, которое нужно преодолеть Ахиллу равно 1, черепахе нужно пройти меньшее расстояние, например, ½. Пусть для определенности Ахилл бежит в два раза быстрее черепахи. Тогда, пробежав расстояние ½, Ахилл обнаружит, что черепаха успела за тоже время преодолеть отрезок ¼ и по-прежнему находится впереди. И т. д. Таким образом, Ахиллу нужно преодолеть сумму бесконечного количества отрезков расстояний. На языке математики эта задача сводится к вычислению ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Средства математического анализа позволяют вычислить данный ряд, и он сходится к 1. На основе этих рассуждений делают вывод, что Ахилл преодолеет этот путь и, безусловно, догонит черепаху.

Обычно, приведенные выше рассуждения не принимаются как убедительные по той причине, что в основе аксиоматики математического анализа лежит постулат о существовании актуально бесконечных множеств. Свойства актуально-бесконечных множеств противоречивы (например, часть равна целому), и вполне закономерно, что их применение в некоторых случаях приводит к парадоксам. Среди них можно назвать парадоксы Бурали – Форти, Банаха – Тарского, «парадокс Тристама Шенди» и мн. др. (см., например, [2], [3]). Более того, многие считают что, сам парадокс «Ахилл и черепаха» возникает, вследствие того, что Зенон данной апорией указывал своим современникам на неаккуратное использование допущения о возможности делить отрезок неограниченное количество раз. Так, «Поль Танери считал, что рассуждения Зенона прежде всего были направлены против пифагорейского представления пространства как суммы точек» [4, с. 60].

Оригинальность предлагаемой в настоящей статье идеи, заключается в том, что решение парадокса средствами математики осуществляется без обращения к аксиоме о бесконечном. Ряд строится конструктивно и показывается, что сумма ряда ограничена. Приведем эти рассуждения.

Обозначим время, необходимое Ахиллу, чтобы добежать до места старта черепахи буквой *t*. Полагая, что их скорости постоянны и что Ахилл движется в *k* раз быстрее черепахи, получаем, что время, необходимое Ахиллу на второй этап своей «погони» будет *t*/*k*, а на следующий *t*/*k*² и т.д.

Воспользуемся доказательством от противного и предположим, что ряд

является бесконечно большим числом. Онтологически это означает, что для погони Ахиллу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t}{k^n} = t + \frac{t}{k} + \frac{t}{k^2} + \frac{t}{k^3} + \ldots$$

понадобиться бесконечно много времени, то есть он не догонит черепаху. Из допущения следует, что для любого числа C найдется такое число N, что

В неравенстве, слева, стоит сумма конечной геометрической прогрессии, для которой справедливо (Эту

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{t}{k^n} \geq C$$

сумму могли вычислять еще современники Зенона. Об этом см. ниже.):

$$\left(t + \frac{t}{k} + \frac{t}{k^2} + \ldots + \frac{t}{k^N}\right) \times \left(1 - \frac{1}{k}\right) = t + \frac{t}{k^2} + \ldots + \frac{t}{k^N} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \ldots - \frac{1}{k^{N+1}}$$

$$t + \frac{t}{k} + \frac{t}{k^2} + \ldots + \frac{t}{k^N} = \frac{t - \frac{t}{k^{N+1}}}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{t}{k-1} \times \frac{k^{N+1} - 1}{k^N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t}{k^N} = \frac{t}{k-1} \times \frac{k^{N+1} - 1}{k^N}$$

Теперь рассмотрим число $\tilde{C} = \dfrac{t \cdot k}{k-1}$

Поскольку t и k $(k > 1)$ заведомо определены, то число $\tilde{C}$ существует и вполне определено. Оказывается, что $\dfrac{t}{k-1} \times \dfrac{k^{N+1} - 1}{k^N} \leq \tilde{C}$

