УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК*

МЕТОД РІШЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ЦИЛІНДРА ЗА ДОПОМОГОЮ НОВОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

*Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», Дніпро,Україна

Анотація. *Розроблена математична модель температурних розподілів у кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності. Розроблено нове інтегральне перетворення для кусково-однорідного простору, за допомогою якого знайдено температурне поле суцільного кусково-однорідного кругового циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є.*

Ключові слова: *крайова задача Неймана, узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації.*

Аннотация. *Разработана математическая модель температурных распределений в кусочно-однородном цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Неймана математической физики для уравнения теплопроводности. Разработано новое интегральное преобразование для кусочно-однородного пространства, с помощью которого найдено температурное поле сплошного кусочно-однородного кругового цилиндра в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.*

Ключевые слова: *краевая задача Неймана, обобщенное уравнение переноса энергии, интегральные преобразования Лапласа, Фурье, время релаксации.*

Abstract. *A mathematical model of the temperature distribution in a piecewise homogeneous cylinder, which rotates at a constant angular velocity about the axis OZ, taking into account the finite speed of propagation of heat in the form of the Neumann boundary problem of mathematical physics for the heat equation was worked out. It was developed a new in-integrand conversion for piecewise-homogeneous space, with the help of which it was found the temperature field of continuous piecewise homogeneous circular cylinder in the form of convergent orthogonal series of Bessel functions and of Fourier.*

Keywords: *Neumann boundary value problem,generalized equation of energy transfer, the integral Laplace transforms, Fourier, relaxation time.*

1. Вступ. Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

Історично склалося, що в Україні розвинута мережа металургійних підприємств, на яких виробляють значну частину світового випуску сталі [1]. При прокаті металевих листів металевий лист, розжарений до температури 1200°C, рухається за допомогою валків. При цьому валки можуть сильно нагріватися і, при досягнені певних критичних температур, деформуватися. Що, у свою чергу, викликає брак виробництва [2, 3]. Отримання геометрично правильних розмірів прокату, зниження витрат прокатних валків напряму залежать від здатності управління тепловим профілем валків, оперативним управлінням їх тепловим розширенням по всій довжині бочки валка [4].

При розгляді ряду питань, пов'язаних з інтенсифікацією виробництва, отримання нового сортаменту, що вимагає жорсткі поля допусків як по площинності, так і поперечної різнотовщинності, змушує прокатників все більше уваги звертати на тепловий стан валків. Отже, виникає необхідність аналізу температури валка та аналітично вирахувати необхідне охолодження для нього. У зв'язку з цим теоретичний і практичний інтерес представляє вивчення теплових явищ, пов'язаних із охолодженням валків.

У даній роботі представлено кусково-однорідний циліндр як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку. Тепловий потік, який діє на валок, є наслідком взаємодії з розжареним металевим листом.

Як показує огляд літератури, теплообмін у циліндрах, які обертаються, вивчений на даний час ще недостатньо [5–8]. У [8] показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, який обертається, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

Тому для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв'язання отриманої крайової задачі для рівняння теплопровідності, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

2. Постановка задачі

Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля суцільного кругового циліндра скінченної довжини L, зовнішнього радіуса R у циліндричній системи координат (r,φ,z), кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса r, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, теплофізичні властивості якого в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній поверхні циліндра відомий тепловий потік $G(\varphi,z)$.

Відносну температуру циліндра $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можна представити у вигляді

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\begin{cases}\theta_1(\rho,\varphi,z,t), & якщо \quad \rho\in(\rho_0,\rho_1)\\ \theta_2(\rho,\varphi,z,t), & якщо \quad \rho\in(\rho_1,\rho_2)\end{cases}. \tag{1}$$

Відносні температури $\theta_s(\rho,\varphi,z,t)$ s-го шара циліндра обчислюються за формулами:

$$\theta_s(\rho,\varphi,z,t)=\frac{T_s(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0},$$

де $T_s(\rho,\varphi,z,t)$ – температура s-го шара циліндра, $T_{\max}$ – максимальна температура циліндра, $\rho=\dfrac{r}{R}$, $s=1,2$.

