УДК 518.9

С.В. Пашко, А.Л. Яловец

МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ СТРАТЕГИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрены дифференциальные игры преследования, в которых несколько игроков догоняют одного, применяя стратегию параллельного сближения. Построена стратегия уклонения и доказана ее оптимальность. Исследованы свойства оптимальных стратегий уклонения. Сформулированы задачи линейного программирования, позволяющие строить стратегии, близкие к оптимальным, и доказана теорема о величине погрешностей.

Введение

Задачи преследования – уклонения занимают одно из центральных мест в теории динамических игр. В данной работе рассматривается задача оптимального уклонения одного убегающего от нескольких преследователей. Предполагается, что каждый преследователь использует стратегию параллельного сближения [1]. В качестве критерия выступает время захвата цели, которое убегающий игрок стремится максимизировать.

В последнее время проявляется интерес к созданию многоагентных роботизированных систем преследователей [2], поэтому рассматриваемая тема является актуальной.

Движение игроков считается простым. Это значит, что в каждый момент времени игрок может выбрать произвольный вектор скорости движения, норма которого не превосходит заданной величины. Скорости считаются кусочно-непрерывными функциями от времени.

Стратегия параллельного сближения состоит в следующем. Каждый преследователь, зная скорость преследуемого в данный момент времени, считает эту скорость постоянной и вычисляет на линии движения убегающего игрока точку захвата, в которой он может догнать его, двигаясь с постоянной максимальной скоростью. В текущий момент времени вектор скорости преследователя направлен на точку захвата, а величина скорости максимальна. Если максимальные скорости преследователя и убегающего равны, а точка захвата отсутствует, преследователь двигается параллельно убегающему игроку.

В данной работе построены стратегии уклонения, каждая из которых определяется пределом последовательности оптимальных решений задач линейного программирования. Приведена теорема об оптимальности таких стратегий. Построенные оптимальные стратегии являются кусочно-постоянными функциями от времени, причем число промежутков постоянства не превосходит числа преследователей.

Описаны задачи линейного программирования, решения которых позволяют строить стратегии уклонения, близкие к оптимальным стратегиям. Приведена теорема о величине погрешности получаемых таким образом стратегий.

1. Стратегии уклонения и максимальное время преследования

Пусть в точке $X_0 = X_0(t)$ действительного *n*-мерного евклидового пространства E^n расположен преследуемый игрок *E*, а в точках $X_i = X_i(t)$ находятся преследователи P_i, $i = 1,2,...,m$. Векторы $V_i = V_i(t)$ размерности *n*, $i = 0,1,...,m$, обозначают скорости игроков (нулевое значение индекса *i* относится к игроку *E*).

Пространство E^n состоит из *n*-мерных векторов $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ с вещественными компонентами, $2 \le n < \infty$. Норма вектора X задается формулой $\|X\| = \langle X, X \rangle^{1/2}$, где $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ –

скалярное произведение векторов $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$.

Игра начинается в момент времени $t=0$. Уравнения движения игроков имеют вид

$$\dot{X}_i = V_i, \quad i=0,1,...,m.$$

Считаем, что выполняются ограничения $0 \le \|V_i(t)\| \le w_i$, $t \ge 0$, $i=0,1,...,m$, где $0 < w_i < \infty$ – максимальная величина скорости. Пусть выполняются неравенства $w_0 \le w_i$, $i=1,2,...,m$.

Скорость $V_0(t)$ предполагается кусочно-непрерывной функцией от времени. Это значит, что в каждом ограниченном временном интервале существует не больше конечного числа точек разрыва первого рода. Поскольку каждый преследователь применяет стратегию параллельного сближения, то функции $V_i(t)$, $i=1,2,...,m$, также являются кусочно-непрерывными.

Игрок E управляет своими координатами, выбирая в каждый момент времени вектор скорости V_0, являющийся функцией от времени и от точек $X_0(t),X_1(t),...,X_m(t)$. Функцию $V_0(t)$, $t \ge 0$, будем называть стратегией уклонения и обозначать S.

Пусть $l_i \ge 0$ – заданные числа, $d_i(t)=\|X_i(t)-X_0(t)\|$, $t \ge 0$, $i=1,2,...,m$. Определим функцию $d(t)$ следующим образом: $d(t)=0$, если для некоторого значения $i \in \{1,2,...,m\}$ справедливо равенство $d_i(t)=0$ или выполняется неравенство $d_i(t)<l_i$; $d(t)=1$ в противном случае. Временем окончания игры назовем величину $T(S)=\inf\{t: d(t)=0\}$. Игрок E стремится максимизировать величину $T(S)$. Максимальным временем преследования назовем число $T^* = \sup\limits_S T(S)$. Стратегию S, для которой справедливо равенство $T(S)=T^*$, назовем оптимальной стратегией уклонения. Считаем, что выполняются неравенства

$$d_i(0) > l_i, \ i=1,2,...,m. \qquad (1)$$

Для таких значений i, что $w_i = w_0$, дополнительно потребуем выполнения неравенства $l_i > 0$. Это условие обеспечивает существование оптимальных стратегий уклонения.

2. Оптимальные стратегии уклонения

Построим кусочно-непрерывную стратегию уклонения и докажем теорему об оптимальности этой стратегии.

Обозначим $\operatorname{conv}\{X_1,X_2,...,X_m\}$ выпуклую оболочку точек $X_1,X_2,...,X_m$. Пусть $\operatorname{int} X$ – внутренность множества X.

Рассмотрим случай, когда точка расположения убегающего $X_0(0)$ принадлежит внутренности выпуклой оболочки точек $X_1(0),X_2(0),...,X_m(0)$, т. е. выполняется условие

$$X_0(0) \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1(0),...,X_m(0)\}. \qquad (2)$$

Согласно лемме 1 (см. Приложение), величины скоростей сближения $u_i = u_i(t)$ объектов E и P_i вычисляются по формулам

$$u_i = \langle V_0, N_i \rangle + \sqrt{w_i^2 - v_0^2 + \langle V_0, N_i \rangle^2}, \quad i=1,2,...,m. \qquad (3)$$

Здесь $v_0 = v_0(t) = \|V_0(t)\|$, $N_i = (X_i(0) - X_0(0)) / \|X_i(0) - X_0(0)\|$, значение квадратного корня считается неотрицательным.

Задачу поиска оптимальной стратегии уклонения запишем в виде

$$T \to \max, \qquad (4)$$

$$\int_0^T u_i(t)dt \le d_i - l_i, \ i=1,2,...,m. \qquad (5)$$

Здесь и далее $d_i = d_i(0)$ – расстояние между игроками E и P_i в момент $t=0$.

Важно заметить следующее. Углы между векторами $\overrightarrow{X_0X_i}$ и $\overrightarrow{X_0X_j}$ на протяжении игры остаются постоянными, поскольку прямые $X_0(t)X_q(t)$ и $X_0(0)X_q(0)$ параллельны при каждом $t \ge 0$; $q = 1,2,...,m$ [3]. Скорости сближения $u_i(t)$ неотрицательны. Поскольку используется стратегия параллельного сближения, то из условия (2) вытекает соотношение

$$X_0(t) \in \operatorname{intconv}\{X_1(t), X_2(t),..., X_m(t)\},$$

$$t \in [0, T(S)). \qquad (6)$$

Стратегия уклонения $V_0(t)$ обладает следующим свойством. Поменяем местами скорости на отрезках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$, где $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T(V_0)$, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$. Образуем новую стратегию уклонения $V_0^1(t)$, где $V_0^1(t) = V_0(t)$, если $t \notin [t_1, t_2]$ и $t \notin [t_3, t_4]$; $V_0^1(t) = V_0(t + t_3 - t_1)$, если $t \in [t_1, t_2]$; $V_0^1(t) = V_0(t + t_1 - t_3)$, если $t \in [t_3, t_4]$. В момент времени t_4 координаты игроков не зависят от того, которая из двух стратегий применяется.

