УДК 519.233.5

С.Г. РАДЧЕНКО*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛЕЙ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

*Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

Анотація. *Викладено рішення основних проблем регресійного аналізу – одержання статистично ефективних та стійких моделей. Рішення приведені для реальних прикладних умов складних систем та процесів, які характеризуються значною невизначеністю. Показано, що основним підходом в одержаних рішеннях є використання умов одержання моделей для визначеного їх класу і розширеної концепції ортогональності.*
Ключові слова: *регресійний аналіз, статистичне оцінювання моделей, планування експерименту, статистична ефективність, стійкість оцінювання.*

Аннотация. *Изложено решение основных проблем регрессионного анализа – получение статистически эффективных и устойчивых моделей. Решения приведены для реальных прикладных условий сложных систем и процессов, которые характеризуются значительной неопределенностью. Показано, что основным подходом в полученных решениях является использование условий получения моделей для определенного их класса и расширенной концепции ортогональности.*
Ключевые слова: *регрессионный анализ, статистическое оценивание моделей, планирование эксперимента, статистическая эффективность, устойчивость оценивания.*

Abstract. *Solution of basic problems of regression analysis – the obtaining of statistically efficient and stable models is stated. Solutions are presented for real applied conditions of complex systems and processes which are characterized by considerable indeterminacy. It is shown that the use of conditions of models obtaining for their certain class and extended conception of orthogonality is the basic approach in the obtained solutions.*
Keywords: *regression analysis, statistical estimation of models, experiment design, statistical efficiency, estimation stability.*

1. Введение. Постановка проблемы

При создании и совершенствовании сложных систем и процессов целесообразно использовать многокритериальную компромиссную оптимизацию и многофакторное математическое моделирование. Решение реальных прикладных задач осуществляется в условиях существенной неопределенности: структура многофакторной модели, сложность влияния факторов и другие условия исследователю обычно неизвестны. Исходные данные содержат случайные и систематические ошибки. Решаемые задачи статистического моделирования относятся к классу обратных задач: по полученным результатам необходимо восстановить влияние факторов в виде главных эффектов и их взаимодействий [1, с. 17].

$$\mathrm{Y} = \mathrm{XB} + \varepsilon,$$

где Y – матрица-столбец полученных результатов опытов;
X – условия эксперимента в виде главных эффектов и их взаимодействий;
B – матрица-столбец определяемых коэффициентов математической модели;
ε – значения случайных ошибок ε.

Используется полиномиальная математическая модель, линейная по параметрам и нелинейная по факторам:

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k + b_h x_1 x_2 + \ldots + b_l x_1 x_2 \ldots x_k,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_l$ – коэффициенты математической модели;

$x_0 \equiv 1$ – фиктивный фактор;

$x_1, x_2, ..., x_k$ – ортогональные контрасты управляемых факторов $X_1, X_2, ..., X_k$;

k – число факторов.

Управляемые факторы $X_1, ..., X_k$ должны быть независимы относительно друг друга в физическом и статистическом смысле.

$$r_{ij}(X_i, X_j) = 0, \quad 1 \le i < j \le k,$$

где $r_{ij}(X_i, X_j)$ – коэффициент парной корреляции факторов X_i, X_j.

Дисперсии коэффициентов b_i, b_{ij} для соответствующих эффектов будут равны [2, с. 253]

$$D(b_i; b_{ij}) = \frac{\sigma^2_{\text{восп}}}{N(1 - R^2_{i;ij})},$$

где $\sigma^2_{\text{восп}}$ – дисперсия воспроизводимости результатов экспериментов;

N – общее число проведенных экспериментов;

$R^2_{i;ij}$ – квадрат коэффициента множественной корреляции между эффектами $x_i^{(p)}$ или $x_i^{(p)} x_j^{(q)}$ и всеми остальными эффектами в полученной модели.