3. Розв'язок задачі

У [8] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [8], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, приймає вигляд

$$\gamma\, \mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності; $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища, t – час, τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області $D_s=\{(\rho,\varphi,z,t)\,|\,\rho\in(\rho_{s-1},\rho_s),\varphi\in(0,2\pi),\, \mathrm{z}\in(0,1),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що, з урахуванням прийнятих допущень, запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_s}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi\partial t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_s}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta_s}{\partial z^2}\right] \tag{3}$$

з початковими умовами

$$\theta_s(\rho,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_s(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0, \tag{4}$$

граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta=V(\varphi,z), \tag{5}$$

$$\theta_s(\rho,\varphi,0,t)=0,\quad \theta_s(\rho,\varphi,1,t)=0, \tag{6}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1,\varphi,z,t)=\theta_2(\rho_1,\varphi,z,t), \tag{7}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_1(\rho_1,\varphi,z,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_2(\rho_1,\varphi,z,t)}{\partial\rho}, \tag{8}$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\theta_1(\rho,\varphi,z,t)<\infty, \tag{9}$$

де $\rho_1=\dfrac{R_1}{R}$, $\rho_0=0$, $\rho_2=1, R_1$ – радіус межі шарів, λ_s – коефіцієнт теплопровідності, γ_s – щільність, c_s – питома теплоємність, $a_s=\dfrac{\lambda_s}{c_s\gamma_s}$ – коефіцієнт температуропровідності s-го шара циліндра, $\chi=\left(\dfrac{R}{L}\right)^2$, $\alpha_s^2=\dfrac{a_s}{R^2}$, $s=1,2$, $V(\varphi,z)=\dfrac{G(\varphi,z)\ \tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$.

Тоді рішення крайової задачі (3)–(9) $\theta_s(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ,z і φ, один раз по t в області D і неперервним на $\bar{D}$ [9], тобто $\theta_s(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\bigcap C(\bar{D})$, а функції $V(\varphi,z)$, $\theta_s(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [10]:

$$\left\{\begin{matrix}\theta_s(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\end{matrix}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{matrix}\theta_{s,n}(\rho,z,t)\\ V_n(z)\end{matrix}\right\}\cdot\exp(in\varphi), \tag{10}$$

де

$$\left\{\begin{matrix}\theta_{s,n}(\rho,z,t)\\ V_n(z)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\begin{matrix}\theta_s(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\end{matrix}\right\}\cdot\exp(-in\phi)d\varphi,$$

де $\theta_{s,n}(\rho,z,t)=\theta_{s,n}^{(1)}(\rho,z,t)+i\ \theta_{s,n}^{(2)}(\rho,z,t),\ V_n(z)=V_n^{(1)}(z)+i\ \mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{(2)}(z)$. i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta_S(\rho,\varphi,z,t)$ функції дійсні, обмежимося надалі розглядом $\theta_{s,n}(\rho,z,t)$ для $n=0,1,2,...,$ тому що $\theta_{s,n}(\rho,z,t)$ і $\theta_{s,-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [10]. Підставляючи значення функцій з (10) у (3)–(9), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\, t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\, t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial\, t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_{s,n}^{(i)}+\chi\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial z^2}\right]\quad(11)$$

з початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t}=0\,,\quad(12)$$

граничними умовами

$$\int\limits_0^t\left.\frac{\partial\theta_{2,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=V_n^{(i)}(z),\quad(13)$$

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0,t)=0,\quad \theta_{s,n}^{(i)}(\rho,1,t)=0\ ,\quad(14)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,z,t)=\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,z,t),\quad(15)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,z,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,z,t)}{\partial\rho},\quad(16)$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho,z,t)<\infty,\quad(17)$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n$, $\vartheta_n^2=\omega n$, $\mathrm{m}_1=2$, $\mathrm{m}_1=1$, $i=1,2$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (11) з умовами (12)–(17) інтегральне перетворення Лапласа [10]:

$$\tilde f(s)=\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\ \mathrm{d}\tau\,.$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$s\tilde\theta_{s,n}^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}(\tilde\theta_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r s\tilde\theta_n^{(m_i)})+\tau_r s^2\tilde\theta_{s,n}^{(i)}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\tilde\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\tilde\theta_{s,n}^{(i)}+\chi\frac{\partial^2\tilde\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial z^2}\right]\quad(18)$$

