УДК 519.8

Л.М. КОЛЄЧКІНА[*], А.М. НАГІРНА[**]

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА МНОЖИНІ СПОЛУЧЕНЬ ПРИ ПОБУДОВІ КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖ

[*]Полтавський університет економіки і торгівлі, Полтава, Україна
[**]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН, Київ, Україна

Анотація. *Розглядається комбінаторна математична модель багатокритеріальної оптимізації, що використовується при побудові комп'ютерних мереж. Запропоновано новий підхід для розв'язання даного типу задач, заданих на конфігурації сполучень, з урахуванням їх представлення у вигляді графа.*
Ключові слова: *граф, підграф, функція, модель, багатокритеріальна оптимізація, конфігурація сполучень, генерування, мережа, вершина, локалізація.*

Аннотация. *Рассматривается комбинаторная математическая модель многокритериальной оптимизации, используемая при построении компьютерных сетей. Предложен новый подход для решения данного типа задач, заданных на конфигурации сочетаний, с учетом их представления в виде графа.*
Ключевые слова: *граф, подграф, функция, модель, многокритериальная оптимизация, конфигурация сочетаний, генерирование, сеть, вершина, локализация.*

Abstract. *A combinatorial mathematical model of multi-criteria optimization used under the construction of computer networks is considered in this paper. It is proposed a new approach to solve this type of problems defined on configuration of interfaces, taking into account their representation as a graph.*
Keywords: *graph, undirected graph, function, model, multi-criteria optimization, configuration of interfaces, generation, network, apex, localization.*

1. Вступ

Однією з важливих задач України на шляху до європейського інформаційного суспільства виступає побудова цифрової інфраструктури, основним показником якої є Інтернет, його користувачі і можливості доступу. Дослідження, спрямовані на підвищення продуктивності праці комп'ютерних мереж, стосуються протокольних засобів від фізичного до мережевого рівнів моделі взаємодії в комп'ютерних мережах [1, 2]. Але існує ряд способів підвищення продуктивності комп'ютерних мереж, зокрема, використання технології інтелектуальних антен, зміна територіального розташування станцій, рознесення сигналу по поляризації, використання технології, об'єднання каналів, використання багатоканального багатоінтерфейсного режиму роботи, забезпечення ефективного маршруту передачі інформації [1, 3–7]. У зв'язку с цим є актуальним представлення математичної моделі і методу її розв'язання, яка могла б бути покладена в основу оптимізації роботи комп'ютерних мереж. З цією метою є доцільним застосувати математичні моделі багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних конфігураціях, які широко використовуються як формальні моделі реальних систем.

Дана робота продовжує дослідження робіт [2, 7–10], в яких описуються моделі комбінаторної та векторної оптимізації, підходи до розв'язання та їх застосування при реалізації прикладних задач. Зокрема, в роботі описується застосування нового підходу до розв'язання комбінаторних задач локалізації функції на комбінаторній конфігурації сполучень [11–13], для якої визначено графове дерево [2].

2. Постановка математичної моделі задачі

Для постановки математичної моделі задачі сформулюємо суть досліджуваної проблематики: при проектуванні комп’ютерних мереж необхідно враховувати їх складну багаторівневу архітектуру, в якій рівні технологічної ієрархії є накладеними мережами і використовують різні технології. Важливим аспектом при функціонуванні комп’ютерних мереж є оптимізація її ресурсів. Особливо гостро питання оптимізації роботи мережі стоїть, коли при вирішенні задач необхідно передати інформацію, зокрема, визначити фізичні і логічні зв'язки між елементами на різних рівнях системи, забезпечивши при цьому сумісність різних комп’ютерних технологій і мереж. З цією метою доцільно використати математичний апарат векторної комбінаторної оптимізації [11–18].