При $R^2_{i;ij} \to 1$ множитель $[1/(1 - R^2_{i;ij})] \to \infty$ и дисперсии коэффициентов неограниченно увеличиваются. При $R^2_{i;ij} \to 0$ множитель $[1/(1 - R^2_{i;ij})] \to 1$ и при $R^2_{i;ij} = 0$, то есть в случае ортогональности всех эффектов друг относительно друга, $[1/(1 - R^2_{i;ij})] = 1$. Тогда дисперсия коэффициентов модели b_i, b_{ij} становится минимально возможной, или оценка эффективна в статистическом смысле.

Фактическое обеспечение выполнения указанной предпосылки является одной из основных проблем многофакторного регрессионного анализа. Если предпосылка не выполняется, то задача является некорректно поставленной и требует специальных методов ее решения.

Коррелированность факторов приводит к смешиванию эффектов, что создает неопределенность их истинных значений, увеличивает среднеквадратичные ошибки эффектов, делает некорректным использование статистических критериев ($t-$, $F-$критерии).

2. Анализ достижений и публикаций по теме исследования

В общем случае решаемая задача относится к классу некорректно поставленных задач – искомая модель неопределенна, а коэффициенты могут содержать существенные статистические и систематические ошибки.

Сложность и специфичность решения математических задач с неточными исходными данными заключаются в том, что реализация решения на современных ЭВМ в рамках классических методов не гарантирует устойчивых результатов. Акад. А.Н. Тихонов считал, что «устойчивые математические методы решения неустойчивых задач с неточными данными относятся к классу математических задач, выходящих за пределы классической математики» [3, с. 94].

В [4, с. 144] отмечается, что существование сильной линейной зависимости между факторами «вызывает целый ряд проблем при оценке коэффициентов этой модели: делает матрицу $(X^{т}X)$ плохо обусловленной; как правило, имеет ухудшение точности оценок коэффициентов модели, рост их дисперсий; оценки коэффициентов модели становятся чрезвычайно чувствительными к незначительным изменениям исходных данных (значений элементов вектора $\boldsymbol{y}$ и матрицы X), а также к ошибкам округлений числовых данных расчетов».

По мнению д.т.н. В.В. Налимова и к.т.н. Т.И. Голиковой, стоит «…новая задача перед планированием эксперимента – нужны робастные планы, то есть планы, малочувствительные к возможному изменению моделей хотя бы в пределах некоторого их класса» [5, с. 120]. Подчеркивается, что матрица независимых переменных X появляется только после того, как модель задана [5, с. 31].

Д.т.н. В.В. Налимов считал проблему «…что есть хороший эксперимент», связанной с другой проблемой – «…что есть хорошая математическая модель – это кардинальный вопрос, стоящий теперь перед нами во всей своей остроте… Достаточно формализованного ответа на вопрос – что есть хорошая модель, по-видимому, вообще нельзя будет найти» [6, с. 3].

Д.ф.-м.н. Ю.Н. Тюрин и к.ф.-м.н. А.А. Макаров рассматривают стратегию, методы и проблемы линейного регрессионного анализа в [7, с. 245–284]. Однако «…обширная тема, носящая название множественной регрессии, не нашла отражения в данной книге» [7, с. 249].

Одной из важных предпосылок задачи регрессионного анализа является вид функциональной зависимости $y_i = f(x_i, \theta) + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n$. «Важно выбрать функцию $f(x, \theta)$ так, чтобы она не просто хорошо описывала закономерную часть отклика, но и имела “физический” смысл, то есть открывала какую-то объективную закономерность… Поэтому выбор типа регрессионной зависимости $\hat{y}_i = f(x_i, \theta)$ является самой острой проблемой в любом исследовании» [7, с. 255]. Рассматривается корректность выбора однофакторной регрессии. Рекомендации по выбору структуры в многофакторном случае отсутствуют.