Сформулируем задачу линейного программирования, являющуюся приближением задачи (4), (5).

Пусть компоненты вектора $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_{n-1})$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \le \gamma_j \le \pi,\ j = 1,2,..., n-2, \qquad (7)$$

$$0 \le \gamma_{n-1} \le 2\pi. \qquad (8)$$

Вектор $Z = Z(\Gamma) = (z_1, z_2,..., z_n)$, удовлетворяющий соотношению $\|Z\| = 1$, можно представить в виде

$$z_1 = \cos\gamma_1,$$

$$z_2 = \sin\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9)$$

$$z_{n-1} = \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot ... \cdot \sin\gamma_{n-2} \cdot \cos\gamma_{n-1},$$

$$z_n = \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot ... \cdot \sin\gamma_{n-2} \cdot \sin\gamma_{n-1}.$$

Выберем величину угла δ по формуле

$$\delta = \pi/(2k), \qquad (10)$$

где k – натуральное число. Обозначим $R = (r_1, r_2,..., r_{n-1})$ целочисленный вектор, компоненты которого удовлетворяют неравенствам

$$0 \le r_j \le 2k-1,\ j = 1,2,..., n-2, \qquad (11)$$

$$0 \le r_{n-1} \le 4k-1. \qquad (12)$$

Компоненты вектора $\Gamma = \delta R$ удовлетворяют соотношениям (7), (8), длина вектора $Z(\delta R)$ равна единице.

Предположим, в каждый момент времени найдется такой целочисленный вектор $R = R(t)$, удовлетворяющий условиям (11), (12), что векторы V_0 и $Z(\delta R)$ коллинеарны и $\|V_0\| = w_0$. В этом случае в соответствии с соотношениями (3) скорости сближения u_{iR} объектов E и P_i вычисляются по формулам

$$u_{iR} = w_0\langle Z(\delta R), N_i\rangle +$$

$$+\sqrt{w_i^2 - w_0^2(1 - \langle Z(\delta R), N_i\rangle^2)}, \qquad (13)$$

$$i = 1,2,..., m,\ R \in \{R\};$$

здесь $\{R\}$ – множество целочисленных векторов, удовлетворяющих условиям (11), (12). Обозначим t_R время, в течение которого вектор V_0 коллинеарен вектору $Z(\delta R)$. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\sum_{R\in\{R\}} t_R \to \max, \qquad (14)$$

$$\sum_{R\in\{R\}} u_{iR} t_R \le d_i - l_i,\ i = 1,2,..., m, \qquad (15)$$

$$t_R \ge 0,\ R \in \{R\}. \qquad (16)$$

Согласно лемме 4 (см. приложение), для любой стратегии уклонения время окончания игры не превосходит величину $\overline{T} < \infty$, где

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^m (d_i - l_i)/\tilde{u}. \qquad (17)$$

Здесь $\tilde{u} = \min\limits_{V_0:\|V_0\|\le w_0} \max\limits_{i=1,...,m} u_i$, величина $u_i = u_i(V_0)$ вычисляется по формуле (3). Из этого следует, что целевая функция (14) на множестве (15), (16) ограничена сверху константой $\overline{T}$. Поэтому оптимальное решение задачи (14)–(16) существует, причем одно из оптимальных решений находится в угловой точке [4]. Но решение, соответствующее угловой точке, содержит не больше, чем m положительных компонент. Значит, оптимальное решение $S_k^* = (t_1^{*(k)}, t_2^{*(k)}, ..., t_{|R|}^{*(k)})$ задачи (14)–(16) можно представить в виде

$$S_k^* = (t_{j_1^{(k)}}^{*(k)}, t_{j_2^{(k)}}^{*(k)}, ..., t_{j_m^{(k)}}^{*(k)}, j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, ..., j_m^{(k)}),$$

где $j_q^{(k)} \in \{1,2,...,|R|\}$, $q = 1,2,...,m$, и $t_j^{*(k)} = 0$, если $j \in \{1,2,...,|R|\} \setminus \{j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, ..., j_m^{(k)}\}$; здесь $|R|$ – количество элементов множества $\{R\}$.

Очевидно, вместо последнего представления S_k^* можно использовать следующее:

$$S_k^* = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_m^{(k)}, Z_1^{(k)}, Z_2^{(k)}, ..., Z_m^{(k)}),$$

где $t_q^{(k)} = t_{j_q^{(k)}}^{*(k)}$ – время, в течение которого вектор V_0 коллинеарен вектору $Z_q^{(k)}$, причем $\left\|Z_q^{(k)}\right\| = 1$, $q = 1,2,...,m$. Поскольку $t_q^{(k)} \in [0, \overline{T}]$, $\left\|Z_q^{(k)}\right\| = 1$, $q = 1,2,...,m$, то точки S_k^* принадлежат замкнутому ограниченному множеству Q, которое является подмножеством $m(n+1)$-мерного евклидового пространства.

Множество Q компактно, поэтому последовательность S_k^*, $k = 1,2,3,...$, имеет предельную точку

$$S^* = (t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*, Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_m^*),$$

причем $S^* \in Q$ [5]. Точка S^* определяет стратегию уклонения (которая также обозначается S^*), состоящую в том, что на непрерывном промежутке времени длиной t_q^* вектор скорости V_0^* коллинеарен вектору Z_q^*, причем $\left\|V_0^*\right\| = w_0$.

Теорема 1. Стратегия S^* является оптимальной стратегией уклонения.

Доказательства этой и последующих теорем находятся в Приложении. Теорема 1 справедлива для класса всех кусочно-непрерывных стратегий уклонения, т. е. время окончания игры $\sum_{i=1}^{m} t_i^*$ стратегии S^* не меньше, чем время окончания игры для любой другой кусочно-непрерывной стратегии. Количество промежутков постоянства построенной оптимальной стратегии S^* не превосходит числа преследователей m.

3. Вычисление оптимальных стратегий и максимального времени преследования

Пусть $V_0^*(t)$, $t \geq 0$ – некоторая оптимальная стратегия уклонения, T^* – соответствующее время окончания игры. Считаем, что выполняется условие (2).

Теорема 2. В каждый момент времени $t \in (0, T^*)$ такой, что оптимальная стратегия $V_0^*(t)$ непрерывна, справедливо равенство $\left\|V_0^*(t)\right\| = w_0$.

Из теоремы 2 следует, что поиск оптимальных стратегий следует вести среди тех, у которых скорость движения максимальна.

Приведем оценку погрешности стратегии, соответствующей оптимальному решению задачи (14)–(16). Обозначим

$$g = \min_{i=1,...,m} (d_i - l_i),$$

$$h_k = g / (g + \pi w_0 \overline{T} \sqrt{n-1} / k).$$

Из условий (1) следует неравенство $g > 0$, поэтому $h_k \to 1$, если $k \to \infty$. Пусть T_k^* – оптимальное значение целевой функции задачи (14)–(16), соответствующее оптимальному решению S_k^*.

Теорема 3. Оптимальное значение целевой функции T_k^* задачи (14)–(16) удовлетворяет неравенствам

$$h_k T^* \le T_k^* \le T^*,\ k = 1,2,\dots .$$

Пример. Предположим, три игрока преследуют одного на плоскости. Исходные данные заданы равенствами $m = 3$, $n = 2$, $X_0 = (0,0)$, $X_1 = (300,200)$, $X_2 = (-300,150)$, $X_3 = (0,-400)$, $l_1 = l_2 = l_3 = 30$, $w_0 = 5.0$, $w_1 = 5.5$, $w_2 = 6.0$, $w_3 = 6.5$. Для получения близкой к оптимальной стратегии уклонения решена задача линейного программирования (14)–(16) при условиях $k = 90$, $d_1 = \|X_1\| = 360.6$, $d_2 = \|X_2\| = 335.4$, $d_3 = \|X_3\| = 400$.