Отже, є доцільним представити опис багаторівневої комп’ютерної системи за допомогою структурного графа на комбінаторних конфігураціях, який складається з підграфів [2]. Враховуючи показники ефективності роботи комп’ютерних мереж, які можна визначити лінійними функціями, модель задачі є задачею багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях [8].

На підставі встановленого взаємозв'язку між задачами оптимізації на комбінаторних конфігураціях та графами многогранників комбінаторних конфігурацій використовуються деякі структурні властивості допустимої області, сформульовано ряд тверджень [2, 8–9], які можна застосувати для побудови методу розв’язання комбінаторної задачі з використанням графів і для вирішення прикладних задач оптимізації роботи комп’ютерних мереж.

Введемо необхідні поняття. Нехай дано множину $A' = (1, 2, \dots, n)$. Сполучення без повторень з n елементів по r це r-елементна підмножина множини A'. Оскільки порядок запису елементів множини неістотний, то запишемо елементи в кожному сполученні у порядку зростання. Сполучення $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ розглядатимемо як рядок чисел $a_1, a_2, \dots, a_r$, де $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. C_n^r – кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r, де n, r – додатні цілі числа, причому $r \le n$. За даним сполученням можна знайти наступне, відповідно до лексикографічного порядку, сполучення, що і буде використано в подальшому викладі матеріалу.

Розглянемо таку математичну модель задачі: визначити набір функцій, які оптимізують деякі характеристики роботи комп’ютерних мереж:

$$F_\mu(x) = \max_{x \in R^t} \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}^k , \quad (1)$$

де $\mu = 1 \dots s$ при комбінаторній умові, яка враховує сполучні властивості області допустимих розв’язків задачі:

$$x = (x_{11}^1, \dots, x_{1n}^1, \dots, x_{1p}^p, \dots, x_{mp}^p) \in S_{mp}(G), \quad (2)$$

і при додаткових умовах, що можуть відображати інтенсивність надходження від користувачів запитів на резервування пропускної здатності каналу для передачі потоків інформації:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^k x_{ij}^k \ge b_i^k \text{, де } i \in J_m, k \in J_p \text{, де } t = pmn; \quad (3)$$

пропускну здатність каналу для потоку інформації, що надходить на передачу по каналу комп’ютерної мережі l_{ij}, $i \in J_m$, $j \in J_n$:

$$q_{\min} \le q_{ij}^{k} \le q_{\max} ; \tag{4}$$

число, що обмежує кількість запитів на передачу потоків інформації, які знаходяться в канальній черзі:

$$p(t) = \min(p_i(t)) . \tag{5}$$

Представлена вище модель задачі (1)–(5) є моделлю багатокритеріальної оптимізації на комбінаторній конфігурації сполучень і дає можливість оптимізувати характеристики роботи комп'ютерних мереж та заощадити ресурси підприємства чи організації. Безумовно, при розв'язуванні конкретної практичної задачі кількість функцій цілі може змінюватися, а також можуть коригуватися додаткові умови.

Для подальшої реалізації даної багатокритеріальної моделі розглянемо побудову послідовності значень лінійних цільових функцій по точках конфігурації сполучень, розкладених по підграфах. З точки зору економіко-математичних методів, є доцільним розглянути задачу комбінаторної оптимізації виду

$$Z(F,P): \max\{F(x,c) \mid x \in P, c \in C\},$$

яка полягає в максимізації функцій $F(a)$ на комбінаторній конфігурації сполучень $\in S_{mp}(G)$, де $F(x,c) = (c,x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Також має сенс розглянути задачу, де значення цільової функції перебуває в інтервалі $F(\bar{x}) \le F(x) \le F(\bar{\bar{x}})$. Тоді попередня задача буде набувати такого вигляду: визначити $\bar{x} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x)$ при $\bar{y} = F(\bar{x})$,

$$\bar{\bar{x}} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \bar{\bar{y}} = F(\bar{\bar{x}})$$

при умові $\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| \to \min$.