К.ф.-м.н. Е.Л. Жуковский отмечает, что «проблема автоматизации научного измерительного эксперимента связана с необходимостью получения устойчивых решений многочисленных практических задач» [8, с. 47]. Значительно менее разработанными оказались методы решения некорректных задач для тех случаев, когда в правой части «уравнений и в операторе возмущения случайны» [8, с. 49]. Задача интерпретации обычно сводится к решению уравнения $Ax = y$ [8, с. 47, 52], «которое может оказаться неустойчивым и порождать собственную ложную структуру решения. Взаимосвязанность этих двух задач – статистической обработки и интерпретации – является одной из сложнейших и мучительных задач проблемы автоматизации обработки, интерпретации и моделирования данных эксперимента» [8, с. 52].

В [9, с. 408–415] рассмотрен анализ спецификации модели. Анализ построен на предположении, что исследователю известна корректная спецификация – правильный вид регрессионной модели [9, с. 408]. Введение новых переменных оценивается с использованием скорректированного квадрата коэффициента множественной корреляции R^2. Привлекательным является метод пошаговой регрессии, однако, поскольку при выполнении этой процедуры классические методы статистических выводов утрачивают силу, «…экономисты стараются избегать методов пошаговой регрессии» [9, с. 410]. Рекомендации по выбору структурных элементов статистической модели и их ортогональности друг к другу не приведены.

В [10, с. 431–486] рассмотрено получение наилучшего регрессионного уравнения. Кратко изложен выбор всех возможных регрессий и «лучшие подмножества» регрессий. Выбор «лучших подмножеств» регрессий осуществляется с использованием квадрата коэффициента множественной корреляции R^2. Рассмотрен шаговый метод построения регрессий методом включения и методом исключения эффектов факторов. Планирование эксперимента с целью получения наилучших условий для определяемой модели не рассматривается. Отмечается, что «ни один метод не будет одинаково хорошо работать в любых обстоятельствах, как бы хорошо он не зарекомендовал себя на конкретном примере. Ни один метод не будет всегда оказываться лучше всех остальных» [10, с. 456]. «Рассмотренные… методы являются полезными инструментами. Но ни один из них не заменит здравый смысл и опыт» [10, с. 456].

В [11] изложено планирование эксперимента 2^k, 2^{k-p}, 3^k, планы второго порядка, планы на симплексе. Определение структур моделей для более сложных планов, если структура модели исследователю не известна, не рассмотрено.

Приведенные мнения авторитетных специалистов по математике, регрессионному анализу, планированию эксперимента показали сложность проблемы и отсутствие согласованных действий по ее решению. Отсутствуют формализованные решения получения статистических моделей для реальных задач в условиях начальной неопределенности. Проблема статистической эффективности и устойчивости моделей в регрессионном анализе разработана недостаточно.

3. Цель статьи

Разработать методы получения многофакторных статистических моделей, обеспечивающие статистически эффективные, то есть минимально возможные, оценки ошибок коэффициентов и устойчивость получаемой структуры модели.

4. Решение проблемы

Будем использовать модели линейные по параметрам и, в общем случае, нелинейные по факторам.

Коэффициенты модели в матричном виде определяют по формуле

$$\mathrm{B} = (\mathrm{X}^{\mathrm{т}}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{т}}\mathrm{Y},$$

где B – матрица-столбец определяемых коэффициентов математической модели;

X – расширенная матрица эффектов определяемой модели;

Y – матрица-столбец полученных результатов опытов;

т – знак транспонирования матрицы X;

–1 – знак обратной матрицы.

Так как структура статистической модели исследователю не известна, необходимо использовать такой класс моделей, который содержал бы структуру искомой математической модели. Используемый класс моделей должен позволять устойчиво определять различные модели, входящие в него. Теоретический анализ различных классов моделей показал, что этому требованию соответствует класс моделей полного факторного эксперимента. Формализованная структура класса моделей полного факторного эксперимента задается выражением

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + ... + x_i^{(s_i-1)}) \to N_{\Pi},$$

где $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, ..., x_i^{(s_i-1)}$ – ортогональные контрасты факторов X_i;

s_i – число различных уровней фактора X_i;

(1), (2), …, ($s_i - 1$) – порядок контрастов фактора X_i;

N_{Π} – число структурных элементов полного факторного эксперимента, равное числу опытов эксперимента.