Оптимальное решение этой задачи: $t_{65}^{*(k)} = 15.8$, $t_{117}^{*(k)} = 23.7$, $t_{315}^{*(k)} = 33.6$. Время окончания игры $t_{65}^{*(k)} + t_{117}^{*(k)} + t_{315}^{*(k)}$ равно 73.1. На рисунке изображены траектории игроков E, P_1, P_2, P_3 от момента начала игры до момента ее окончания.

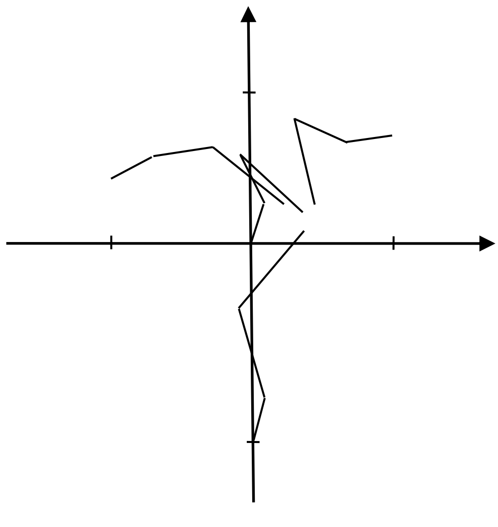

Рисунок. Траектории преследования и уклонения

4. Случай, когда убегающий не окружен преследователями

Пусть точка расположения убегающего игрока X_0 не принадлежит внутренности выпуклой оболочки точек $X_1, X_2, \dots, X_m$, т. е. выполняется условие

$$X_0 \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \dots, X_m\}. \qquad (18)$$

В случае (18) считаем $w_i > w_0$, $l_i = 0$, $i = 1,2,\dots,m$.

Обозначим A_i сферу Аполлония, относящуюся к паре игроков E, P_i. Она представляет собой геометрическое место точек, в которых могут встретиться игроки E и P_i, если они двигаются равномерно и прямолинейно с максимальными скоростями. Пусть C_i – замкнутый шар Аполлония, соответствующий сфере A_i. Тогда $C = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ – множество таких точек пространства E^n, до которых игрок E успевает дойти не позже каждого преследователя. Внутренность множества C представляет собой множество точек, до которых игрок E успевает дойти раньше любого преследователя. Пусть $X^* \in C$ – наиболее удаленная точка от точки X_0 из множества C, т. е. для каждого $X \in C$ справедливо неравенство $\|X^* - X_0\| \ge \|X - X_0\|$.

Из леммы 4.11 работы [3] легко вывести следующее. Существует такой набор индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_q\}$, где $q \le n$, что точка X^* принадлежит множеству $C' = \bigcap_{j=1}^{q} C_{i_j}$ и является наиболее удаленной точкой из множества C' от точки X_0.

В работе [6] доказано, что при условии применения преследователями стратегии параллельного сближения время окончания игры не превосходит величину $\|X^* - X_0\| / w_0$. В указанной работе это утверждение доказано в случае $n = 2$, однако его нетрудно доказать для произвольного значения n. Если игрок E движется прямолинейно с максимальной скоростью по направлению к точке X^*, то захват не может произойти раньше, чем в момент $\|X^* - X_0\| / w_0$.

Т. о., стратегия уклонения игрока E, заключающаяся в прямолинейном движении с максимальной скоростью по направлению к точке X^*, оптимальна. Максимальное время преследования равно $\left\|X^* - X_0\right\| / w_0$.

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального уклонения одного убегающего от нескольких преследователей в случае, когда каждый преследователь независимо от других использует стратегию параллельного сближения, а убегающий игрок стремится максимизировать время захвата.

Изучена задача, в которой убегающий игрок находится внутри выпуклой оболочки точек расположения преследователей. Доказана теорема об оптимальности стратегии уклонения, построенной на основе решений последовательности задач линейного программирования. Оказывается, среди оптимальных стратегий уклонения имеется такая, что траектория убегающего представляет собой ломаную линию, количество звеньев которой не превосходит числа преследователей.

Доказана теорема о том, что величина оптимальной скорости уклонения должна быть максимальной в каждый момент времени такой, что вектор скорости непрерывен. Описаны задачи линейного программирования, решения которых позволяют строить стратегии уклонения, близкие к оптимальным. Доказана теорема о величине погрешности получаемых таким образом стратегий.

Приложение

Докажем сформулированные утверждения.

Лемма 1. Пусть t – точка непрерывности функции $V_0(t)$. Справедливы соотношения

$$u_i = \langle V_0, N_i \rangle + \sqrt{w_i^2 - v_0^2 + \langle V_0, N_i \rangle^2}, \quad i = 1,2,\ldots,m. \qquad (19)$$

Доказательство. В момент времени t рассмотрим двумерное подпространство $E_i^2 \in E^n$, содержащее точки X_0 и X_i, а также векторы скоростей V_0 и V_i объектов E и P_i. В плоскости E_i^2 выберем декартову систему координат таким образом, чтобы точка X_0 находилась в ее начале, а точка X_i лежала на положительной полуоси абсцисс. Пусть в выбранной системе координат абсцисса и ордината вектора V_0 равны соответственно v_{0x}, v_{0y}, абсцисса и ордината вектора V_i равны соответственно v_{ix}, v_{iy}.

Имеем $v_{0y} = v_{iy}$, $v_{0x} = \langle V_0, N_i \rangle$,

$$v_{ix} = -\sqrt{w_i^2 - v_{iy}^2} = -\sqrt{w_i^2 - v_{0y}^2} =$$

$$= -\sqrt{w_i^2 - (v_0^2 - v_{0x}^2)} = -\sqrt{w_i^2 - v_0^2 + \langle V_0, N_i \rangle^2}.$$

Поэтому

$$u_i = v_{0x} + |v_{ix}| = \langle V_0, N_i \rangle + \\ + \sqrt{w_i^2 - v_0^2 + \langle V_0, N_i \rangle^2}.$$

Лемма доказана.

Обозначим $N_0 = V_0 / \|V_0\|$. В случае $\|V_0\| = 0$ вектор N_0 выберем из условия $\|N_0\| \le 1$. Формулу (19) перепишем в виде

$$u_i = v_0 \langle N_0, N_i \rangle + \sqrt{w_i^2 - v_0^2 (1 - \langle N_0, N_i \rangle^2)}, \\ i = 1,2,\ldots,m. \qquad (20)$$

Лемма 2. Для каждого $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ функция $u_i = u_i(v_0)$ от переменной v_0, определяемая формулой (20), вогнута при условии $v_0 \in (0, w_i)$.

Доказательство. Очевидно, $|\langle N_0, N_i \rangle| \le 1$. Вторая производная от функции $u_i(v_0)$ по переменной v_0 равна

$$-\frac{w_i^2 (1 - \langle N_0, N_i \rangle^2)}{(w_i^2 - v_0^2 (1 - \langle N_0, N_i \rangle^2))^{3/2}}.$$

Последнее выражение не больше нуля, поэтому функция вогнута.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть N_0^1, N_0^2 – единичные векторы, т. е. $\left\|N_0^1\right\| = \left\|N_0^2\right\| = 1$. Функции

$u_i = u_i(N_0)$ от вектора N_0, определяемые формулами (20), удовлетворяют условиям

$$\left|u_i(N_0^1) - u_i(N_0^2)\right| \le 2v_0 \left\|N_0^1 - N_0^2\right\|,$$

$$i = 1,2,...,m.$$

Доказательство. Если $v_0 = 0$, то $\left|u_i(N_0^1) - u_i(N_0^2)\right| = |w_i - w_i| = 0$; в случае $v_0 = 0$ лемма доказана.

Пусть $v_0 > 0$. Обозначим $x = \langle N_0, N_i \rangle$, $a = (w_i^2 - v_0^2)/v_0^2$. Имеем $u_i(x) = v_0(x + \sqrt{a + x^2})$.