Така модель задачі дозволяє знайти діапазон пропускної здатності в сучасних комп'ютерних мережах.

Важливою задачею, яка може виникати при побудові моделі оптимізації комп'ютерних мереж, може бути математична модель залежності між елементами конфігурації сполучень за значенням лінійної цільової функції, що відображає упорядкування користувачів у комп'ютерній мережі.

Тоді є доцільним розглянути елементи конфігурації сполучень як точки арифметичного евклідового простору R^n або вершини структурного графа і задача (1), (2) може бути представлена в іншому математичному форматі запису.

Оптимізаційна задача вигляду

$$Z(\Phi(a), S_n^k(A)): \max\{\Phi(a) \big| a \in S_{qn}^k(A)\} , \tag{6}$$

яка полягає в максимізації функції $\Phi(a)$ на комбінаторній конфігурації сполучень $S_n^k(A)$, де $\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при додаткових обмеженнях (3)–(5).

Для реалізації вище сформульованих математичних моделей задач доцільно застосувати підходи, що ґрунтуються на властивостях комбінаторних конфігурацій, та їх представлення в вигляді графових структур [2, 9, 17, 18].

Зокрема, застосуємо координатний метод, що належить до класу методів направленого структурування і описаний в [2]. Даний метод запропоновано для однокритеріальної задачі з лінійною цільовою функцією, заданою на перестановках. Але може бути адаптований і для моделей багатокритеріальних задач на інших конфігураціях.

Враховуючи, що у загальному випадку багатокритеріальна задача оптимізації – це задача одночасної оптимізації декількох цільових функцій на множині допустимих розв'язків, то у багатокритеріальних задачах відшукання розв'язку майже завжди проводиться у межах компромісів або розв'язків, оптимальних за критерієм Парето.

Найбільш розповсюджені методи розв'язання багатокритеріальних задач можна розділити на такі групи:

– зведення сукупності локальних критеріїв (векторного критерію) до одного (скалярного критерію) за допомогою вагових коефіцієнтів, вибраних для кожного критерію (при цьому більш важливий критерій отримує більшу вагу);

– оптимізація за одним скалярним критерієм (найбільш вагомим) при включенні інших критеріїв у систему обмежень;

– мінімізація відхилень значень функцій мети від найкращих значень за всіма критеріями;

– ранжування сукупності критеріїв і послідовна оптимізація за кожним із них.

Джерелом додаткової інформації щодо вибору методу розв'язання багатокритеріальної задачі виступає особа, що приймає рішення (ОПР). Інакше кажучи, ефективний план, який приймається за розв'язок багатокритеріальної задачі, вибирається згідно з системою переваг ОПР, яка уточнюється або навіть лише формується у процесі розв'язування конкретної задачі. Таким чином, пошук розв'язку багатокритеріальної задачі проводиться у вигляді діалогу (в інтерактивному режимі) з ОПР, яка несе відповідальність за обране рішення та його наслідки. Тому для розв'язання запропонованої задачі застосуємо зведення її до скалярного вигляду.

Для зведення локальних критеріїв до скалярного виду застосовують метод рівномірної оптимізації і метод згортання критеріїв.

Отже, на початковому етапі розв'язування задачі (1)–(5) слід звести задачу або до однокритеріальної зазначеними вище методами, або застосовувати запропонований нижче метод окремо до кожної функції, об'єднавши при цьому отримані розв'язки.

3. Координатний метод локалізації значень лінійних функцій, заданих на конфігурації сполучень

Для подальшого викладу методу визначимо структуру конфігурації сполучень та можливі варіанти генерування її елементів. Застосуємо один із методів генерування конфігурації сполучень, який дає можливість, у залежності від складності задачі, представити елементи комбінаторної конфігурації у вигляді графа і описаний в [2]. Даний метод генерування полягає у виборі елементів з заданої упорядкованої множини за зростанням, тобто вибираються елементи для прикладу по два: перший – другий; перший –третій; перший – четвертий і т.д. Таким чином будується верхній підграф загального графа послідовності, далі – другий – третій; другий – четвертий і т.д.

