УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ[*]

ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

[*]Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Порогова функція, що зазвичай використовується для вимірювання інтервалу статистичної стійкості, не забезпечує коректний поділ процесів на статистично стійкі і статистично нестійкі процеси. Запропоновано варіант оптимізації порогової функції. Встановлено, що застосування на практиці оптимізованої порогової функції не завжди виправдано.*
Ключові слова: *статистична стійкість, параметр статистичної нестійкості, теорія гіпервипадкових явищ, гранично нестійкий процес.*

Аннотация. *Пороговая функция, обычно используемая для измерения интервала статистической устойчивости, не обеспечивает корректное разделение процессов на статистически устойчивые и статистически неустойчивые процессы. Предложен вариант оптимизации пороговой функции. Установлено, что использование на практике оптимизированной пороговой функции не всегда оправдано.*
Ключевые слова: *статистическая устойчивость, параметр статистической неустойчивости, теория гиперслучайных явлений, предельно неустойчивый процесс.*

Abstract. *The threshold function, usually used for the assessment of the interval of statistical stability does not divide processes correctly on statistically stable and unstable ones. The approach for optimization of the threshold function is proposed. It is found that using in practice of the optimized threshold function does not always justify.*
Keywords: *statistical stability, parameter of statistical instability, theory of hyper-random phenomena, limit unstable process.*

1. Введение

Физической основой математической статистики является феномен статистической устойчивости, проявляющийся в стабильности статистик (стабильности функций выборки). На протяжении веков считали, что феномен статистической устойчивости идеален в том смысле, что статистики, сформированные по реальным выборкам, обладают свойством сходимости или, иначе, реальные оценки состоятельны.

Экспериментальные исследования реальных процессов разной физической природы показывают [1–4], что реальные статистики тенденции к сходимости не проявляют. Тенденция к сходимости наблюдается лишь при небольшом объеме выборки. При большом же объеме она отсутствует.

Разные процессы и разные статистики обладают разной степенью статистической устойчивости. Для характеристики степени статистической устойчивости процессов по отношению к определенным статистикам используют различные параметры статистической неустойчивости. К ним относятся, например, зависящие от объема выборки N параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N и по отношению к среднеквадратическому отклонению (СКО) Γ_N, а также связанные с ними параметры $h_N = \gamma_N / \gamma_{0N}$, $H_N = \Gamma_N / \gamma_{0N}$.

Параметры γ_N и Γ_N – безразмерные. Они представляют собой нормированные дисперсии соответственно выборочного среднего и выборочного СКО, а γ_{0N} – эталонный параметр γ_N, соответствующий белому гауссовскому шуму, который, как показали исследования [5], статистически устойчив как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО.

Теоретически все процессы можно разделить на статистически устойчивые и статистически неустойчивые. По определению [2] случайный процесс статистически устойчив по отношению к среднему, если при $N \to \infty$ параметр статистической неустойчивости γ_N стремится к нулю, и статистически устойчив по отношению к СКО, если при том же условии стремится к нулю параметр статистической неустойчивости Γ_N.

Судя по экспериментальным исследованиям, все реальные процессы статистически неустойчивы. Однако существенные нарушения статистической устойчивости проявляются не сразу. При относительно небольшом объеме выборки нарушения статистической устойчивости пренебрежимо малы, что открывает возможности эффективного и корректного использования классической теории вероятностей, основанной на гипотезе идеальной статистической устойчивости (сходимости статистик). Интервал, на котором нарушения устойчивости пренебрежимо малы, – интервал статистической устойчивости [1, 2, 4–7] – зависит от процесса и рассматриваемой статистики.

В качестве оценок интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО принимают объемы выборок (или интервалы наблюдения), при которых наблюдаются превышения соответственно оценками γ_N^* и Γ_N^* параметров γ_N и Γ_N установленной пороговой функции.

В качестве пороговой функции обычно используют зависящую от объема выборки N величину $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + k\sigma_{\gamma_{0N}^*}$, где k – фиксированный параметр, определяющий высоту порога, а $\sigma_{\gamma_{0N}^*}$ – СКО оценки γ_{0N}^* параметра γ_{0N} (аналитические выражения для величин γ_{0N} и $\sigma_{\gamma_{0N}^*}$ приведены в [2, 5]).