з граничними умовами

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\tilde{V}_n^{(i)}(z), \tag{19}$$

$$\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho,0,t)=0, \quad \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho,0,t)=0, \tag{20}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t), \tag{21}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}, \tag{22}$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho,z,t)<\infty, \tag{23}$$

де $\tilde{V}_n^{(i)}(z)=V_n^{(i)}(z)\left(1+\dfrac{1}{s\tau_r}\right)$, $(i=1,2)$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (18) інтегральне перетворення Фур'є:

$$\overline{f}(\lambda_m)=\int_0^1 f(x)\sin(\pi\cdot \mathrm{m}\cdot \mathrm{x})\,\mathrm{dx},$$

де $\lambda_m=\pi\cdot m$, $m=1,2,...,$ а формула оберненого перетворення має вигляд

$$f(x)=2\sum_{m=1}^{\infty}\sin(\pi\cdot \mathrm{m}\cdot \mathrm{x})\cdot\overline{f}(\lambda_m). \tag{24}$$

У результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$s\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}(\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r s\bar{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)})+\tau_r s^2\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}=\alpha_s^2\left[\frac{d^2\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}-\lambda_m^2\bar{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}\right] \tag{25}$$

з граничною умовою

$$\left.\frac{\partial\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\bar{\tilde{V}}_n^{(i)}, \tag{26}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\bar{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\bar{\tilde{\theta}}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t), \tag{27}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\bar{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\bar{\tilde{\theta}}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}, \tag{28}$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\bar{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}(\rho,t)<\infty. \tag{29}$$

Для розв’язання крайової задачі (25)–(29) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\widehat{f}(\mu_{n,k}) = \int\limits_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha(\rho)}\ \rho\ \mathrm{f}(\rho)d\rho \ = \ \sum_{s=1}^{2}\ \int\limits_{\rho_{s-1}}^{\rho_s} \frac{Q_s(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha_s^2}\ \rho\ \mathrm{f}(\rho)d\rho, \tag{30}$$

де
$$Q_0(\mu_{n,k}\rho),\quad \alpha(\rho) = \begin{cases} Q_1\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right),\ \alpha_1^2, & \textit{якщо}\quad \rho\in(\rho_0,\rho_1) \\ Q_2\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right),\ \alpha_2^2, & \textit{якщо}\quad \rho\in(\rho_1,\rho_2) \end{cases}.$$

Власні функції $Q_s(\mu_{n,k}\rho)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2Q_s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dQ_s}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\mu^2{}_{n,k}}{\alpha_s^2}Q_s = 0, \tag{31}$$

$$Q_1(0) < \infty,\quad \frac{\partial Q_2\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\partial\rho} = 0, \tag{32}$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right) = Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right),\quad \lambda_1\frac{\partial Q_1\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\partial\rho} = \lambda_2\frac{\partial Q_2\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\partial\rho}. \tag{33}$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (31)–(33), одержуємо:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right) = \frac{J_n\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)}{J_n\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)},\quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) = \frac{\Psi\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)}{\Psi\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}, \tag{34}$$

де $\Psi\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) = \dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) - J_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_n\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$, $J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно [9].

Власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\mu_{n,k}J_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)} = \sigma\frac{H\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}, \tag{35}$$

де $H\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) = \dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right) - J_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_n'\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$, $\sigma = \dfrac{\lambda_2\alpha_1}{\lambda_1\alpha_2}$.

