УДК 519.83

С.И. ДОЦЕНКО

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАСХОДОВ В ЗАДАЧЕ РАЗВОЗКИ

Рассмотрена задача распределения расходов при развозке товара нескольким потребителям при условии, когда суммарный спрос потребителей не првышает грузоподъемности транспортного средства. Поиск приемлемого решения производится с использованием аппарата кооперативных игр.

Введение. В данной статье рассмотрена логистическая задача справедливого распределения расходов при доставке грузов нескольким потребителям. На интуитивном уровне понятно, что если суммарный объем заказов не превышает грузоподъемности транспортного средства, то группе потребителей выгодней вскладчину оплатить некоторый кольцевой маршрут, чем каждому в отдельности платить за радиальный. Оказывается, что математическим аппаратом такой задачи распределения расходов может служить кооперативная игра, «надстроенная» над задачей коммивояжера.

Основные сведения о задаче коммивояжера. Задача коммивояжера – одна из ключевых задач комбинаторной оптимизации. Она формулируется следующим образом: в графе найти замкнутый маршрут минимального веса (где под весом маршрута понимается сумма весов входящих в него ребер), в который каждая вершина входит в точности один раз.

Относительно постановки задачи коммивояжера следует сделать некоторые замечания. В произвольном графе (например, в любом дереве) может не существовать замкнутого маршрута, содержащего каждую из вершин в точности один раз. Даже если такой маршрут существует, то может существовать маршрут меньшего веса, проходящий через все вершины, по крайней мере один раз, а через некоторые вершины – более одного раза. Однако в полном графе при условии соблюдения неравенства треугольника для любой тройки вершин существует замкнутый маршрут с посещением каждой вершины ровно один раз, для которого не существует другого замкнутого маршрута с посещением каждой вершины по крайней мере один раз и имеющего меньший вес.

Основные сведения о кооперативных играх. Кооперативная игра задается парой $\langle N,V \rangle$, где N – конечное множество игроков, n – их количество, V – отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, называемое характеристической функцией (которая ставит в соответствие каждой коалиции совместный заработок ее членов), и при этом $V(\varphi)=0$ (что по сути означает, что пустая коалиция никогда ничего не зарабатывает). Множество всех кооперативных игроков на множестве игроков N обозначается G^N.

Кооперативная игра называется супераддитивной, если

$$\left(\forall S,T \in 2^N, S\cap T=\varphi\right)\left(V(S)+V(T)\le V(S\cup T)\right).$$

Кооперативная игра называется выпуклой, если

$$\left(\forall S,T \in 2^N\right)\left(V(S)+V(T)\le V(S\cup T)+V(S\cap T)\right).$$

Решением кооперативной игры $\vec{x}=(x_1,...,x_n)$ называется отображение $f:G^N \to R^n$, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре n-мерный вектор, i-я компонента которого равна платежу i-му игроку в данной игре. Решение игры называется эффективным, если $X(N)=V(N)$, где $X(S)=\sum_{i\in S} x_i$. Эффективность решения означает, что заработок гранд-коалиции распределяется между ее членами без потерь.

Ядром игры называется множество эффективных и стабильных решений $\vec{x}$, таких, что любая коалиция S, отделившись от гранд-коалиции, не сможет обеспечить суммарный заработок ее членов больший, чем $X(S)$.

$$C(V):=\left\{\vec{x}\in R^n \mid X(N)=V(N), X(S)\ge V(S), \forall S\in 2^N\right\}.$$

Рассмотрим некоторую перестановку игроков $\pi=(i_1,...,i_n)$. Пусть $\pi(i)$ – номер позиции i-го игрока в перестановке π, $\pi^i=\left\{j\in N \mid \pi(j)\le\pi(i)\right\}$ – множество игроков, включающее i и всех, кто стоит перед ним в перестановке π. Назовем маргинальным вкладом игрока i в перестановку π величину $m_i^\pi = V\left(\pi^i\right)-V\left(\pi^i \setminus \{i\}\right)$. Очевидно, что для любой перестановки сумма маргинальных вкладов всех игроков равна $V(N)$.