Если $a > 0$, то

$$(u_i(x))'_x = v_0(1 + x/\sqrt{a + x^2}) \le 2v_0.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$\left|u_i(x_1) - u_i(x_2)\right| \le 2v_0 |x_1 - x_2|. \qquad (21)$$

Если $a = 0$, то $u_i(x) = v_0(x + |x|)$. Очевидно, в этом случае неравенство (21) также справедливо.

Из неравенства (21) следуют соотношения

$$\left|u_i(N_0^1) - u_i(N_0^2)\right| \le 2v_0 \left|\langle N_0^1, N_i \rangle - \langle N_0^2, N_i \rangle\right| =$$

$$= 2v_0 \left|\langle N_0^1 - N_0^2, N_i \rangle\right| \le 2v_0 \left\|N_0^1 - N_0^2\right\| \left\|N_i\right\| =$$

$$= 2v_0 \left\|N_0^1 - N_0^2\right\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если выполняется условие (2), то для произвольной стратегии уклонения время окончания игры не превосходит величины $\overline{T} < \infty$, которая вычисляется по формуле (17).

Доказательство. Рассмотрим стратегию *S*. Пусть вектор скорости уклонения равен $V_0(t)$, $t \in (0, T(S))$. Условие (2) влечет соотношение (6), из которого вытекает существование такого числа $i_0 = i_0(t) \in \in \{1,2,...,m\}$, что справедливо неравенство

$$\langle V_0, N_{i_0} \rangle > 0. \qquad (22)$$

Здесь $V_0 = V_0(t)$, $\|V_0\| = w_0$.

Из соотношений (19) и (22) следует неравенство $u_{i_0}(V_0) > 0$. Рассмотрим функцию $u_{i_0}(W)$ при условии $W = \sigma V_0$, $0 \le \sigma \le 1$. Из леммы 2 следуют соотношения

$$u_{i_0}(W) \ge \min\{u_{i_0}(W = (0,...,0)), u_{i_0}(W = V_0)\} \ge$$

$$\ge \min\{w_0, u_{i_0}(V_0)\} > 0.$$

Это означает, что при условии принадлежности точки *W* отрезку $[(0,0,...0), V_0]$ справедливо неравенство

$$u_{i_0}(W) > 0. \qquad (23)$$

Обозначим $\overline{u}(W) = \max\limits_{i=1,...,m} u_i(W)$. Из неравенства (23) вытекает $\overline{u}(W) > 0$. Поскольку V_0 – произвольный вектор, удовлетворяющий условию $\|V_0\| = w_0$, то неравенство $\overline{u}(W) > 0$ выполняется для всех *W*, удовлетворяющих условию $\|W\| \le w_0$. Так как функция $\overline{u}(W)$ непрерывна, а множество $\|W\| \le w_0$ ограничено и замкнуто, то по теореме Вейерштрасса $\overline{u}(W)$ достигает минимального значения $\tilde{u}$ на множестве $\|W\| \le w_0$ в некоторой точке W_0.

Очевидно,

$$\tilde{u} = \min_{W:\|W\| \le w_0} \max_{i=1,...,m} u_i(W) = \overline{u}(W_0) > 0.$$

Из этого следует, что в каждый момент времени $t \in [0, T(S))$ для каждого вектора скорости уклонения *W* такого, что $\|W\| \le w_0$, существует номер i_1 такой, что скорость сближения точек X_0 и X_{i_1} не меньше, чем $\tilde{u} = \overline{u}(W_0) > 0$. Поэтому момент окончания игры $T(S)$ не превосходит величины $\overline{T} = \sum_{i=1}^{m}(d_i - l_i)/\tilde{u}$.

Лемма доказана.

Пусть векторы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \le \varphi_j \le \pi, 0 \le \psi_j \le \pi, \quad j = 1,2,...,n-2. \tag{24}$$

$$0 \le \varphi_{n-1} \le 2\pi, \ 0 \le \psi_{n-1} \le 2\pi; \tag{25}$$

векторы $Z(\Phi)$ и $Z(\Psi)$ вычисляются по формулам (9) при условиях $\Gamma = \Phi$ и $\Gamma = \Psi$ соответственно.

Лемма 5. Если векторы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$ удовлетворяют условиям (24), (25) и выполняются соотношения

$$|\varphi_j - \psi_j| \le \delta, \ j = 1,2,...,n-1, \tag{26}$$

причем $|\delta| \le \pi/2$, то справедливо неравенство

$$\|Z(\Phi) - Z(\Psi)\| \le \delta\sqrt{n-1}.$$

Доказательство. Используя формулы (9), получаем

$$\|Z(\Phi) - Z(\Psi)\|^2 = (\cos\varphi_1 - \cos\psi_1)^2 +$$

$$+ (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\psi_1 \cos\psi_2)^2 + ... +$$

$$+ (\prod_{j=1}^{n-3} \sin\varphi_j \cos\varphi_{n-2} - \prod_{j=1}^{n-3} \sin\psi_j \cos\psi_{n-2})^2 +$$

$$+ (\prod_{j=1}^{n-2} \sin\varphi_j \cos\varphi_{n-1} - \prod_{j=1}^{n-2} \sin\psi_j \cos\psi_{n-1})^2 +$$

$$+ (\prod_{j=1}^{n-1} \sin\varphi_j - \prod_{j=1}^{n-1} \sin\psi_j)^2 = 2 -$$

$$-2\{\cos\varphi_1 \cos\psi_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\psi_1 \cos\psi_2 +$$

$$+ ... + \prod_{j=1}^{n-3} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) \cos\varphi_{n-2} \cos\psi_{n-2} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) \cos\varphi_{n-1} \cos\psi_{n-1} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\varphi_j \sin\psi_j)\}.$$

Выражение в фигурных скобках из последнего соотношения обозначим a_n.

Имеем

$$\|Z(\Phi) - Z(\Psi)\|^2 = 2(1 - a_n). \tag{27}$$

Преобразуем сумму последних двух слагаемых, входящих в a_n:

$$\prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) \cos\varphi_{n-1} \cos\psi_{n-1} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) \times$$

$$\times (\cos\varphi_{n-1} \cos\psi_{n-1} + \sin\varphi_{n-1} \sin\psi_{n-1}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) \cos(\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j)(\cos(\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}) - 1).$$

Из последнего выражения и определения a_n выводим

$$a_n = a_{n-1} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\varphi_j \sin\psi_j)(\cos(\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}) - 1) \ge$$

$$\ge a_{n-1} - (1 - \cos(\varphi_{n-1} - \psi_{n-1})) \ge$$

$$\ge a_{n-1} - (1 - \cos\delta) \ge a_{n-1} - \delta^2/2,$$

т. е.

$$a_n \ge a_{n-1} - \delta^2/2. \tag{28}$$

Здесь использовано условие (26) и неравенство $1 - \cos\delta \le \delta^2/2$.

Итерируя (28), приходим к неравенству

$$a_n \ge a_2 - (n-2)\delta^2/2. \tag{29}$$

Но

$$a_2 = \cos\varphi_1 \cos\psi_1 + \sin\varphi_1 \sin\psi_1 =$$

$$= \cos(\varphi_1 - \psi_1) \ge \cos\delta \ge 1 - \delta^2/2.$$

Из этих соотношений и (29) вытекает неравенство $a_n \ge 1 - (n-1)\delta^2/2$. Используя эту оценку величины a_n и равенство (27), получаем $\|Z(\Phi) - Z(\Psi)\| \le \delta\sqrt{n-1}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть t' – точка непрерывности функции $V_0(t)$ стратегии S_0,

$0 < t' < T(S_0)$. Если $\|V_0(t')\| = 0$, то найдется такая стратегия уклонения S_1, что справедливо неравенство

$$T(S_1) > T(S_0).$$

Доказательство. Из условия непрерывности функции $V_0(t)$ в точке t' и условий $\|V_0(t')\| = 0$, $t' < T(S_0)$ следуют неравенства

$$\|X_i(t') - X_0(t')\| > l_i, \quad i = 1,2,...,m.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $\|V_0(t)\| < \varepsilon$ при условии $t \in [t' - \delta, t' + \delta]$. Можно считать, что $[t' - \delta, t' + \delta] \in (0, T(S_0))$.