Формула оберненого перетворення має вигляд

$$\mathrm{f}(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\ \widehat{f}(\mu_{n,k}), \tag{36}$$

де

$$\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2 = \frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2}\left\{\left(1-\frac{n^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\mu_{n,k}J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}\right]^2\right\}+\frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2}\left(1-\frac{n^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_2^2}\right)\left[\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2-$$

$$-\frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2}\left\{\left(1-\frac{n^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (25) з умовами (26)–(29) інтегральне перетворення (30), де власні функції $Q_s(\mu_{n,k}\rho)$ визначаються за формулами (34), а власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння (35) і, враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(i)}$:

$$s\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(i)} = q_{n,k}\left(\frac{Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)\tilde{V}_n^{(i)}}{\mu^2{}_{n,k}+\lambda_m^2}-\bar{\tilde{\bar{\theta}}}_n^{(i)}\right), \quad (37)$$

де $i=1,2$, $q_{n,k}=\mu^2{}_{n,k}+\lambda_m^2$.

Розв'язавши систему рівнянь (37), одержуємо:

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\bar{V}_n^{(i)}(\tau_r s^2+s+q_{n,k})+(-1)^{i+1}\omega n\bar{V}_n^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{(\tau_r s^2+s+q_{n,k})^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}, \quad (38)$$

де $i=1,2$, $\alpha_{n,k}=Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)$.

Застосовуючи до зображення функцій (38) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}(t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\{\bar{\tilde{V}}_n^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]+\bar{\tilde{V}}_n^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\}\cdot$$
$$\cdot(e^{s_j t}-1)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\{\bar{\tilde{V}}_n^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]+\bar{\tilde{V}}_n^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\} \quad (39)$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right),$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^{2} \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \{\bar{\tilde{V}}_n^{(2)}(s_j) \cdot \left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i \right] - \bar{\tilde{V}}_n^{(1)}(s_j) \cdot \left[\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) i \right] \} \cdot$$

$$\cdot (e^{s_j t} - 1) + \sum_{j=3}^{4} \zeta_{n,k}(s_j) \{\bar{\tilde{V}}_n^{(2)}(s_j) \cdot \left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i \right] - \bar{\tilde{V}}_n^{(1)}(s_j) \cdot \left[\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) i \right] \} \quad (40)$$

$$(e^{s_j t} - 1),$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \dfrac{0,5 s_j^{-1} \alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$, а значення s_j для $j = 1, 2, 3, 4$ визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \; s_{,3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (24) і (36) одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\hat{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t) + i \cdot \hat{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t) \right] \sin(\pi \text{ m z}) \right\rangle \cdot \frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\| Q_0(\mu_{n,k}\rho) \right\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення $\hat{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t)$ і $\hat{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t)$ визначаються за формулами (39), (40).

4. Висновки

У статті розроблено тривимірну математичну модель розрахунку температурних полів у кусково-однорідному круговому циліндрі в напрямку полярного радіуса, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ довжиною L, у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено аналітичний розв’язок одержаної узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра. Знайдений аналітичний розв’язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (у супутниках, прокатних валках, турбінах та ін.).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калініченко В. Вплив експлуатаційних факторів на напружено-деформований та граничний стан роликів машин безперервного лиття заготовок / В. Калініченко, Н. Гопкало // Вісник ТДТУ. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 41 – 51.

2. Капланов В. И. Некоторые вопросы к проблеме охлаждения прокатных валков / В.И. Капланов, А.С. Петренко, И.С. Сухоруков // Вісник Приазовського державного технічного університету. – (Серія «Технічні науки»). – 2010. – Вип. 20. – С. 94 – 97.

3. Моделирование теплового режима стана холодной прокатки с учетом различий в условиях охлаждения верхних и нижних валков / Э.А. Гарбер, В.О. Гусаров, Е.В. Дилигенский [и др.] // Металлург. – 2005. – № 6. – С. 66 – 69.

4. Гарбер Э.А. Моделирование теплового режима валков широкополосного стана горячей прокатки для определения эффективных режимов их охлаждения / Э.А. Гарбер // Металлы. – 2009. – № 3. – С. 34 – 47.

5. Голицына Е.В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына // Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46, № 6. – С. 905 – 910.
6. Громик А.П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2009. – 120 с.
7. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
8. Бердник М.Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається / М.Г. Бердник // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць / Ред. кол. О.М. Кисельова. – Дніпропетровськ: Вид-во «Ліра», 2014. – С. 26 – 35.
9. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б.М. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 384 с.
10. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування / Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 152 с.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2016