Предполагается, что порядок максимального значения ортогонального контраста $s_i - 1$ достаточный для адекватного описания влияния фактора X_i по всей области факторного пространства. Значение s_i назначается исследователем, исходя из логически профессионального анализа предметной области.

Для полного факторного эксперимента число структурных эффектов (элементов) модели равно числу опытов плана эксперимента N_{Π}, и все эффекты ортогональны друг к другу [12, с. 26–29]. Получаемая статистическая модель будет адекватна результатам эксперимента, так как множество структурных элементов необходимо и достаточно для описания результатов опытов.

Рассмотрим построение структуры модели для полного факторного эксперимента $2^1 \times 3^1 \times 4^1 // 24$: первый фактор x_1 на двух, второй x_2 на трех, третий x_3 на четырех уровнях. Формализованная структура статистической модели будет следующей:

$$(1 + x_1^{(1)})(1 + x_2^{(1)} + x_2^{(2)})(1 + x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)}) \to N_{\Pi} = 24,$$

где $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ – линейные контрасты факторов X_1, X_2, X_3;

$x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ – квадратичные контрасты факторов X_2, X_3;

$x_3^{(3)}$ – кубический контраст фактора X_3;

$N_{\Pi} = 24$ – число структурных элементов статистической модели, равное числу опытов плана экспериментов.

Общий вид статистической модели будет следующий:

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1^{(1)} + b_2 x_2^{(1)} + b_3 x_2^{(2)} + b_4 x_3^{(1)} + b_5 x_3^{(2)} + b_6 x_3^{(3)} + b_7 x_1^{(1)} x_2^{(1)} + b_8 x_1^{(1)} x_2^{(2)} +$$

$$+ b_9 x_1^{(1)} x_3^{(1)} + b_{10} x_1^{(1)} x_3^{(2)} + b_{11} x_1^{(1)} x_3^{(3)} + b_{12} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + b_{13} x_2^{(1)} x_3^{(2)} + b_{14} x_2^{(1)} x_3^{(3)} +$$

$$+ b_{15} x_2^{(2)} x_3^{(1)} + b_{16} x_2^{(2)} x_3^{(2)} + b_{17} x_2^{(2)} x_3^{(3)} + b_{18} x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + b_{19} x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(1)} +$$

$$+ b_{20} x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(3)} + b_{21} x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(1)} + b_{22} x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(2)} + b_{23} x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(3)}.$$

Модель содержит семь главных эффектов, одиннадцать двойных взаимодействий и шесть тройных взаимодействий.

В случае выбора дробного факторного регулярного плана эксперимента все главные эффекты будут ортогональны друг к другу. Из структуры модели полного факторного эксперимента возможно выделение различных структур статистических моделей $\hat{y}_w$ для дробного факторного эксперимента. Если план эксперимента не выбирать близким к насыщенному – для дробных факторных экспериментов можно рекомендовать выбирать число опытов с учетом эмпирической формулы $N_{Д} \approx (1{,}5 \ldots 2) \sum_{i=1}^{k} (s_i - 1)$, где s_i – число уровней i-го фактора, – то некоторые взаимодействия и все главные эффекты будут ортогональны друг к другу.