Недостатком пороговой функции γ_{0N}^+ является то, что она не является оптимальной границей, корректно разделяющей процессы на статистически устойчивые и статистически неустойчивые. Эта функция стремится к нулю при $N \to \infty$. Это означает, что она смещена в сторону статистически устойчивых процессов. Из-за смещения при проведении теоретических исследований на бесконечно большом интервале наблюдения всегда часть статистически устойчивых процессов ошибочно классифицируется как статистически неустойчивые, а при измерении интервалов статистической устойчивости результаты измерений всегда оказываются заниженными.

Целью настоящей статьи является оптимизация пороговой функции и исследование целесообразности применения оптимизированной пороговой функции при решении практических задач.

2. Предельно неустойчивый процесс

Рассчитать оптимальную (несмещенную) границу раздела статистически устойчивых и неустойчивых процессов без каких-либо дополнительных предположений относительно характера рассматриваемых процессов затруднительно. Однако задача значительно облегчается, если решение искать в классе процессов, степень устойчивости (неустойчивости) которых характеризуется монотонной функцией некоторого параметра. В этом случае искомой несмещенной пороговой функцией является функция, соответствующая предельно неустойчивому (или предельно устойчивому) процессу.

Ставя задачу поиска оптимальной границы, желательно потребовать, чтобы рассматриваемый класс процессов включал большое число процессов разного типа. Указанным требованиям удовлетворяет, например, класс, состоящий из процессов $x(t)$, спектральная плотность мощности (СПМ) которых описывается степенной функцией, представляемой в непрерывном случае выражением $S_x(f)=1/f^{\beta}$, а в дискретном –

$$S_{x_N}(k)=\frac{1}{(k-1)^{\beta}}, \quad k=\overline{2,N/2},$$

где f – частота, β – параметр формы спектра, k – номер спектрального отсчета. К этому классу процессов относятся различные цветные шумы (фиолетовый, синий, белый, розовый, коричневый, черный), фликкер-шумы [8, 9], фрактальные шумы [10, 11] и др. [2].

Исследования показывают [2, 4–7], что процесс со степенной СПМ статистически устойчив как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО, если параметр формы β меньше единицы, и статистически неустойчивый, если $\beta \ge 1$. Процесс $x(t)$ со степенной СПМ, у которого параметр $\beta=1$, представляет собой предельно неустойчивый процесс. Соответствующий этому процессу параметр статистической неустойчивости γ_{1N} можно использовать в качестве пороговой функции.

Представление о зависимости параметров статистической неустойчивости γ_{0N} и γ_{1N} (соответствующих процессам со степенной СПМ с параметрами $\beta=0$ и $\beta=1$), а также пороговой функции γ_{0N}^{+}, соответствующей параметрам $\beta=0$ и $k=3$, от объема выборки дает рис. 1.

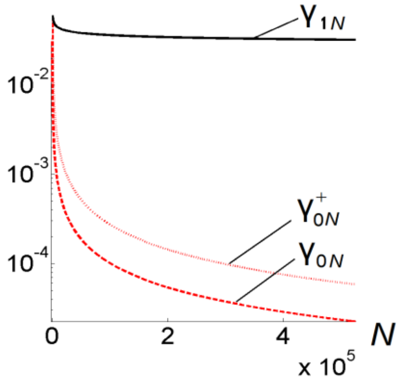


Рис. 1. Зависимость параметра статистической неустойчивости γ_{0N}, рассчитанного для белого шума (параметр $\beta=0$) (пунктирная линия), пороговой функции γ_{0N}^{+}, рассчитанной для белого шума и параметра $k=3$ (точечная линия), и параметра статистической неустойчивости γ_{1N}, рассчитанного для предельно неустойчивого процесса (параметр $\beta=1$) (сплошная линия) от объема выборки N