Вектором Шепли (В.Ш.) называется решение кооперативной игры, представляющее собой вектор маргинальных вкладов игроков, усредненных по всем возможным $n!$ перестановкам. Компоненты В.Ш. также могут быть вычислены по формуле

$$\varphi_i(V) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|)!}{n!}\big(V(S \cup \{i\}) - V(S)\big).$$

Оказывается, что для выпуклой игры ядро всегда непусто, а В.Ш. является «центром масс» ядра и, следовательно, принадлежит ему. Для невыпуклой игры ядро может оказаться пустым, а В.Ш. может не принадлежать ядру, даже если ядро не пусто. В этом случае более приемлемыми решениями оказываются n-ядро (nucleolus) и nucleolus per capita (в литературе русского перевода не имеет и буквально означает «n-ядро на душу населения»).

Понятие n-ядра было впервые введено в [1]. Это точечное решение кооперативной игры, которое базируется на понятиях эксцесса и лексикографического порядка.

Определение. Эксцесс коалиции – это значение

$$e(x,S) = V(S) - \sum_{i \in S} x_i,\ \vec{x} \in D(V), S \in 2^N,$$

где $D(V)$ множество решений игры $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющих условиям эффективности и индивидуальной рациональности, т. е. $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$ и $x_i \geq V(i),\ i = \overline{1,n}$ соответственно.

Другими словами, эксцесс является мерой сожаления того, что суммарный заработок коалиции не такой большой, как хотелось бы. Если суммарный заработок членов коалиции *S* больше, чем *V(S)*, то эксцесс будет отрицательным.

Определение. Вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, ..., n\}$, такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение. n-ядро (nucleolus) кооперативной игры – это эффективное решение. $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, для которого достигается лексикографический минимум эксцессов на множестве всех непустых коалиций $S \in 2^N \setminus \varphi$, выписанных в убывающем порядке.

Оказывается, что для любой кооперативной игры существует эксцесс. Кроме того, если ядро игры не пусто, то эксцесс всегда принадлежит ядру.

Понятие нормированного ядра (normalized nucleolus) было введено в [2]. Оно аналогично понятию *n*-ядра с той разницей, что понятие «эксцесс» заменяется на «эксцесс на душу населения» (epc), при этом вычисленное значение эксцесса коалиции делится на количество членов коалиции. Вычисленный таким образом лексикографический минимум для нормализованного ядра также носит название «nucleolus per capita» (см. например [3], с. 129).

$$epc(x,S)=\frac{V(S)-\sum_{i\in S}x_i}{|S|},\ \vec{x}\in D(V),S\in 2^N.$$

В работе [4] было показано, что для задачи коммивояжера при условиях соблюдения неравенств треугольника и равенства расстояний в противоположных направлениях, т. е. $(\forall i,j)(d_{i,j}=d_{j,i})$ ядро всегда непусто для трех и четырех игроков соответственно.

В качестве примера рассмотрим задачу развозки с отправной точкой в Киеве с посещением четырех центров областей, граничащих с Киевской – Винницы, Житомира, Чернигова и Черкасс.

В качестве исходных данных задачи возьмем расстояния между городами по автомагистралям, вычисленные с помощью онлайн-калькулятора расстояний на сайте avtodispetcher.ru. (табл. 1).

ТАБЛИЦА 1

	К	Чн	Ж	В	Чк
Киев	–	142	140	267	194
Чернигов	142	–	282	408	301
Житомир	140	282	–	127	330
Винница	267	408	127	–	354
Черкассы	194	301	330	354	–

Заметим, что для данных расстояний между городами для любой тройки городов выполняется неравенство треугольника.

Для задачи развозки по кольцевому маршруту построим эквивалентную кооперативную игру, в которой игроками являются все города, кроме отправного пункта (в данном случае Киева), а в качестве характеристической функции (коалиции городов) берется кратчайший кольцевой маршрут, выходящий из отправного пункта и проходящий через все города данной коалиции.

Найдем значение характеристической функции для всех возможных коалиций.