Обозначим s_i^0 величину уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i на временном отрезке $[t' - \delta, t' + \delta]$. Используя (19), при условии $\varepsilon \le \min\limits_{i=1,...,m} w_i$ получаем

$$s_i^0 = \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} u_i(t)dt = \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} (\langle V_0(t), N_i \rangle +$$

$$+ \sqrt{w_i^2 - v_0^2 + \langle V_0(t), N_i \rangle^2})dt \ge$$

$$\ge \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} (-\varepsilon + \sqrt{w_i^2 - \varepsilon^2})dt =$$

$$= 2\delta(-\varepsilon + \sqrt{w_i^2 - \varepsilon^2}) \ge 2\delta(w_i - 2\varepsilon), \quad (30)$$

$$i = 1,2,...,m.$$

Рассмотрим стратегию уклонения S_1. Выберем в пространстве E^n два вектора H_1 и H_2 таких, что $\langle H_1, H_2 \rangle = 0$, $\|H_1\| = \|H_2\| = 1$. Пусть вектор скорости V_0^1, соответствующий стратегии S_1, удовлетворяет соотношению

$$V_0^1(t) = \begin{cases} V_0(t), t \notin [t' - \delta, t' + \delta], \\ w_0(\cos\alpha(t) H_1 + \sin\alpha(t) H_2), \\ t \in [t' - \delta, t' + \delta]; \end{cases}$$

здесь $V_0(t)$ – вектор скорости, соответствующий стратегии S_0; $\alpha(t) = \pi(t - t')/\delta$.

Обозначим s_i^1 величину уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i на временном отрезке $[t' - \delta, t' + \delta]$ в случае использования стратегии S_1. Из соотношений $\|V_0^1(t)\| = w_0$, $t \in [t' - \delta, t' + \delta]$ и (19) следует

$$s_i^1 = \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \langle V_0^1(t), N_i \rangle dt +$$

$$+ \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \sqrt{w_i^2 - w_0^2 + \langle V_0^1(t), N_i \rangle^2} dt,$$

$$i = 1,2,...,m. \quad (31)$$

Из определения $V_0^1(t)$ вытекает

$$\int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \langle V_0^1(t), N_i \rangle dt =$$

$$= w_0 \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \langle \cos\alpha(t) H_1 + \sin\alpha(t) H_2, N_i \rangle dt =$$

$$= w_0 \langle H_1, N_i \rangle \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \cos\alpha(t) dt +$$

$$+ w_0 \langle H_2, N_i \rangle \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \sin\alpha(t) dt = 0,$$

$$i = 1,2,...,m.$$

Из этих равенств и (31) получаем

$$s_i^1 = \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \sqrt{w_i^2 - w_0^2 + \langle V_0^1(t), N_i \rangle^2} dt,$$

$$i = 1,2,...,m. \quad (32)$$

Обозначим E^2 двумерное подпространство пространства E^n, содержащее векторы H_1 и H_2. Если вектор N_i ортогонален подпространству E^2, то из (32) следует

$$s_i^1 = 2\delta\sqrt{w_i^2 - w_0^2}. \quad (33)$$

Пусть вектор N_i не ортогонален подпространству E^2. Обозначим N_i^0 проекцию N_i на подпространство E^2. Имеет место разложение $N_i^0 = \langle N_i^0, H_1 \rangle H_1 + \langle N_i^0, H_2 \rangle H_2$, причем выполняются неравенства $0 < h_i \le 1$, где

$$h_i = \sqrt{\left\langle H_1, N_i^0 \right\rangle^2 + \left\langle H_2, N_i^0 \right\rangle^2}\ .$$

При условии $t \in [t' - \delta, t' + \delta]$ имеем

$$\left\langle V_0^1(t), N_i \right\rangle = \left\langle V_0^1(t), N_i^0 \right\rangle =$$

$$= w_0(\left\langle H_1, N_i^0 \right\rangle \cos\alpha(t) + \left\langle H_2, N_i^0 \right\rangle \sin\alpha(t)) =$$

$$= w_0 h_i (\cos\beta_i \cos\alpha(t) + \sin\beta_i \sin\alpha(t)) =$$

$$= w_0 h_i \cos(\alpha(t) - \beta_i)\,; \qquad (34)$$

здесь

$$\cos\beta_i = \left\langle H_1, N_i^0 \right\rangle / h_i,$$

$$\sin\beta_i = \left\langle H_2, N_i^0 \right\rangle / h_i,\ \beta_i \in [-\pi, \pi].$$

Из (32) и (34) следует

$$s_i^1 = \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \sqrt{w_i^2 - w_0^2 + \left\langle V_0^1(t), N_i \right\rangle^2}\, dt =$$

$$= \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} \sqrt{w_i^2 - w_0^2 + w_0^2 h_i^2 \cos^2(\alpha(t) - \beta_i)}\, dt \le$$

$$\delta(w_i + \sqrt{w_i^2 - w_0^2/2})\,. \qquad (35)$$

Из соотношений (33) и (35) вытекают неравенства

$$s_i^1 \le \delta(w_i + \sqrt{w_i^2 - w_0^2/2}),\ i = 1,2,\ldots,m\,. \qquad (36)$$

Выберем величину ε из условия $\varepsilon < \min\limits_{i=1,\ldots,m} (w_i - \sqrt{w_i^2 - w_0^2/2})/4$. Из соотношений (30), (36) выводим

$$s_i^0 > 2\delta(w_i - (w_i - \sqrt{w_i^2 - w_0^2/2})/2) =$$

$$\delta(w_i + \sqrt{w_i^2 - w_0^2/2}) \ge s_i^1\,.$$

Это означает, что в случае использования стратегии S_1 в момент времени $T(S_0)$ выполняются неравенства $\|X_i - X_0\| > l_i$, $i = 1,2,\ldots,m$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Далее считаем, что выполняется условие (2).

Теорема 1. Стратегия S^* является оптимальной стратегией уклонения.

Доказательство. Вместо задачи (14)–(16) рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$t_{-1} + \sum\nolimits_{R \in \{R\}} t_R \to \max\,, \qquad (37)$$

$$w_i t_{-1} + \sum\nolimits_{R \in \{R\}} u_{iR} t_R \le d_i - l_i,\quad i = 1,2,\ldots,m. \qquad (38)$$

$$t_{-1} \ge 0,\ \ t_R \ge 0,\ \ R \in \{R\}. \qquad (39)$$

Здесь t_{-1} обозначает время, в течение которого выполняется равенство $V_0 = (0,0,\ldots,0)$, а другие величины имеют тот же смысл, что и в задаче (14)–(16). В отличие от задачи (14)–(16), считаем, что в каждый момент времени выполняется одно из двух условий. Справедливо равенство $V_0 = (0,0,\ldots,0)$, или имеется такой целочисленный вектор R, удовлетворяющий условиям (11), (12), что векторы V_0 и $Z(\delta R)$ коллинеарны и $\|V_0\| = w_0$. Вектор $Z(\delta R)$ вычисляется по формулам (9) при условии $\Gamma = \delta R$. Справедливо равенство $\|Z(\delta R)\| = 1$.

Оптимальное решение S_k° задачи (37)–(39) можно представить в виде

$$S_k^\circ = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)}, Z_1^{(k)}, Z_2^{(k)}, \ldots, Z_m^{(k)})\,.$$

Здесь $t_q^{(k)}$ – время, в течение которого соответствующий вектор скорости $V_0^{(k)}$ коллинеарен вектору $Z_q^{(k)}$ (в этом случае $\|V_0^{(k)}\| = w_0$, $\|Z_q^{(k)}\| = 1$) или равен нулевому вектору (в этом случае $Z_q^{(k)} = (0,0,\ldots,0)$).