Рассмотрим полный факторный эксперимент. Расширенная матрица X главных эффектов и взаимодействий содержит столбец фиктивного фактора $x_0 \equiv 1$, столбцы всех главных эффектов и всех возможных взаимодействий главных эффектов. Если эффекты факторов и взаимодействий факторов выразить в виде системы ортогональных нормированных контрастов, то есть

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^{(p)} = 0, \qquad \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^{(p)} \times x_{ju}^{(q)} = 0,$$

$$\sum_{u=1}^{N} [x_{iu}^{(p)}]^2 = N, \qquad \sum_{u=1}^{N} \left[x_{iu}^{(p)} \times x_{ju}^{(q)}\right]^2 = N,$$

то матрица дисперсий-ковариаций примет вид

$$(\mathrm{X}^{\mathrm{т}}\mathrm{X})^{-1}\sigma^2(\varepsilon) = (1/\mathrm{N})\mathrm{E}\sigma^2(\varepsilon),$$

где $x_{iu}^{(p)}$ – значение p-го ортогонального контраста i-го фактора для u-той строки матрицы планирования эксперимента, $1 \le u \le N$, $1 \le p \le s_i - 1$;

$x_{ju}^{(q)}$ – значение q-го ортогонального контраста j-го фактора для u-той строки матрицы планирования эксперимента, $1 \le q \le s_j - 1$, $1 \le i < j \le k$;

X – матрица эффектов полного факторного эксперимента;

$\sigma^2(\varepsilon))$ – теоретическое значение дисперсии воспроизводимости результатов опытов;

N – число опытов в плане эксперимента;

E – единичная матрица.

Наилучшей многофакторной статистической моделью будем считать модель, соответствующую критериям $D-, A-, E-, G-$оптимальности, ортогональности (или квазиортогональности) и устойчивости структуры и коэффициентов.

По теореме Бродского В.З. [12, с. 26–29] в полном факторном эксперименте все эффекты ортогональны друг к другу. Эффекты выражаются системой ортогональных контрастов, что эквивалентно системе ортогональных полиномов Чебышева [1, с. 54–63].

Анализ требований к многофакторному плану эксперимента показал, что они выполняются для любых полных факторных экспериментов и получаемые модели будут «истинными», то есть наилучшими из возможных. По теореме Хотеллинга выполнение требования ортогональности всех эффектов приводит к минимизации дисперсий коэффициентов статистической модели и получению совместно эффективных оценок [13, с. 62–63]. При выполнении указанных теорем план эксперимента X соответствует критерию $D-$оптимальности, так как определитель матрицы дисперсий-ковариаций $(\mathrm{X}^{\mathrm{т}}\mathrm{X})^{-1}$ соответствует минимуму или (что то же самое) определитель информационной матрицы $(\mathrm{X}^{\mathrm{т}}\mathrm{X})$ соответствует максимуму. В полном факторном эксперименте выполняются также критерии $A-, E-, G-$оптимальности.

Для дробных факторных экспериментов используются многофакторные регулярные планы и планы на основе ЛП_τ равномерно распределенных последовательностей [1, с. 293–312]. Если эффекты, вводимые в модель, коррелированы, то коэффициенты парной корреляции $|r_{ij}(x_{iu}^{(p)}, x_{ju}^{(q)})| < 0{,}3$.

Устойчивость в регрессионном анализе включает устойчивость плана эксперимента, устойчивость структуры многофакторной статистической модели, устойчивость коэффициентов модели.

Под устойчивым (робастным) планом эксперимента понимается план полного или дробного факторного эксперимента, позволяющий выбрать неизвестные исследователю структуры «истинных» статистических моделей $\hat{y}_w$ полиномиального вида, линейных по параметрам, и получить адекватные модели (w – текущий номер определяемой модели, $1 \le w \le m$, m – общее число определяемых моделей по устойчивому плану эксперимента). План эксперимента не изменяется для получаемых различных структур моделей. Устойчивыми планами экспериментов являются полные факторные эксперименты, многофакторные регулярные планы экспериментов и планы на основе $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей.