Значение функции для одноэлементных коалиций равно удвоенному расстоянию от Киева до данного города и тогда

$$V(Чн) = 284,\ V(Ж) = 280,\ V(В) = 534,\ V(Чк) = 388. \qquad (1)$$

Значение функции для двухэлементных коалиций равно сумме трех слагаемых – расстояний от Киева до этих городов и расстояния между ними, тогда

$$V(Чн, Ж) = 284,\ V(Чн, В) = 817,\ V(Чн, Чк) = 637,\ V(Ж, В) = 534,$$

$$V(Ж, Чк) = 664,\ V(В, Чк) = 815.$$

Значение функции для коалиций из трех и четырех элементов вычисляем, как оптимальное решение задачи коммивояжера по маршруту, включающему Киев и данные города. При этом можно воспользоваться онлайн-сервисом на сайте math.semestr.ru.

Данный сервис позволяет решать задачу коммивояжера для количества городов, не превышающего 14, методом ветвей и границ, при этом генерируется подробный протокол пошагового решения. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

Коалиция	Маршрут	Длина
(*Чн*, *Ж*, *В*)	*К – Чн – В – Ж – К*	817
(*Чн*, *Ж*, *Чк*)	*К – Чн – Чк – Ж – К*	913
(*Чн*, *В*, *Чк*)	*К – Чн – Чк – В – К*	1064
(*Ж*,*В*,*Чк*)	*К – Ж – В – Чк – К*	815
(*Чн*, *Ж*, *В*, *Чк*)	*К – Чн – Чк – В – Ж – К*	1064

Рассмотрим приведенную характеристическую функцию $W(S)$, которая для каждой коалиции выражает «суммарную экономию длины маршрута» и равна сумме длин радиальных маршрутов минус длина кратчайшего кольцевого маршрута, т. е

$$W(S) = \sum_{i \in S} V(i) - V(S).$$

Например, для гранд-коалиции данная величина составляет

$$W(Чн, Ж, В, Чк) = V(Чн) + V(Чк) + V(В) + V(Ж) - V(Чн, Ж, В, Чк) = 422.$$

Для удобства вычислений заменим названия городов номерами, например в порядке, соответствующему кратчайшему кольцевому маршруту, включающему все города, т. е. 1 – Чернигов, 2 – Черкассы, 3 – Винница, 4 – Житомир, тогда значение характеристической функции имеет вид:

$$W(1) = W(2) = W(3) = W(4) = 0,\ W(1, 2) = 35,\ W(1, 3) = 1,\ W(1, 4) = 0,$$

$$W(2, 3) = 107,\ W(2, 4) = 4,$$

$$W(3, 4) = 280,\ W(1, 2, 3) = 387,\ W(1, 2, 4) = 39,\ W(1, 3, 4) =281,$$

$$W(2, 3, 4) = 387,\ W(1, 2, 3, 4) = 422.$$

Заметим, что для данной характеристической функции нарушается условие снежного кома, а, следовательно, условие выпуклости. Действительно,

$$Add(1, (2, 3)) = W(1, 2, 3) - W(2, 3) = 280;$$
$$Add(1, (2, 3, 4)) = W(1, 2, 3, 4) - W(2, 3, 4) = 35.$$

В этом случае В.Ш. может и не принадлежать ядру.

Для случая четырех игроков 1-я компонента В.Ш. может быть вычислена по формуле

$$Sh(1) = \frac{1}{4}W(1) - \frac{1}{12}\big(W(2) + W(3) + W(4)\big) +$$
$$+\frac{1}{12}\big(W(1,2) + W(1,3) + W(1,4) - W(2,3) - W(2,4) - W(3,4)\big) + \frac{1}{4}W(1,2,3,4).$$

Поскольку характеристическая функция является приведенной и значения функции от одноэлементных коалиций равны нулю, то формула упрощается:

$$Sh(1) = \frac{1}{12}\big(W(1,2) + W(1,3) + W(1,4) - W(2,3) - W(2,4) - W(3,4)\big) + \frac{1}{4}W(1,2,3,4).$$

Остальные компоненты В.Ш. могут быть вычислены по формулам, получаемых из данной циклической перестановкой аргументов. Таким образом

$$\vec{Sh} = (75.92,\ 94.25,\ 134.58,\ 117.25).$$

Заметим, что в данном случае В.Ш. не принадлежит ядру. Действительно, для коалиции {3, 4} имеет место нарушение условия стабильности:

$$(W(3,4) = 280) < (Sh(3) + Sh(4) = 251.83).$$

В данном случае распределение экономии согласно В.Ш. представляется неприемлемым. В качестве альтернативного варианта распределения можно выбрать *n*-ядро либо *npc*-ядро (nucleolus per capita).