За допомогою даного підходу до генерування елементів комбінаторної конфігурації сполучень можна зобразити елементи конфігурації у вигляді графового дерева. Дане дерево можна представити у вигляді розкладу на піддерева, тоді кожне піддерево формується з вершин, в яких елемент на останньому місці фіксується і є вибраним з початкової множини $a_1, a_2, \ldots, a_n$ як максимальний, а останні перебираються рекурсивним методом.

Слід зазначити, що дане дерево є орієнтованим, в якому визначений корінь – вершина, яка є лексикографічно більша останніх. Таким чином отримуємо орієнтоване (спрямоване) дерево – ациклічний орграф (орієнтований граф, що не містить циклів) – той, в якому тільки одна вершина має нульову напівстепінь входу, а всі інші вершини мають напівстепінь входу 1. Формально дерево конфігурації сполучень визначається як скінченна множина одного або більше вузлів.

Також відмітимо, що значення функції дерева сполучень у напрямку знизу вверх зростає, а зверху вниз – спадає з однаковим інтервалом при рівномірному розподілі значень коефіцієнтів, що обумовлено ієрархічною будовою дерева та лінійністю цільової функції. При цьому поняття «верх» або «низ» мають стабільний структурний зміст у відношенні піддерев і в рамках об'єднуючого дерева [2].

Для подальшого розв'язання поставленої задачі (1)–(5) визначимо такі правила:

а) якщо в даній вершині значення функції менше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, збільшуючи $(n-2)$, або $(n-1)$ координату;

б) якщо в даній вершині значення функції більше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, зменшуючи $(n-2)$, або $(n-1)$ координату.

Розв'язання задачі проводиться для всіх типів вершин досліджуваного графа. Кожній вершині графа, в залежності від її типу, можна поставити у відповідність свій підграф G_i. На підграфі визначається тип вершини, під яким розуміється таке: якщо остання координата для вершин усього підграфа постійна, то передостання і та, що передує їй, змінюються від більшої можливої координати до меншої.

Граф представляє мережу, де витоком є найвища і найлівіша вершина, а стоком – найнижча і найправіша вершина. В мережі кожна вершина визначається кодом $(i_1, i_2, ..., i_n)$, тобто номерами координати, які потім будуть переставлятися.

Для фіксованого типу вершин послідовно для кожного піддерева знаходяться необхідні вершини x^*, в яких $f(x^*) = y^*$. Початкову вершину дерева G_i будемо називати вершиною-витоком.

Алгоритм пошуку необхідної вершини для піддерева $G_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ можна поділити на три етапи.

Перший етап: побудова коду (що таке, означити) початкової вершини для G_i.

Другий етап: розгортання (що мається під розгортанням) дерева вздовж координати x_{n-1}.

Третій етап: розгортання дерева вздовж координати x_n.

Розглянемо детально кожний етап.

I. Нехай вибрано тип вершини $(i_1, i_2, ..., i_n)$, де $i_1 \cup i_2 \cup ... \cup i_n = \{1, 2, ..., n\}$, та номер піддерева i. Тоді покладемо: $x_n = i$; $x_{n-1} = \max\{N_n \setminus x_n\}$, $x_{n-2} = \max\{\mathrm{N}_n \setminus (x_{n-1}, x_n)\}$. Упорядкуємо числа $\{N_n \setminus (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\}$ по зростанню $j_1 < j_2 < j_3$. Тоді $x_1 = j_{i_1}$, $x_2 = j_{i_2}$, $x_3 = j_{i_3}$. Це і буде код головної вершини мережі G_i, який будемо позначати p_1 або q_1. Обчислимо значення цільової функції в цій вершині $f(p_1)$.