Как и в разделе 2, легко убедиться в том, что последовательность S_k°, $k = 1,2,3,\ldots$, имеет предельную точку $S^\circ = (t_1^\circ, t_2^\circ, \ldots, t_m^\circ, Z_1^\circ, Z_2^\circ, \ldots, Z_m^\circ)$. Точка S° определяет стратегию уклонения (которая также обозначается S°), состоящую в том, что на непрерывном промежутке времени длиной t_k° соответствующий вектор скорости V_0° коллинеарен вектору Z_k°, причем $\|V_0^\circ\| = w_0$, или же $\|V_0^\circ\| = 0$.

Пусть S – произвольная стратегия уклонения, $V_0(t)$ и $T = T(S)$ – соответствующие скорость уклонения и время окончания игры, $T^\circ = T^\circ(S^\circ) = \sum_{i=1}^m t_i^\circ$ – время окончания игры для стратегии S°. Докажем неравенство

$$T \le T^\circ. \tag{40}$$

Обозначим K_R конус, состоящий из векторов αZ, где $\alpha \ge 0$ – вещественное число, а вектор Z удовлетворяет соотношениям (9) при условиях

$$r_j\delta \le \gamma_j < (r_j+1)\delta,\ j = 1,2,...,n-1.$$

Здесь число δ вычисляется по формуле (10), а целочисленный вектор $R = (r_1, r_2, ..., r_{n-1})$ удовлетворяет условиям (11), (12).

Обозначим T_R множество моментов времени t, удовлетворяющих условиям $0 < t < T$, $\|V_0(t)\| > 0$, $V_0(t) \in K_R$. Пусть T_{-1} – множество моментов времени t, удовлетворяющих условиям $0 < t < T$, $\|V_0(t)\| = 0$. Поскольку функция $V_0(t)$ кусочно-непрерывна, то множества T_R, T_{-1} борелевские [5].

Пусть μ – лебегова мера на отрезке $[0, T]$. Справедливо соотношение $\mu(T_{-1}) + \sum_{R\in\{R\}} \mu(T_R) = T$. Из этого равенства получаем

$$w_i\mu(T_{-1}) + \sum_{R\in\{R\}} \int_{T_R} u_i(t)d\mu \le d_i - l_i,\quad i = 1,2,...,m. \tag{41}$$

Поскольку функции $u_i(t)$ кусочно-непрерывны, а множества T_R борелевские, то интегралы в (41) существуют [5].

Оценим интегралы в соотношениях (41). Пусть $t \in T_R$, $\|V_0(t)\| > 0$, $V_0(t) \in K_R$.

Обозначим $V_{0R}(t)$ вектор, коллинеарный вектору $Z(\delta R)$ и такой, что $\|V_{0R}(t)\| = \|V_0(t)\|$. Пусть $u_{i0R}(t)$ означает скорость сближения точек X_0 и X_i, соответствующую вектору $V_{0R}(t)$. Согласно лемме 1, величины $u_{i0R}(t)$ вычисляются по формулам

$$u_{i0R} = v_0\langle N_{0R}, N_i\rangle + \sqrt{w_i^2 - v_0^2(1 - \langle N_{0R}, N_i\rangle^2)},\quad i = 1,2,...,m; \tag{42}$$

здесь $N_{0R} = Z(\delta R) = V_{0R}/\|V_{0R}\|$. Используя леммы 3 и 5 и формулу (10), получаем

$$\int_{T_R} u_i(t)d\mu = \int_{T_R}(u_i(t) - u_{i0R}(t) + u_{i0R}(t))d\mu \ge$$
$$\ge \int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu - \int_{T_R}|u_i(t) - u_{i0R}(t)|d\mu \ge$$
$$\ge \int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu - \int_{T_R} 2v_0(t)\|N_0(t) - N_{0R}\|d\mu \ge$$
$$\ge \int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu - 2w_0\delta\sqrt{n-1}\mu(T_R) =$$
$$= \int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu - \pi w_0\sqrt{n-1}\mu(T_R)/k; \tag{43}$$

здесь $N_0(t) = V_0(t)/\|V_0(t)\|$.

Оценим величину $\int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu$ из соотношений (43). Согласно лемме 2, функция $u_{i0R} = u_{i0R}(v_0)$ вогнута по v_0, поэтому справедливы соотношения

$$u_{i0R}(v_0) = u_{i0R}((1 - v_0/w_0)\cdot 0 + (v_0/w_0)w_0) \ge$$
$$\ge (1 - v_0/w_0)u_{i0R}(v_0 = 0) +$$
$$+ (v_0/w_0)u_{i0R}(v_0 = w_0). \tag{44}$$

Согласно формулам (13) и (42), имеем $u_{i0R}(v_0 = 0) = w_i$, $u_{i0R}(v_0 = w_0) = u_{iR}$. Из этих соотношений и (44) выводим

$$u_{i0R}(t) = u_{i0R}(v_0(t)) \ge$$
$$\ge (1 - v_0(t)/w_0)w_i + (v_0(t)/w_0)u_{iR}.$$

Из последнего соотношения следует

$$\int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu \geq w_i \int_{T_R} (1 - v_0(t)/w_0)d\mu +$$

$$+ u_{iR}\int_{T_R} v_0(t)/w_0 d\mu .$$

Обозначим $\tau_R = \int_{T_R} (1 - v_0(t)/w_0)d\mu$, $t_R =$ $= \int_{T_R} v_0(t)/w_0 d\mu$.

Получаем неравенство

$$\int_{T_R} u_{i0R}(t)d\mu \geq w_i\tau_R + u_{iR}t_R . \qquad (45)$$

Из (43) и (45) выводим

$$\int_{T_R} u_i(t)d\mu \geq$$

$$\geq w_i\tau_R + u_{iR}t_R - \pi w_0\sqrt{n-1}\mu(T_R)/k .$$

Используя это неравенство, соотношения (41) и неравенство $\sum_{R\in\{R\}}\mu(T_R) \leq T$, получаем

$$w_i t_{-1} + \sum_{R\in\{R\}} u_{iR}t_R \leq d_i - l_i + \pi w_0 T\sqrt{n-1}/k ,$$

$$i = 1,2,...,m . \qquad (46)$$

Здесь $t_{-1} = \mu(T_{-1}) + \sum_{R\in\{R\}}\tau_R$. Очевидно, $\tau_R + t_R = \mu(T_R)$, поэтому

$$t_{-1} + \sum_{R\in\{R\}} t_R = T . \qquad (47)$$

Согласно лемме 4, справедливо соотношение $T \leq \overline{T}$, поэтому из (46) следуют неравенства

$$w_i t_{-1} + \sum_{R\in\{R\}} u_{iR}t_R \leq d_i - l_i + \pi w_0\overline{T}\sqrt{n-1}/k,$$

$$i = 1,2,...,m . \qquad (48)$$

Обозначим

$$g_{ik} = \frac{d_i - l_i}{d_i(0) - l_i + \pi w_0\overline{T}\sqrt{n-1}/k},$$

$$i = 1,2,...,m, \quad k = 1,2,... .$$

Из соотношений (1) следуют неравенства $g_{ik} > 0$, поэтому величины $g_k = \min_{i=1,...,m} g_{ik}$ положительны. Пусть $\tilde{t}_{-1} = g_k t_{-1}$, $\tilde{t}_R =$ $= g_k t_R$, $R \in \{R\}$. Из неравенств (48) следуют неравенства

$$w_i\tilde{t}_{-1} + \sum_{R\in\{R\}} u_{iR}\tilde{t}_R \leq d_i - l_i,\ i = 1,2,...,m . \qquad (49)$$

Из соотношения (47) вытекает равенство

$$\tilde{T}_k = g_k T , \qquad (50)$$

где $\tilde{T}_k = \tilde{t}_{-1} + \sum_{R\in\{R\}}\tilde{t}_R$.