Устойчивая структура многофакторной статистической модели – структура, которая характеризуется неизменностью множества главных эффектов и взаимодействий многофакторной статистической модели полиномиального вида при изменении значений результатов экспериментов (откликов), порождаемых случайными ошибками (погрешностями) результатов наблюдений, измерений, вычислений и неопределенностью искомой структуры модели. Структурные элементы моделей выбираются из множества структурных элементов модели полного факторного эксперимента с ортогональными или слабокоррелированными (коэффициент парной корреляции $|r_{ij}| < 0{,}3$) эффектами с использованием устойчивого (робастного) плана эксперимента.

Под устойчивостью коэффициентов статистической модели будем понимать минимально возможную изменчивость коэффициентов многофакторной статистической модели полиномиального вида к случайным ошибкам (погрешностям) результатов наблюдений, измерений и вычислений. Для оценки устойчивости коэффициентов используется число обусловленности $\mathrm{cond}(X^{т}X)$. Устойчивость наилучшая, если $\mathrm{cond}(X^{т}X)=1$, хорошая, если $1<\mathrm{cond}(X^{т}X)\le 10$, удовлетворительная, если $10<\mathrm{cond}(X^{т}X)\le 100$, неудовлетворительная, если $\mathrm{cond}(X^{т}X)>100$. Коэффициенты будут максимально устойчивыми, если их эффекты ортогональны друг к другу (или близки к ортогональным) и нормированы.

Определяемые коэффициенты статистических моделей должны быть устойчивы к малым случайным изменениям в исходных данных, полученным в процессе экспериментов. Предложено для количественного показателя устойчивости коэффициентов математической модели использовать 2 меры обусловленности: по Нейману-Голдстейну и число обусловленности матрицы $(X^{т}X)$.

Для определения меры обусловленности по Нейману-Голдстейну P необходимо найти собственные числа для матрицы Фишера $(X^{т}X)$, решая уравнение

$$|(X^{т}X)\text{-}\lambda E| = 0,$$

где X – расширенная матрица эффектов уравнения регрессии, имеющая N строк и k' столбцов, то есть эффектов;

λ – собственные числа информационной матрицы Фишера $X^{т}X$;

E – единичная матрица;

$|\cdot|$ – условное обозначение детерминанта.

Среди собственных чисел λ находят $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное собственные числа для информационной матрицы Фишера $X^{т}X$.

Мера обусловленности матрицы по Нейману-Голдстейну:

$$P(X^{т}X) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}.$$

Если все эффекты в матрице $X^{т}X$ ортогональны друг к другу и нормированы, то

$$|(X^{т}X)\text{-}\lambda E| = \begin{vmatrix} N-\lambda & & & \mathbf{0} \\ & N-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & N-\lambda \end{vmatrix} = (N-\lambda)^{k'} = 0 \cdot$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{k'} = N. \quad \lambda_{\max} = \lambda_{\min} = N.$$

$$P(X^{т}X) = N / N = 1.$$

Другая мера обусловленности матрицы $X^{т}X$ обозначается cond.

$$\mathrm{cond}(X^{т}X) = \left\| X^{т}X \right\| \times \left\| (X^{т}X)^{-1} \right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – обозначение нормы матрицы.

Предполагается, что матрица $X^{т}X$ не вырождена.

Если все эффекты в расширенной матрице X ортогональны друг к другу и нормированы, то число обусловленности $X^{т}X$ $\mathrm{cond}(X^{т}X) = N \times 1 / N = 1$.

Для слабо коррелированных столбцов матрицы $X^{т}X$ cond превышает единицу и из опыта решения многочисленных задач по изложенной методологии обычно не превышает 10.

При нормировании эффектов сумма их квадратов по столбцу должна быть равна числу опытов N. Нормирование осуществляется с использованием нормировочного коэффициента $k_i^{(p)}$:

$$\sum_{u=1}^{N} \left[k_i^{(p)} x_{iu}^{(p)} \right]^2 = N,$$

$$k_i^{(p)} = \sqrt{N \Big/ \sum_{u=1}^{N} \left[x_{iu}^{(p)} \right]^2}.$$

Практика решения реальных прикладных задач с использованием изложенных методов показала, что они эффективны и позволяют успешно получать модели с хорошими характеристиками [1, с. 256–290].