II. Розглянемо в цьому коді значення $x_k (k = 1, 2, 3, 4)$ та упорядкуємо за спаданням $x_4 = j_4 > j_3 > j_2 > j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_4 (або вниз) назвемо послідовність транспозицій $j_4 \Leftrightarrow j_3 \Leftrightarrow j_2 \Leftrightarrow j_1$, які, крім коду головної вершини, приводять до створення ще трьох кодів, які ми позначимо p_2, p_3 та p_4 і запишемо один під одним. Щоб знайти значення функції на цих сполученнях, необов'язково використовувати всі її координати. Достатньо знайти різницю значень функцій у сусідніх вершинах. Позначимо $\mu(\lambda)$

номер місця числа j_λ в коді перестановки $p_1(\lambda=1,2,3)$. Тоді значення $f(p_2)$ буде менше $f(p_1)$ на величину $\Delta_1=(j_4-j_3)(c_4-c_{(3)})$. У другому множнику постійно буде величина c_4, тому що у транспозиції завжди бере участь координата x_4. Аналогічно знаходимо другу та третю різниці. Очевидно, що у процесі подальшого пошуку необхідно використовувати тільки ті сполучення, для яких $f(p_1)\geq y^*$.

III. Розглянемо в коді вершини p_k (яку позначимо q_1, $(k=1,2,3,4)$ значення x_5,x_4,x_3,x_2,x_1 та упорядкуємо їх за спаданням $x_5=j_5>j_4>j_3>j_2>j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_5 (або праворуч) назвемо послідовність транспозицій $j_5\Leftrightarrow j_4\Leftrightarrow j_3\Leftrightarrow j_2\Leftrightarrow j_1$, які, крім коду головної вершини, повинні привести до створення ще чотирьох кодів, які ми позначимо q_2,q_3,q_4 та q_5. Але ці коди створювати необов'язково. Так само, як і при розгортанні графа вниз, значення функції $f(q_2)$ у вершині q_2 буде меншим від значення $f(q_1)$ на величину $\delta_1=(j_5-j_4)(c_5-c_{\mu(4)})$. За цією формулою знаходимо всі інші різниці. Послідовно віднімаючи $\delta_\lambda(4\geq\lambda\geq 1)$ від $f(q_1)$, можемо отримати дві такі ситуації:

1. Всі значення функцій більші y^*. В цьому випадку переходимо до розгортання наступного коду p_k.

2. На деякому кроці λ^* отримаємо значення функції у вершині, рівне y^* (або менше y^*). В першому випадку запам'ятовуємо код відповідної вершини. Переходимо до розгортання наступного коду p_k. При цьому кількість кроків обмежується до λ^*-1.

Після розгортання всіх $p_k(k=1,2,...,n)$ пошук необхідних вершин підграфа G_i з фіксованим i закінчується. Далі проводяться необхідні обчислення для всіх підграфів, використовуючи описані три етапи.

Основна пріоритетність алгоритму пошуку необхідних вершин координатним методом полягає у зменшенні виконуваних обчислень, оскільки обчислюються лише різниці значень функції, тоді як у горизонтальному методі кожний раз необхідно обчислювати значення функції в новій вершині і відтворювати код вершини. Крім того, координатний метод дозволяє декілька модифікацій, пов'язаних з обчисленням не тільки в кодах головних вершин (витоках), а і симетричним підходом відносно вершин-стоків та ін.

4. Висновки

У роботі описано модель багатокритеріальної оптимізації на конфігурації сполучень, яку можна використовувати при проектуванні комп'ютерних мереж, що мають складну багаторівневу архітектуру. Сучасна комп'ютерна мережа характеризується сукупністю різного роду новітніх технологій зв'язку, але особливої уваги заслуговує оптимізація її функціонування як на рівнях апаратури і програмного забезпечення, так і в цілому в єдиній системі взаємодій. Запропонована модель забезпечує опис багаторівневої комп'ютерної системи за допомогою структурного графа на комбінаторних конфігураціях сполучень.