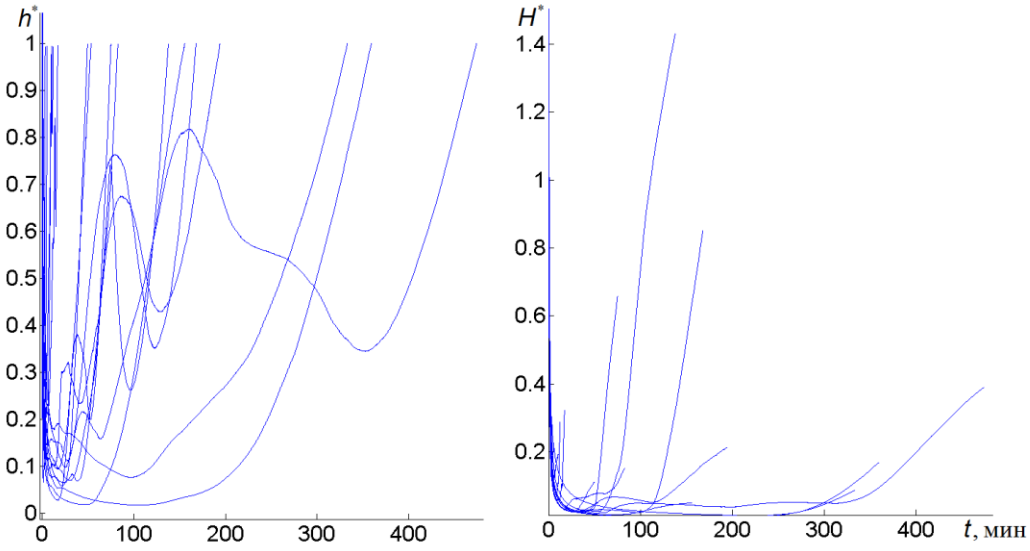
Как видно из рис. 1, функции γ_{1N} и γ_{0N}^{+} не пересекаются и по мере увеличения объема выборки расстояние между ними в логарифмическом масштабе быстро нарастает. Это означает, что при использовании пороговой функции γ_{0N}^{+} значительная часть статистически устойчивых процессов ошибочно относится к числу статистически неустойчивых процессов и оценки интервала статистической, устойчивости оказываются сильно заниженными. Применение пороговой функции γ_{1N} ситуацию исправляет, однако следует иметь в виду, что исправляет лишь для процессов, СПМ которых описывается степенной функцией.

При использовании пороговой функции γ_{1N} представляется целесообразным вместо эталона γ_{0N} использовать γ_{1N}. Тогда параметры статистической неустойчивости h_N, H_N описываются выражениями $h_N=\gamma_N/\gamma_{1N}$, $H_N=\Gamma_N/\gamma_{1N}$, а критерием нарушения устойчивости служит превышение соответствующих оценок h_N^*, H_N^* порогового значения, равного единице.

Пороговая функция γ_{1N} позволяет определить верхнюю границу оценки интервала статистической устойчивости, и в этом ее достоинство. Однако область ее практического применения ограничена. Для объяснения причин обратимся к примеру.

3. Пример

Рассмотрим конкретный пример оценки интервала статистической устойчивости процесса, представленного одной из 60-часовых записей колебаний напряжения городской электросети [2]. Этот процесс неоднократно использовался для тестирования, в частности, в работах [1–4, 7]. Описание этого процесса и различные его характеристики приведены в [2].



а *б*

Рис. 2. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему h^* (*а*) и по отношению к СКО H^* (*б*) для фрагментов исследуемого процесса, определяемых оценками интервала статистической устойчивости по отношению к среднему τ^*

На рис. 3 приведены оценки интервала статистической устойчивости по отношению к среднему $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_Q^*$, на рис. 4 – оценки параметров статистической неустойчивости h_Q^* и H_Q^* по отношению к среднему и к СКО для последовательности оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_Q^*$, а на рис. 5 – усредненные оценки интервала статистической устойчивости $\overline{\tau}^*$ по отношению к среднему. Варианты «*а*» получены при использовании пороговой функции γ_{1N}, а варианты «*б*», заимствованные из работы [6], – при использовании пороговой функции γ_{0N}^+.

Сравнение рис. 3 *а* с рис. 3 *б* и рис. 5 *а* с рис. 5 *б* подтверждает очевидные предположения, что количество оценок, которые можно получить при использовании пороговой функции γ_{1N}, меньше, чем при использовании пороговой функции γ_{0N}^+, а усредненный интервал статистической устойчивости по отношению к среднему принимает большие значения. В данном случае количество оценок, полученных при использовании пороговой функции γ_{1N}, примерно в десять раз превзошло количество оценок, полученных при использовании пороговой функции γ_{0N}^+, а усредненный интервал статистической устойчивости оказался больше примерно в три раза (в конце интервала наблюдения $\overline{\tau}^* = 110 \pm 100$ мин вместо $\overline{\tau}^* = 35 \pm 30$ мин).