Соотношения (49) означают, что множество чисел $(\tilde{t}_{-1}, \tilde{t}_R, R \in \{R\})$ является допустимым решением задачи (37)–(39), при этом число $\tilde{T}_k$ – соответствующее значение целевой функции. Пусть T_k° – оптимальное значение целевой функции задачи (37)–(39). Из равенства (50) следует

$$T_k^\circ \geq g_k T ,\ \ k = 1,2,... . \qquad (51)$$

Пусть $p_1, p_2, ..., p_j, ...$ – последовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{j\to\infty} S_{p_j}^\circ = S^\circ$. Справедливы равенства $\lim_{k\to\infty} g_k = 1$ и $\lim_{j\to\infty} T_{p_j}^\circ = T^\circ$, где $T^\circ = \sum_{i=1}^m t_i^\circ$.

Из соотношений (51) вытекает $T_{p_j}^\circ \geq g_{p_j}T$, $j = 1,2,...$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем $T^\circ \geq T$. Соотношение (40) доказано. Нетрудно видеть, что для каждой предельной точки последовательности S_k° соответствующее время окончания игры равно одному и тому же числу T°.

Рассмотрим оптимальные решения S_k^* и S_k° задач (14)–(16) и (37)–(39) соответственно. Поскольку S^* – предельная точка последовательности S_k^*, $k = 1,2,...$, то существует такая последовательность натуральных чисел $p_1, p_2, ..., p_j, ...$, что $\lim_{j\to\infty} S_{p_j}^* = S^*$. Абсолютные величины компонент векторов S_k°, $k = 1,2,...$, не превосходят некоторой константы, поэтому последовательность $S_{p_j}^\circ$, $j = 1,2,...$, имеет предельную точку S°. Это означает, что найдется такая подпоследовательность

$q_1, q_2, ..., q_j, ...$ последовательности $p_1, p_2, ...$ $..., p_j, ...$, что

$$\lim_{j\to\infty} S^{\circ}_{q_j} = S^{\circ}. \quad (52)$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty} S^{*}_{q_j} = S^{*}. \quad (53)$$

Обозначим $t^{(k)}_{-1}$, t°_{-1} время, на протяжении которого скорость объекта E равна нулю в решениях S°_k и S° соответственно. Из леммы 6 и соотношения (40) следует равенство $t^{\circ}_{-1} = 0$. Из этого равенства и (52) получаем

$$\lim_{j\to\infty} t^{(q_j)}_{-1} = 0. \quad (54)$$

Пусть $T^*_k, T^*, T^{\circ}_k, T^{\circ}$ – времена окончания игры для стратегий $S^*_k, S^*, S^{\circ}_k, S^{\circ}$ соответственно. Из равенств (52), (53) получаем

$$\lim_{j\to\infty} T^{\circ}_{q_j} = T^{\circ}, \ \lim_{j\to\infty} T^{*}_{q_j} = T^{*}. \quad (55)$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$T^{\circ}_{q_j} - t^{(q_j)}_{-1} \le T^{*}_{q_j} \le T^{\circ}_{q_j}, \quad j = 1,2,.... \quad (56)$$

Переходя в (56) к пределу по $j \to \infty$ и учитывая соотношения (54), (55), получаем $T^* = T^{\circ}$. Из последнего равенства следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если в момент времени $t \in (0, T^*)$ оптимальная стратегия $V^*_0(t)$ непрерывна, то справедливо равенство $\|V^*_0(t)\| = w_0$.

Доказательство. Предположим, в момент времени $t' \in (0, T^*)$, где t' – точка непрерывности функции $V^*_0(t)$, справедливо равенство $\|V^*_0(t')\| = 0$. Из леммы 6 следует, что существует стратегия уклонения, время окончания игры для которой больше T^*. Это противоречит условию оптимальности стратегии $V^*_0(t)$, из чего следует утверждение теоремы.

Пусть в момент времени $t' \in (0, T^*)$ функция $V^*_0(t)$ непрерывна и справедливы неравенства

$$0 < \|V^*_0(t')\| < w_0. \quad (57)$$

Докажем, что соотношения (57) противоречат оптимальности стратегии $V^*_0(t)$.

Пусть $\varepsilon = (w_0 - \|V^*_0(t')\|)/2$. Поскольку кусочно-непрерывная функция $v^*_0(t) = \|V^*_0(t)\|$ непрерывна в точке t' и $t' \in (0, T^*)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что при условии $t \in \Delta$, где $\Delta = [t' - \delta, t' + \delta] \subset (0, T^*)$, выполняется неравенство

$$|v^*_0(t) - v^*_0(t')| \le \varepsilon, \quad (58)$$

а функция $v^*_0(t)$ непрерывна и положительна на отрезке Δ.

По теореме Вейерштрасса, функция $v^*_0(t)$ на отрезке Δ достигает своего максимального значения, которое обозначим $\bar{v}^*_0$; очевидно, $\bar{v}^*_0 > 0$. Из соотношения (58) следует

$$\bar{v}^*_0 \le v^*_0(t') + \varepsilon = w_0 - \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $\tilde{V}_0(t)$, совпадающую с функцией $V^*_0(t)$ при условии $t \in (0, T^*) \setminus \Delta$ и равную $\frac{w_0}{\bar{v}^*_0} V^*_0(t)$ при условии $t \in \Delta$. Справедливо соотношение

$$\tilde{v}_0(t) = \frac{w_0}{\bar{v}^*_0} v^*_0(t), \quad t \in \Delta, \quad (59)$$

где $\tilde{v}_0(t) = \|\tilde{V}_0(t)\|$.

Обозначим $N^*_0(t) = V^*_0(t)/\|V^*_0(t)\|$, $\tilde{N}_0(t) = \tilde{V}_0(t)/\|\tilde{V}_0(t)\|$. Очевидно, $N^*_0(t) =$

$= \tilde{N}_0(t)$. Пусть $u_i^*(t)$ и $\tilde{u}_i(t)$ – скорости сближения точек X_0 и X_i для стратегий V_0^* и $\tilde{V}_0$ соответственно. Согласно формуле (20) справедливы равенства

$$u_i^*(t) = u_i(v_0^*(t), N_0^*(t)),$$

$$\tilde{u}_i(t) = u_i(\tilde{v}_0(t), \tilde{N}_0(t)).$$

Согласно лемме 2, скорость сближения u_i точек X_0 и X_i как функция от переменной v_0 вогнута. Поэтому, учитывая (59), при условии $t \in \Delta$ получаем

$$u_i^*(t) = u_i(v_0^*(t), N_0^*(t)) =$$

$$= u_i[(1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) \cdot 0 + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} \tilde{v}_0(t), \tilde{N}_0(t)] \geq$$

$$\geq (1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) w_i + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} u_i(\tilde{v}_0(t), \tilde{N}_0(t)) =$$

$$= (1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) w_i + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} \tilde{u}_i(t), \; i = 1,2,\dots,m.$$

Пусть s_i^* – величина уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i на временном отрезке Δ при условии использования функции $V_0^*(t)$. Имеем

$$s_i^* = \int_\Delta u_i^*(t)dt \geq \int_\Delta [(1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) w_i + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} \tilde{u}_i(t)]dt \geq$$

$$\geq 2\delta w_i (1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} \int_\Delta \tilde{u}_i(t)dt, \quad (60)$$

$$i = 1,2,\dots,m.$$

Определим стратегию $\hat{V}_0(t)$ следующим образом:

$$\hat{V}_0(t) =$$

$$= \begin{cases} V_0^*(t), t \in (0, T^*) \setminus \Delta, \\ (0,0,\dots,0), t \in [t' - \delta, t' - \delta + a), \\ \dfrac{w_0}{\bar{v}_0^*} V_0^*(\tau(t)), t \in [t' - \delta + a, t' + \delta]; \end{cases} \quad (61)$$