Оскільки ефективність роботи комп'ютерної мережі характеризується значною кількістю показників, то в роботі визначено цільові функції лінійними, а модель вважається багатокритеріальною на конфігурації сполучень.

Встановлений взаємозв'язок між задачами оптимізації на комбінаторних конфігураціях та графами многогранників комбінаторних конфігурацій забезпечує використання структурних властивостей допустимої області сполучень, представляючи граф у вигляді орієнтовного дерева.

Координатний метод локалізації значення лінійної функції, заданої на конфігурації сполучень, забезпечує знаходження оптимальних розв'язків за скінченну кількість кроків і зменшення числа обчислень у порівнянні з горизонтальним методом.

Подальші дослідження будуть спрямовані на знаходження нових методів розв'язання даного типу задач, що моделюють комп'ютерні мережі, на інших конфігураціях з можливістю застосування графових моделей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Koliechkina L.N. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations / L.N. Koliechkina, O.A. Dvernaya, A.N. Nagornaya // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – N 4. – P. 154 – 161.
2. Донець Г.П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях / Г.П. Донець, Л.М. Колєчкіна. – Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. – 309 с.
3. Akyildiz I.F. Wireless mesh networks: a survey / I.F. Akyildiz, X. Wang, W. Wang // Computer Networks. – 2005. – Vol. 47, N 2. – P. 445 – 487.
4. Capone A. Multi-Layer Network Design with Multicast Traffic and Statistical Multiplexing / A. Capone, G. Carello, R. Matera // IEEE Global Telecommunications Conference (IEEE GLOBECOM). – Washington, USA, 2007. – P. 2565 – 2570.
5. Chiang M. Balancing Transport and Physical Layers in Wireless Multihop Networks: Joint Optimal Congestion and Power Control / M. Chiang // IEEE Journal on Selected Areas in Commun. – 2005. – Vol. 23, N 1. – P. 104 – 116.
6. Singh K. Review on Routing Protocols in Wireless Mesh Networks / K. Singh, S. Behal // International Journal of Application or Innovation in Engineering & Management (IJAIEM). – 2013. – Vol. 2, Iss. 2. – P. 143 – 149.
7. Агеев Д.В. Представление модели в виде многослойного графа для решения задач планирования инфокоммуникационной системы с учетом структурированной кабельной системы [Электронный ресурс] / Д.В. Агеев // Проблемы телекоммуникаций. – 2013. – № 3 (12). – С. 16 – 26. – Режим доступа: http://pt.journal.kh.ua/2013/3/12/102_ageyev_layer.pdf.
8. Семенова Н.В. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок / Н.В. Семенова, Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158 – 172.
9. Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация / Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
10. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К.: Наукова думка, 1981. – 288 с.
11. Семенова Н.В. Поліедральний підхід до розв'язання одного класу векторних задач комбінаторної оптимізації / Н.В. Семенова, Л.М. Колєчкіна, А.М. Нагірна // Доповіді НАН України. – 2009. – № 6. – С. 46 – 53.
12. Колечкина Л.Н. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений / Л.Н. Колечкина, Е.А. Родионова // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 152 – 160.
13. Колєчкіна Л.М. Властивості задач багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних множинах та методи їх розв'язання / Колєчкіна Л.М. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. – 162 с.
14. Донец Г.А. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10 – 16.
15. Донец Г.А. Экстремальные покрытия графов / Г.А. Донец, А.Я. Петренюк. – Кировоград: ОАО «Кіровоградське видавництво», 2009. – 170 с.
16. Донец Г.А. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 4. – С. 36 – 42.
17. Донец Г.А. Локализация значения линейной функции, заданной на перестановках / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. – № 1. – С. 76 – 81.

18. Донец Г.А. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 50 – 61.

Стаття надійшла до редакції 22.07.2016