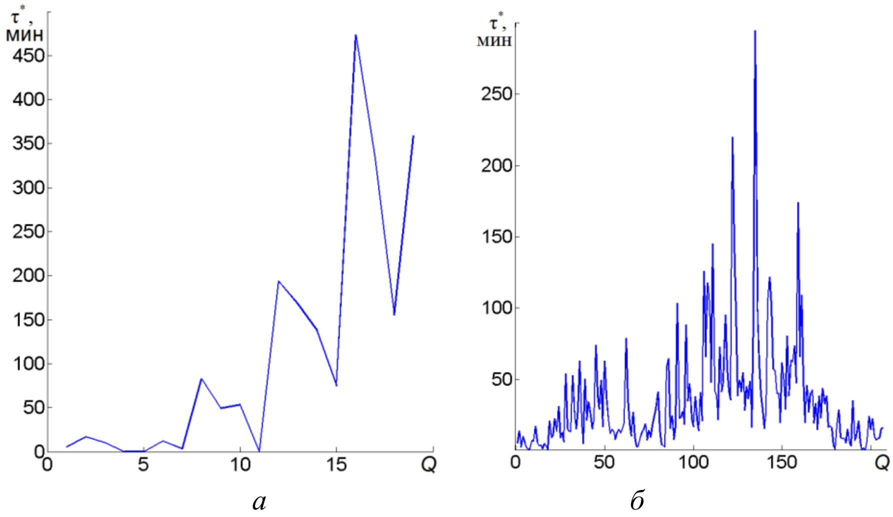


Рис. 3. Динамика изменения оценок интервала статистической устойчивости по отношению к среднему τ^* при использовании пороговых функций γ_{1N} (*а*) и γ^+_{0N} (*б*)

На рис. 2 изображены результаты расчета оценок h^*_N, H^*_N параметров статистической неустойчивости h_N, H_N на прилегающих друг к другу интервалах статистической устойчивости при использовании в качестве границы пороговой функции γ_{1N}.

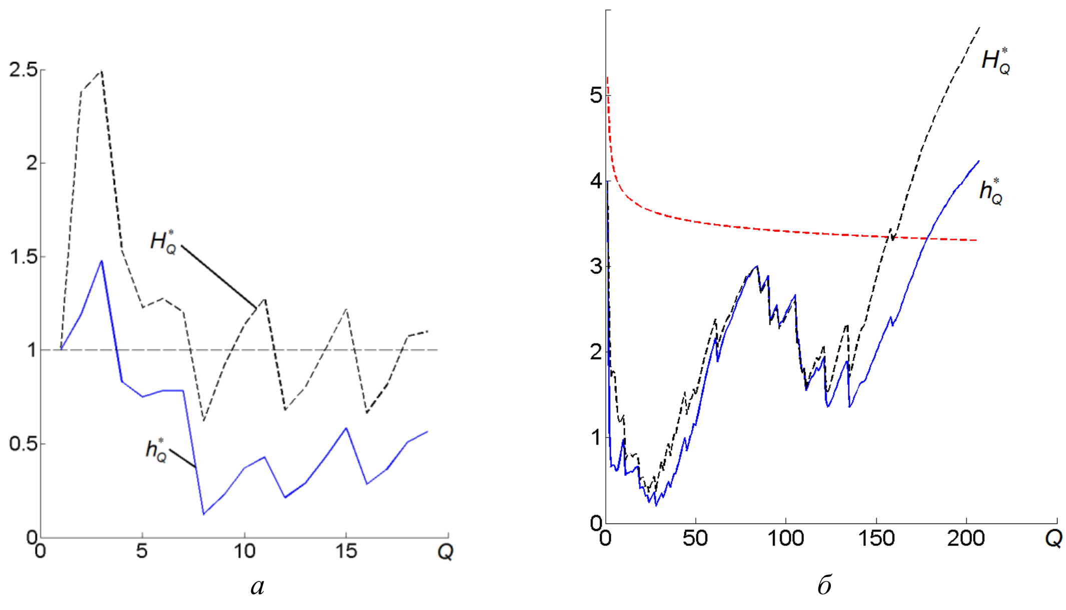
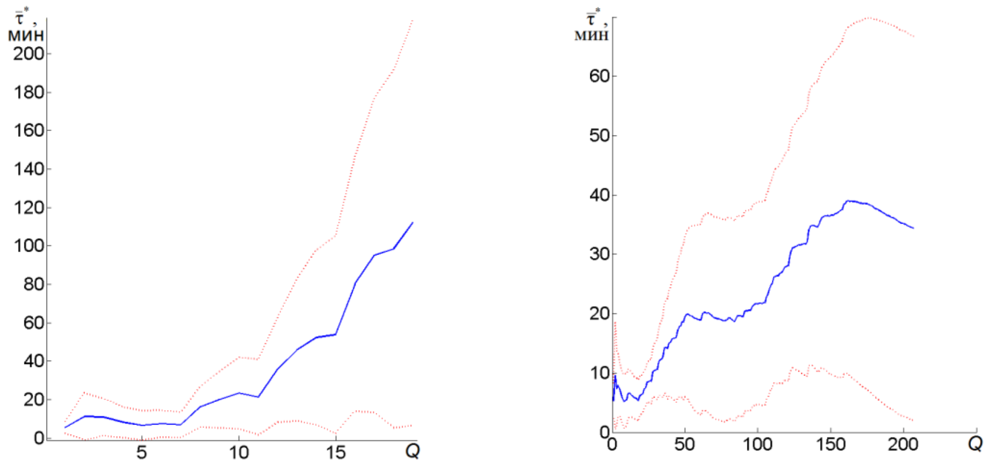