Найдем *n*-ядро данной игры. Для этого нужно будет решить цепочку задач линейного программирования (ЗЛП). Первая ЗЛП цепочки сводится к максимизации минимальной из переплат по набору коалиций $D = 2^N \setminus (\varphi \cup N)$ (т. е., всем возможным коалициям, за исключением пустой коалиции и гранд-коалиции). Пусть *t*-искомая величина минимальной переплаты, тогда ЗЛП приобретает вид:

$$t \to \max$$
$$\sum_{i=1}^{n} \chi\left(i \in S\right) x_i - t \ge W(S), S \in D; \sum_{i=1}^{n} x_i = W(N);\ x_i \ge 0, i = 1; n\ ; t \ge 0.$$

Для данной характеристической функции первая ЗЛП имеет вид:

$$t \to \max,$$
$$x_1 - t \ge 0,\ x_2 - t \ge 0,\ x_3 - t \ge 0,\ x_4 - t \ge 0,$$
$$x_1 + x_2 - t \ge 35,\ x_1 + x_3 - t \ge 1,\ x_1 + x_4 - t \ge 0,$$
$$x_2 + x_3 - t \ge 107,\ x_2 + x_4 - t \ge 4,\ x_3 + x_4 - t \ge 280,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - t \ge 142,\ x_1 + x_2 + x_4 - t \ge 39,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 - t \ge 281,\ x_2 + x_3 + x_4 - t \ge 387,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 422, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, t \ge 0.$$

Решение данной ЗЛП имеет вид: $\vec{x} = \left(47\frac{1}{3}; 47\frac{1}{3}; 280; 47\frac{1}{3}\right), t = 47\frac{1}{3}$.

При подстановке решения в систему неравеств в равенства обращаются ограничения, соответствующие коалициям $\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 4\}$. Заметим, что коалиции $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3, 4\}$ образуют полную группу непересекающихся множеств, поэтому замораживаем значения $x_1 = 47\frac{1}{3}$, $x_2 = 47\frac{1}{3}$ и исключаем из системы неравенства, соответствующие коалициям $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ и переходим ко второму этапу.

Решение ЗЛП второго этапа имеет вид:

$$\vec{x} = \left(47\frac{1}{3}; 47\frac{1}{3}; 193\frac{1}{2}; 133\frac{5}{6}\right), t = 133\frac{5}{6}.$$

При подстановке решения в систему неравеств, в равенства обращаются ограничения, соответствующие коалициям $\{4\}, \{2, 3\}$. Поскольку x_1 было заморожено на предыдущей итерации, то данный набор множеств образует полную группу непересекающихся множеств на $N \setminus \{1\}$, поэтому замораживаем $x_4 = 133\frac{5}{6}$, а поскольку значение x_2 было заморожено на предыдущей итерации, то выходит, что x_3 тоже фиксировано. Таким образом, все переменные определены и вектор $\vec{x}$ на последней итерации является *n*-ядром.

$$Nucl = \left(47\frac{1}{3}; 47\frac{1}{3}; 193\frac{1}{2}; 133\frac{5}{6}\right).$$

Вычитая из длин радиальных маршрутов (см. (1)) компоненты n-ядра, получаем компоненты вектора затрат.

$$Costs = (236.67; 340.67; 340.5; 146.16).$$

Найдем нормированное ядро данной игры. Для этого нужно будет решить цепочку ЗЛП. Первая ЗЛП цепочки сводится к максимизации минимальной из переплат по набору коалиций $D = 2^N \setminus (\varphi \cup N)$ (т. е., всем возможным коалициям, за исключением пустой коалиции и гранд-коалиции). Задача отличается от предыдущей тем, что переплата вычисляется в пересчете на одного игрока, и, таким образом, величина переплаты по каждой коалиции делится на количество членов в коалиции.