Действительно: $1 \leq 2$

$$k^{N+1} + 1 \leq k^{N+1} + 2$$

$$k^{N+1} - 1 \leq k^{N+1}$$

$$\frac{k^{N+1} - 1}{k^{N+1}} \leq 1$$

$$\tilde{C} \frac{k^{N+1} - 1}{k^{N+1}} \leq \tilde{C}$$

$$\frac{t \cdot k}{k-1} \frac{k^{N+1} - 1}{k^{N+1}} \leq \tilde{C}$$

$$\frac{t}{k-1} \frac{k^{N+1} - 1}{k^N} \leq \tilde{C}$$

А поскольку $\displaystyle\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} \frac{t}{k^N} = \frac{t}{k-1} \frac{k^{N+1} - 1}{k^N}$,

то и $\displaystyle\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} \frac{t}{k^N} \leq \tilde{C}$, для любого *N*.

Это означает, каким бы большим мы не взяли N, сумма прогрессии всегда будет меньше, чем

$$\tilde{C} = \frac{t \cdot k}{k-1}.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии ограничена.

Что нам дает тот факт, что последовательность ограничена? Понимание того, что Ахилл и черепаха встретятся в течение конечного промежутка времени. Аналогичным образом можно показать, что бесконечная сумма отрезков расстояний также ограничена.

В связи с тем, что Зенон не указывает значения скоростей Ахилла и черепахи (подразумевается, что они могут быть любые), может возникнуть вопрос: каковы должны быть их скорости, чтобы Ахилл не смог догнать черепаху?

Для решения используем свойства сходимости рядов. «Геометрическая прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (2)$$

сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geq 1$. Здесь областью сходимости является промежуток (-1,+1), из которого исключены оба конца x=-1, x=+1. Сумма ряда (2) в области сходимости равна 1/1-x» [5, с. 572]. В нашем случае, постоянно изменяющейся по закону геометрической прогрессии величиной x выступает 1/k, где k соотношение скоростей Ахилла и черепахи. Таким образом, если Ахилл и черепаха бегут со скоростями, отношение которых Vч/Va<1, то они встретятся (ряд сходится, причем к точно определенному числу 1/1-x, где x=Vч/Va). Если скорость Ахилла равна скорости черепахи или же черепаха бежит быстрее, Ахилл никогда не догонит черепаху (ряд расходится при Vч/Va≥1). Очевидно, что чем ближе значения скоростей Ахилла и черепахи, тем медленнее сходится ряд, тем дольше придется бежать Ахиллу к победе.

О том, что парадокс разрешим средствами математики (сумма ряда ограничена), современники указывали Зенону. Эти расчеты, естественно, не дошли до нас, но сведения о том, что такие возражения были в свое время представлены, сохранились. По мнению Г.Г. Цейтена [6], подобного рода доказательство можно было осуществить лишь способом вычисления геометрической прогрессии (мы полагаем, приблизительно теми же рассуждениями, какие изложены выше, так как наше доказательство также опирается на предположение о том, что древние греки должны были уметь вычислять сумму геометрической прогрессии). Итак, на основании того, что современники Зенона выдвигали подобный аргумент, историк математики Цейтен Г.Г. делает вывод о том, что др. греки умели вычислять сумму геометрической прогрессии:

«Противники Зенона должны были знать, что сумма рассматриваемых членов, взятых в бесконечном количестве равна n/n-1. Эти положительные результаты содержатся столь очевидным образом в нелепых, по мнению Зенона, рассуждениях его противников… Мы видим, таким образом, что в середине V века занимались суммированием, которое, производил впоследствии Архимед с помощью гарантирующего более надежные результаты способа» [6, с. 56].

И все же Зенон отвергает аргумент своих современников, где осуществляется доказательство средствами математики о том, что исследуемый ряд бесконечной суммы отрезков сходится к некоторому вполне определенному числу.

Почему же Зенон отверг математические доказательства, представленные ему современниками?

Ответ на этот вопрос лучше всего сформулировали Д. Гильберт и П. Бернайс. В своей книге «Основания математики» они пишут: «Обычно парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и, таким образом, дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить, …на самом деле все-таки должна завершиться» [7, с. 40].