Рис. 4. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему h^*_Q (полужирные сплошные линии) и по отношению к СКО H^*_Q (полужирные пунктирные линии) последовательностей оценок $\tau^*_1, \tau^*_2, \ldots, \tau^*_Q$ при использовании пороговых функций γ_{1N} (*а*) и γ^+_{0N} (*б*). Тонкой пунктирной прямой на рисунке *а* и полужирной линией на рисунке *б* изображены соответственно пороговые функции γ_{1N} и γ^+_{0N}



а *б*

Рис. 5. Динамика изменения усредненных оценок $\overline{\tau}^*$ статистической устойчивости по отношению к среднему (полужирные сплошные линии) при использовании пороговых функций γ_{1N} (*а*) и γ_{0N}^{+} (*б*). Полужирными пунктирными линиями изображены границы допусков $\tau^{\pm} = \overline{\tau}^* \pm 3\sigma^*_{\overline{\tau}^*}$

Судя по рис. 4 а, последовательность оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_Q^*$ статистически устойчива по отношению к среднему на протяжении практически всего интервала наблюдения, однако вопрос о статистической устойчивости по отношению к СКО не столь очевиден. Это означает, что приведенным на рис. 5 а границам допуска доверять особенно нельзя.

Попытка применить пороговую функцию γ_{1N} для оценки интервала статистической устойчивости по отношению к СКО натолкнулась еще на одну трудность: на интервале наблюдения удалось сформировать лишь одну оценку, равную 770 мин, то есть для оценки погрешности измерений длительности исследуемого процесса оказалось недостаточно.

Повышенные требования к длительности исследуемых процессов – не единственное обстоятельство, ограничивающее возможность и целесообразность использования на практике пороговой функции γ_{1N}. Реальные процессы могут не принадлежать к классу процессов с СПМ, адекватно описываемых степенной функцией. Ошибочное же отнесение процесса к категории статистически устойчивых (возможность которого возрастает при применении пороговой функции γ_{1N}) влечет за собой необоснованное использование статистических методов теории вероятностей, что может приводить к существенным потерям качества обработки.

Важным обстоятельством, ограничивающим область практического применения пороговой функции γ_{1N}, является то, что для корректного выбора варианта статистической обработки данных большого объема важно знать, как правило, не точную величину интервала статистической устойчивости, а величину интервала наблюдения, на котором гарантированно, с высокой степенью достоверности, обеспечивается сохранение статистической устойчивости. Пороговая же функция γ_{1N} не позволяет оценить эту величину.

Перечисленные и другие обстоятельства указывают на целесообразность использования на практике пороговой функции γ_{0N}^{+}, обеспечивающей получение, хотя и заниженных, но зато гарантированных оценок.

Следует обратить внимание, что при статистической обработке результатов многократных измерений интервала статистической устойчивости последовательность результатов однократных измерений может быть статистически неустойчивой (см. рис. 4). Поэтому для получения корректной усредненной оценки и корректной величины погрешности измерений необходимо проверять последовательность результатов однократных измерений на предмет их статистической устойчивости и в случае нарушения устойчивости использовать неклассические методы обработки, в частности, предлагаемые теорией гиперслучайных явлений [1, 2, 7].