Пусть *t*-искомая величина минимальной переплаты, тогда ЗЛП приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi\left(i\in S\right)x_i - W(S)}{|S|}\ge t, S\in D; \sum_{i=1}^{n}x_i = W(N); x_i\ge 0, i=1;n; t\ge 0.$$

Для данной характеристической функции первая ЗЛП имеет вид:

$$t\to\max,$$

$$x_1\ge t,\ x_2\ge t,\ x_3\ge t,\ x_4\ge t,$$

$$\frac{x_1+x_2-35}{2}\ge t,\ \frac{x_1+x_3-1}{2}\ge t,\ \frac{x_1+x_4}{2}\ge t,$$

$$\frac{x_2+x_3-107}{2}\ge t,\ \frac{x_2+x_4-4}{2}\ge t,\ \frac{x_3+x_4-280}{2}\ge t,$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3-142}{3}\ge t,\ \frac{x_1+x_2+x_4-39}{3}\ge t,$$

$$\frac{x_1+x_3+x_4-281}{3}\ge t,\ \frac{x_2+x_3+x_4-387}{3}\ge t,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=422,\quad x_1,x_2,x_3,x_4,t\ge 0.$$

Решение данной ЗЛП имеет вид: $\vec{x}=(8.75;64.25;340.25;8.75), t=8.75$.

При подстановке решения в систему неравеств в равенства обращаются ограничения, соответствующие коалициям $\{1\},\{2,3,4\},\{4\},\{1,4\}$. Заметим, что коалиции $\{1\}$, и $\{2, 3, 4\}$ образуют полную группу непересекающихся множеств, поэтому замораживаем значение $x_1=8.75$, исключаем из системы неравенства, соответствующие коалициям $\{1\},\{2,3,4\}$ и переходим ко второму этапу. Решение ЗЛП имеет вид:

$$\vec{x}=(8.75;72.15;170.55;170.55), t=22.95.$$

При подстановке решения в систему неравенств, в равенства обращаются ограничения, соответствующие коалициям $\{1,2\},\{1,3,4\}$. Поскольку x_1 было заморожено на предыдущей итерации, то данный набор множеств образует полную группу непересекающихся множеств на $N\setminus\{1\}$, поэтому замораживаем $x_2=72.15$ и исключаем из системы неравенства, соответствующие коалициям $\{2\},\{1,2\}\{3,4\},\{1,3,4\}$ и переходим к третьему этапу. Решение ЗЛП имеет вид:

$$\vec{x}=(8.75;72.15;222.5;119.5), t=53.65.$$

При подстановке решения в систему неравенств, в равенства обращаются ограничения, соответствующие коалициям $\{1,2,3\},\{1,2,4\}$. Поскольку x_1, x_2 уже зафиксированы на предыдущих итерациях, данная пара образует полную группу, значит, приходится завиксировать x_3, x_4. Конец алгоритма. При этом соответствующий вектор затрат равен

$$Costs = (275.25; 315.75; 311.5; 160.5).$$

С.І. Доценко

РОЗПОДІЛ ВИТРАТ У ЗАДАЧІ РОЗВОЗКИ

Розглянуто задачу розподілу витрат при розвезенні товару декільком споживачам за умови, що сумарний попит споживачів не перевищує вантажопідйомності транспортного засобу. Пошук прийнятного рішення здійснюється з використанням апарата кооперативних ігор.

S.I. Dotsenko

ON EXPENSES DISTRIBUTION IN CONVEYING PROBLEM

The expenses distributions in conveying problem is considered at the conditions, that the total customers demand doesn't exceed vehicle bearing capacity. The acceptable decision is found with the help of cooperative game theory technique.

1. *Schmeidler D.* The nucleolus of a charecteristic function game // SIAM J on Applied Mathematics, 17. – P. 1163 – 1170.
2. *Grotte J.H.* Computation of and observation on the nucleolus and central games // M.Sc. Thesis, Dept. of Operations Research, Cornell university.
3. *Moulin H.* Axioms of cooperative decision making // Cambridge university press, 1988.
4. *Curiel I.* Cooperative game theory and applications // Springer US, 1997.

Получено 18.04.2016