Рассматривая апорию саму по себе, следуя только логике ее содержания, и не прибегая ни к собственному эмпирическому опыту, ни к математическим расчетам, нам остается только согласиться с А.Ф. Лосевым: «подобного рода аргументы нельзя считать ни глупостью, ни какой либо логической ошибкой. Если отвлечься от всего прочего и сосредоточиться только на самих этих аргументах, они неопровержимы» [8, с. 123].

Эмпирический опыт и математические расчеты как раз-таки и порождают апорию. Противоречие возникает между эмпирическим опытом (математические расчеты усиливают его) и логическим выводом, который с необходимостью следует из апории. Доказательство средствами математики было бы закономерным, если бы логика выводилась из математики. Но это не так, результаты К. Гёделя свидетельствуют об этом.

Таким образом, никакие «внешние» доказательства не могут разрешить апорию, более того они только усилят противоречие. В связи с этим, разрешение парадокса можно попытаться искать в логике человеческого мышления, либо представления о пространстве-времени не универсальны.

Мы предлагаем еще один способ преодоления парадокса, исследовав законы логики, применяемые в данной апории. Зенон рассуждает следующим образом: движения нет. Для доказательства этого тезиса воспользуемся доказательством от противного. Предположим, что движение существует, тогда…(текст апории). Из апории следует, что Ахилл никогда не догонит черепаху, но это противоречит эмпирическому опыту. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно, движения нет.

Нужно отметить, доказательство математическими средствами также осуществляется с помощью метода от противного (см. математические выкладки выше).

В основе подобного рода доказательств неявным образом лежат законы исключенного третьего и непротиворечия. Само содержание апории предполагает нарушение этих законов, следуя тексту парадокса, Ахилл никогда не догонит черепаху, наш опыт говорит о том, что Ахилл настигнет черепаху очень быстро.

Таким образом, можно предположить, что, пересмотрев эти законы, мы сумеем разрешить парадокс.

Все научное естествознание построено на классической логике, содержащей законы исключенного третьего и непротиворечия. Сомнения в их универсальности были еще у Аристотеля. В настоящее время существуют структуры, построенные на отказе от них.

Такова, в первую очередь, логика Васильева, отчасти интуиционистские теории в математике, логика рассуждений в некоторых теориях квантовой механики.

Подробно эти концепции обсуждались в нашей работе «Онтологические модификации закона исключенного третьего в свете последних достижений техники» [11, с. 287-289].

Кратко можно сказать следующее. В интуиционистских теориях отказ от закона исключенного третьего основан на критерии существования объекта в математике и невозможности определить его истинность или ложность в случае обращения к бесконечным процессам [12].

В XX веке пересматривается отношение к закону непротиворечия. Последний связан с законом исключенного третьего и в символической форме один может быть выведен из другого, но их содержание различно. Отказ от закона исключенного третьего онтологически может быть обоснован тем, что помимо установления истинности или ложности любого высказывания можно принять третий вариант – «неопределено». Поэтому существуют теории, в которых не выполняется закон исключенного третьего, но применяют закон непротиворечия. Такова, например, интуиционистская математика.

В классической логике считается, что нарушение закона непротиворечия приводит к доказуемости любого утверждения. Однако в научных теориях никто реально не строит противоречивые теории. «Доказуемость в теории противоречия перестает быть смертельно опасной угрозой. Одним из первых (еще в 1910 г.) сомнения в неограниченной приложимости закона непротиворечия высказал русский логик Н.А.Васильев. «Предположите, — говорил он, — мир осуществленного противоречия, где противоречия выводились бы, разве такое познание не было бы логическим?» [13, с. 20]

В воображаемой логике Васильева не выполняется закон непротиворечия.

«Тогда мы имели бы три основные формы суждения по качеству:

1. Простое утверждение: S есть P.
2. Простое утверждение: S есть non-P.
3. Соединение утверждения с отрицанием (индифферентное суждение): S есть P и non-P зараз.

Со всеми этими суждениями мы могли бы оперировать логически» [14, с. 126- 131].