4. Выводы

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Обычно используемая при оценке интервала статистической устойчивости пороговая функция γ_{0N}^{+} параметров статистической неустойчивости γ_N и Γ_N не является оптимальной границей, обеспечивающей корректное разделение процессов на статистически устойчивые и статистически неустойчивые процессы. Эта пороговая функция смещена в сторону статистически устойчивых процессов. Из-за смещения при проведении теоретических исследований на бесконечно большом интервале наблюдения всегда часть статистически устойчивых процессов ошибочно классифицируется как статистически неустойчивые, а при измерении интервалов статистической устойчивости результаты измерений всегда оказываются заниженными.

2. Рассчитать оптимальную (несмещенную) границу раздела статистически устойчивых и неустойчивых процессов без каких-либо дополнительных предположений относительно характера рассматриваемых процессов затруднительно. Однако задача значительно облегчается, если решение искать в классе процессов, степень устойчивости (неустойчивости) которых описывается монотонной функцией некоторого параметра. В этом случае искомой несмещенной пороговой функцией является функция, соответствующая предельно неустойчивому (или предельно устойчивому) процессу.

3. У процессов, спектральная плотность мощности (СПМ) которых описывается степенной функцией $1/f^{\beta}$ (f – частота, β – параметр формы спектра), степень неустойчивости является монотонной функцией параметра β. В классе таких процессов предельно неустойчивым является процесс с СПМ вида $1/f$. Соответствующий этому процессу параметр статистической неустойчивости γ_{1N} представляет собой несмещенную пороговую функцию, обеспечивающую оптимальное (в рассматриваемом классе) разделение процессов на статистически устойчивые и неустойчивые.

4. Пороговая функция γ_{1N} позволяет определить верхнюю границу оценки интервала статистической устойчивости и в этом ее достоинство. Однако область ее практического применения ограничена. Связано это с рядом причин:

– реальные процессы могут не принадлежать к классу процессов с СПМ, адекватно описываемых степенной функцией, а ошибочное отнесение процесса к категории статистически устойчивых влечет за собой необоснованное использование статистических методов теории вероятностей, что может приводить к существенным потерям качества обработки;

– для правильного выбора варианта статистической обработки данных большого объема важно знать, как правило, не точную величину интервала статистической устойчивости, а величину интервала наблюдения, на котором гарантированно обеспечивается сохранение статистической устойчивости, а пороговая функция γ_{1N} не позволяет оценить эту величину;

– оценки интервала статистической устойчивости, соответствующие пороговой функции γ_{1N}, могут существенно превосходить оценки, получающиеся при применении пороговой функции γ_{0N}^{+}. Поэтому замена пороговой функции γ_{0N}^{+} функцией γ_{1N} сопряжена с существенным повышением требований к длительности исследуемых процессов, что не всегда реализуемо.

Эти и другие обстоятельства указывают на целесообразность использования на практике пороговой функции γ_{0N}^{+}, обеспечивающей получение, хотя и заниженных, но зато гарантированных оценок.

5. При статистической обработке результатов многократных измерений интервала статистической устойчивости следует иметь в виду, что последовательность результатов однократных измерений может оказаться статистически неустойчивой. Поэтому для получения корректной усредненной оценки и корректной величины погрешности измерений необходимо проверять последовательность результатов однократных измерений на предмет их статистической устойчивости и в случае нарушения устойчивости использовать неклассические методы обработки, в частности, предлагаемые теорией гиперслучайных явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

2. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

3. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.

4. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 288 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

5. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.

6. Горбань И.И. Измерение интервалов статистической устойчивости / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2016. – № 2. – С. 128 – 137.

7. Gorban I.I. The statistical stability phenomenon / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 361 p.

8. Жигальский Г.П. Неравновесный $1/f^{\gamma}$-шум в проводящих пленках и контактах / Г.П. Жигальский // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 5. – С. 465 – 490.

9. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах / Ш.М. Коган // Успехи физических наук. – 1985. – Т. 145, Вып. 2. – С. 285 – 325.

10. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты, модели / Ширяев А.Н. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.

11. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Кроновер Р.М. – М.: Постмаркет, 2000. – 348 с.

Стаття надійшла до редакції 12.09.2016