Системный анализ методологии регрессионного анализа показывает, что, помимо формализованных решений, необходимо использовать и эвристические [14].

5. Выводы и полученные результаты

1. Получение многофакторных статистических моделей в условиях неопределенности исходных данных требует использования планов экспериментов и структур моделей для определенного их множества в виде полного факторного эксперимента, среди которых присутствует искомая модель.
2. Используемые планы экспериментов, структура статистической модели и эффекты, входящие в структуру, должны быть ортогональными или близкими к ортогональным.
3. При выборе конкретного плана эксперимента, помимо требований теории планирования эксперимента, необходимо учитывать прикладные условия проведения эксперимента, важнейшим из которых является допустимое число опытов и возможности реализации всего экспериментального исследования по теоретически предложенной схеме.

С разработанными методами решения задач и полученными результатами можно ознакомиться в [15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радченко С.Г. Методология регрессионного анализа / Радченко С.Г. – К.: «Корнійчук», 2011. – 376 с.
2. Айвазян С.А. Прикладная статистика: исследования зависимостей: справ. изд. / Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.; под. ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
3. Тихонов А.Н. Выступление на годичном общем собрании Академии наук СССР / А.Н. Тихонов // Вестник Академии наук СССР. – 1989. – № 2. – С. 94 – 95.
4. Тихомиров Н.П. Эконометрика: учебник / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – [2-е изд., стерео-тип.]. – М.: Изд-во «Экзамен», 2007. – 512 с.
5. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Металлургия, 1981. – 152 с.
6. Налимов В.В. Планирование эксперимента. Найдут ли новые проблемы новые решения? / В.В. Налимов // Журнал Всесоюзного химического общества им. Д.И. Менделеева. – 1980. – Т. 25, № 1. – С. 3 – 4.
7. Тюрин Ю.Н. Статистический анализ данных на компьютере / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров; под ред. В.Э. Фигурнова. – М.: ИНФРА–М, 1998. – 528 с.
8. Жуковский Е.Л. Статистическая регуляризация решений обратных некорректно поставленных задач обработки и интерпретации результатов эксперимента / Е.Л. Жуковский // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения: сборник / Под ред. А.Н. Тихонова, А.А. Самарского. – М., 1986. – С. 47 – 72.
9. Грін В.Г. Економетричний аналіз / Грін В.Г.; пер. з англ. А. Олійник, Р. Ткачук; наук. ред. пер. О. Комашко; передм. О.І. Черняка, О.В. Комашка. – К.: Вид-во С. Павличко «Основи», 2005. – 1197 с.
10. Дрейпер Н.Р. Прикладной регрессионный анализ / Н.Р. Дрейпер, Г. Смит; пер. с англ. – [3-е изд.]. – М. – Санкт-Петербург – Киев: Диалектика, издат. дом «Вильямс», 2007. – 912 с.
11. Montgomery D.C. Design and Analysis of Experimtnts / D.C. Montgomery. – [6-th Edition]. – Dohn Wiley, New York, 2005. – 643 p.
12. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента / Бродский В.З. – М.: Наука, 1976. – 224 с.
13. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер; пер. с англ. В.П. Носко; под. ред. М.Б. Малютова. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
14. Радченко С.Г. Формализованные и эвристические решения в регрессионном анализе / Радченко С.Г. – К.: «Корнійчук», 2015. – 236 с.
15. [Электронный ресурс]: лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ). – Режим доступа: http://www.n-t.org/sp/lesmi.
16. [Электронный ресурс]: сайт кафедры «Технология машиностроения» механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». – Режим доступа: http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publicati.

Стаття надійшла до редакції 13.11.2015