Попытка разрешить противоречивое поведение квантовых частиц привела к идее создания логики, в которой бы не выполнялся закон исключенного третьего. Эту идею впервые высказал американский математик Д. фон Нейман. Позднее немецкий философ Г. Рейхенбах построил еще одну логику с целью устранения «причинных аномалий», возникающих при попытках применить классическое причинное объяснение к квантовым явлениям. В логике Рейхенбаха закон исключенного третьего и закон непротиворечия не выполняются (Reichenbach H. Philosophic foundations of quantum mechanics. - Berkley; Los Angeles, 1944). Таким образом, «многозначная квантовая логика, отказавшаяся от запретов исключенного третьего, в отличие от статичной аристотелевой логики, исповедует принцип «любой объект с определенными вероятностями может быть и А, и множеством не А» и как нельзя лучше отображает парадоксальные свойства физического вакуума» [15].

В философии признается академическим мнение, о том, что одним из свойств движения является его противоречивость. Противоречие обнаруживается в непрерывности и дискретности пространства (мы полагаем, пространство непрерывным – между двумя точками всегда найдется еще одна точка, и т.д., следовательно, точек может быть бесконечно много, с другой стороны, измеряя расстояние, время, скорость, оперируют всегда с конечными величинами). Но наибольшую трудность для описания представляет поведение пространства-времени в микромире. Именно по этой причине Г. Рейхенбах создает логику, в которой не выполняются закон исключенного третьего и закон непротиворечия, намереваясь подобрать соответствующую модель, в которой поведение квантовых частиц не будет противоречиво.

Единой теории пространства-времени для макро- и микромира нет. Не исключено, что если такая теория будет создана, свойство противоречивости движения будет устранено и в этой теории Ахилл догонит и перегонит черепаху, не нарушая логику рассуждений.

В заключении еще раз отметим: решение парадокса средствами математики лишь усиливают противоречие (к эмпирическому факту добавляется аргумент математики).

По нашему мнению, избежать парадокса можно двумя путями: пересмотрев законы логики, применяемые в апории, или (и)[1] изменив методологические основания представлений о пространстве-времени.

Источники и литература

1. Аристотель. Физика. – М.: Соцэкгиз, 1937. – 189с.
2. Ященко В.И. Парадоксы теории множеств. М.: МЦНМО (Библиотека "Математическое просвещение"), 2002. – Вып. 20. - 40 с.
3. Виленкин Н.Я. В поисках бесконечности. – М.: Наука, 1983. – 161с.
4. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. /Пер. с нем. Погребысского И.Б. – М.: Наука, 1969. – 328с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1964. – 870с.
6. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в ср. века. /Пер. А.П. Юшкевича. – М–Л, 1938. – 231с.
7. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: логическое исчисление и формализация арифметики. /Пер. с нем. Н.М. Нагорного. – М.: Наука, 1979. –557 с.
8. Лосев А.Ф. История античной эстетики: Ранняя классика. – М.: Высшая школа, 1963. – 583 с.
9. Руслан Хазарзар (Руслан Смородинов). Апории Зенона. //Zenoon.narod.ru/aporia.htm
10. Яновская С.А. Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апорий Зенона»? //Проблемы логики. – М.: ИФ АН СССР, 1963. – С. 116-136.
11. Сафонова Н.В. Онтологические модификации закона исключенного третьего в свете последних достижений техники. Культура народов Причерноморья. – № 106. – 2007. – С. 287 – 289.
12. Интуиционизм, /www.ru.wikepedia.org/wiki.
13. Ивин А.А. Логика: Учебник для гуманитарных факультетов. –М.: ФАИР-ПРЕСС, 2003. – 320 с.
14. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. – : Наука, 1989.–262с.
15. Журавлёв В.И. Квантовая логика физического вакуума. /ai.donetsk.ua/_u/iai/dtp/CONF/4 2004/artikles//stat24.html – 36k.

[1] Возможно, эта будет единная теория, такова, например, логика Рейхенбаха.