здесь

$$a = 2\delta(1 - \bar{v}_0^* / w_0),$$

$$\tau(t) = (1 - w_0 / \bar{v}_0^*)(t' + \delta) + (w_0 / \bar{v}_0^*)t.$$

Обозначим $\hat{u}_i(t)$ скорости сближения точек X_0 и X_i для стратегии $\hat{V}_0$. Очевидно, при условии $t \in [t' - \delta + a, t' + \delta]$ справедливо равенство $\hat{V}_0(t) = \tilde{V}_0(\tau(t))$, из которого следует

$$\hat{u}_i(t) = \tilde{u}_i(\tau(t)), \; t \in [t' - \delta + a, t' + \delta]. \quad (62)$$

Пусть $\hat{s}_i$ – величина уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i на временном отрезке Δ при условии применения функции $\hat{V}_0(t)$. Используя соотношения (61), (62) и замену переменных

$$\tau(t) = (1 - w_0 / \bar{v}_0^*)(t' + \delta) + (w_0 / \bar{v}_0^*)t,$$

получаем

$$\hat{s}_i = \int_\Delta \hat{u}_i(t)dt = \int_{t'-\delta}^{t'-\delta+a} w_i dt + \int_{t'-\delta+a}^{t'+\delta} \hat{u}_i(t)dt =$$

$$= 2\delta w_i (1 - \frac{\bar{v}_0^*}{w_0}) + \frac{\bar{v}_0^*}{w_0} \int_\Delta \tilde{u}_i(\tau)d\tau, \quad (63)$$

$$i = 1,2,\dots,m.$$

Из соотношений (60) и (63) вытекают неравенства $\hat{s}_i \leq s_i^*$, $i = 1,2,\dots,m$, откуда вытекает справедливость соотношения

$$\hat{T} \geq T^*, \quad (64)$$

где $\hat{T}$ – время окончания игры для стратегии $\hat{V}_0(t)$. Величина скорости стратегии $\hat{V}_0(t)$ на промежутке положительной длины $a = 2\delta(1 - \bar{v}_0^* / w_0)$ равна нулю, поэтому из леммы 6 вытекает существование стратегии, время окончания игры которой T° удовлетворяет неравенству $T^\circ > \hat{T}$. Из этого неравенства и (64) следует соотношение $T^\circ > T^*$, которое противоречит условию оптимальности стратегии $V_0^*(t)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Оптимальное значение целевой функции T_k^* удовлетворяет неравенствам

$$h_k T^* \le T_k^* \le T^*. \qquad (65)$$

Доказательство. Пусть $S_k^* = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_m^{(k)}, Z_1^{(k)}, Z_2^{(k)}, ..., Z_m^{(k)})$ – оптимальное решение задачи (14)–(16), T_k^* – соответствующее оптимальное значение целевой функции, $T_k^* = \sum_{q=1}^m t_q^{(k)}$. Из теоремы 1 следует существование такой оптимальной стратегии уклонения $S^* = (t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*, Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_m^*)$, что на непрерывном промежутке времени длиной t_q^* вектор скорости V_0^* коллинеарен вектору Z_q^*, причем $\|V_0^*\| = w_0$, $\|Z_q^*\| = 1$ и $T^* = \sum_{i=1}^m t_q^*$.

Поскольку S_k^* является стратегией уклонения, а S^* является оптимальной стратегией, то второе неравенство (65) справедливо. Докажем первое неравенство (65).

Можно считать, что оптимальная стратегия уклонения S^* имеет следующий вид. Представим временной промежуток $[0, T^*)$ в виде объединения m непрерывных непересекающихся промежутков, $[0, T^*) = \bigcup_{q=1}^m [\tau_q^{(1)}, \tau_q^{(2)})$. Длина промежутка $[\tau_q^{(1)}, \tau_q^{(2)})$ равна t_q^*, а вектор скорости оптимальной стратегии уклонения на промежутке $[\tau_q^{(1)}, \tau_q^{(2)})$ равен $w_0 Z_q^*$.

Обозначим K_R конус, состоящий из векторов αZ, где $\alpha \ge 0$ – вещественное число, а вектор Z удовлетворяет соотношениям (9) при условиях

$$r_j \delta \le \gamma_j < (r_j + 1)\delta, \; j = 1, 2, ..., n-1.$$

Здесь число δ вычисляется по формуле (10), а целочисленный вектор $R = (r_1, r_2, ..., r_{n-1})$ удовлетворяет условиям (11), (12).

Пусть $R(q)$ – такой вектор из множества $\{R\}$, что конус $K_{R(q)}$ содержит вектор Z_q^*. Обозначим u_{iq}^* скорость уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i на промежутке $[\tau_q^{(1)}, \tau_q^{(2)})$ при условии применения оптимальной скорости $w_0 Z_q^*$. Пусть $u_{iR(q)}$ – скорость уменьшения расстояния между точками X_0 и X_i при условии, что векторы V_0 и $Z(\delta R(q))$ коллинеарны и $\|V_0\| = w_0$. Здесь вектор $Z(\delta R(q))$ вычисляется по формулам (9) при условии $\Gamma = \delta R(q)$. С помощью лемм 3 и 5 получаем

$$\left|u_{iq}^* - u_{iR(q)}\right| \le 2w_0 \left\|Z_q^* - Z(\delta R(q))\right\| \le$$

$$\le 2w_0 \delta \sqrt{n-1}, \; i, q = 1, 2, ..., m. \qquad (66)$$

Справедливы неравенства

$$\sum_{q=1}^m u_{iq}^* t_q^* \le d_i - l_i, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (67)$$

Используя соотношения (66), получаем

$$\sum_{q=1}^m u_{iq}^* t_q^* = \sum_{q=1}^m (u_{iq}^* - u_{iR(q)} + u_{iR(q)}) t_q^* \ge$$

$$\ge \sum_{q=1}^m u_{iR(q)} t_q^* - 2w_0 \delta T^* \sqrt{n-1},$$

$$i = 1, 2, ..., m.$$

Из этих неравенств и (67) вытекают неравенства

$$\sum_{q=1}^m u_{iR(q)} t_q^* \le d_i - l_i + 2w_0 \delta T^* \sqrt{n-1},$$

$$i = 1, 2, ..., m. \qquad (68)$$

Согласно лемме 4, справедливо соотношение $T^* \le \overline{T}$. Используя эту оценку и формулу (10), из (68) выводим

$$\sum_{q=1}^m u_{iR(q)} t_q^* \le d_i - l_i + \pi w_0 \overline{T} \sqrt{n-1} / k,$$

$$i = 1, 2, ..., m. \qquad (69)$$

Из определения величин h_k и (69) вытекают неравенства

$$\sum_{q=1}^m u_{iR(q)} h_k t_q^* \le d_i - l_i, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Эти соотношения означают, что вектор $h_k(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$ определяет допустимое решение задачи (14)–(16), значение целевой функции которого равно $h_k \sum_{i=1}^{m} t_q^* = h_k T^*$. Это значение не превышает оптимального значения целевой функции T_k^*, откуда следует первое неравенство (65).

Теорема доказана.

1. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. – Новосибирск: Наука, 1983. – 140 с.
2. *Marcos A.M. Vieira and Ramesh Govindan and Gaurav S. Sukhatme*. "Scalable and Practical Pursuit-Evasion with Networked Robots" // Journal of Intelligent Service Robotics. Special Issue on Networked Robots. – 2009. – N 2. – P. 247–263.
3. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. – Ташкент: ФАН, 1989. – 232 с.
4. *Карманов В.Г.* Математическое программмирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
5. *Колмогоров* А.Н., *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
6. *Пашко С.В.* Квазиоптимальные стратегии в дифференциальных играх преследования на плоскости // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 6. – С. 30–43.

Получено 02.12.2013

Об авторах:

Пашко Сергей Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,

Яловец Андрей Леонидович,
доктор технических наук,
заместитель директора института.

Место работы авторов:

Институт программных систем
НАН Украины,
03187, Киев-187,
проспект Академика Глушкова, 40.

Тел.: (044) 526 60 25.
E-mail: pashko55@yahoo.com

Тел.: (044) 526 15 38.
E-mail: yal@isofts.kiev.ua