УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНТЕГРАНТОВ

Установлены минимальные условия регулярности интегрантов для существования интегральных функционалов. Показана возможность регуляризации интегрантов при сохранении экстремального значения интегральных функционалов.

Введение. Для любого замкнутого множества Ω евклидового пространства R^k обозначим L – множество всех его измеримых по Лебегу подмножеств [1, 2]. Пусть μ – мера Лебега на измеримом пространстве (Ω, L), а $f(\omega, x)$ – функция на $\Omega \times \mathrm{R}^l$ со значениями в расширенной вещественной прямой. Следуя [2], всякую такую функцию будем называть интегрантом. При довольно слабых предположениях регулярности интегрантов, описанных далее, интеграл

$$I_f(x(\cdot)) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega))\mu(d\omega) \qquad (1)$$

оказывается корректно определенным для каждой суммируемой функции $x: \Omega \to \mathrm{R}^l$ и, таким образом, является функционалом на банаховом пространстве $L^1(\Omega, \mathrm{R}^l)$ со значениями в расширенной вещественной прямой. Такие функционалы возникают во многих проблемах теории управления и в теории динамических игр [3, 4]. При этом часто бывает желательно минимизировать выражение вида I_f (1) на подмножестве $L^1(\Omega, \mathrm{R}^l)$, определяемом некоторыми ограничениями (геометрические, интегральные, смешанные). Другие ограничения можно выразить с помощью самого I_f, приписывая интегранту $f(\omega, \nu)$ значение $+\infty$ в определенных точках $\Omega \times \mathrm{R}^l$. Интеграл (1) не имеет смысла, если не сделать дополнительных предположений.

Следующие условия, которые всюду далее предполагаются выполненными, оказываются вполне естественными.

Пусть $\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^n\right)$ – σ-алгебра борелевских множеств пространства R^l.

Обозначим $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$ σ-алгебру, порожденную произведением множеств $L\times B,$ где $L\in\mathcal{L},$ $B\in\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-измеримыми (более точно $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримыми).

Вектор-функцию $f(\omega,x),$ $f:\Omega\times\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^m,$ будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримой, если для любого борелевского множества $B\in\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^m\right)$ его обратный образ $f^{-1}(B)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ f(\omega,x)\in B\right\}$ будет $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримым.

Условия регулярности. Интегрант $f(\omega,x)$ является $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримой функцией и полунепрерывной сверху как функция $x\in R^1$ для каждого $\omega\in\Omega.$

Многозначное отображение $F(\omega,x),F:\Omega\times\mathrm{R}^l\to 2^{\mathrm{R}^m},$ будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримым, если для любого открытого множества $A\subset\mathrm{R}^m$ его обратный образ $F^{-1}(A)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ F(\omega,x)\bigcap A\neq\varnothing\right\}$ будет $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измеримым.

Каждому многозначному отображению $F(\omega,x),F:\Omega\times\mathrm{R}^l\to 2^{\mathrm{R}^m},$ можно сопоставить его график $\mathrm{gr}\,F=\left\{\left(\omega,x,z\right)\in\Omega\times\mathrm{R}^l\times\mathrm{R}^m: z\in F\left(\omega,x\right)\right\}.$

Обозначим $\mathrm{epi}\,f\left(\omega,x\right)=\{(\omega,\alpha)\in\Omega\times R^1:\ f\left(\omega,x\right)\le\alpha\}$ надграфик функции $f\left(\omega,x\right)$ [3]. Функция $\overline{\mathrm{co}}f\left(\omega,x\right)$ называется замыканием овыпуклетия функции $f\left(\omega,x\right),$ если $\mathrm{epi}\,\overline{\mathrm{co}}f\left(\omega,x\right)=\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{epi}\,f\left(\omega,x\right)$ [3]. При этом справедливо неравенство $f\left(\omega,x\right)\ge\overline{\mathrm{co}}f\left(\omega,x\right)$ при всех $\omega\in\Omega,$ $x\in R^1.$

Теорема 1. Пусть многозначное отображение $F\left(\omega\right),$ $F:\ \Omega\to 2^{\mathrm{R}^l},$ имеет замкнутые значения и $\mathcal{L}$-измеримо, а функция $f(\omega,x),$ $f:\Omega\times\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^1,$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измерима и при каждом $\omega\in\Omega$ полунепрерывна сверху по $\mathrm{x}\in\mathrm{R}^l.$

Тогда маргинальная функция $h(\omega)=\inf\limits_{x\in F(\omega)}f(\omega,x),h:\Omega\to\mathrm{R}^1\bigcup\{-\infty\},$ $\mathcal{L}$-измерима, и справедливо равенство

$$\delta = \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega), \tag{2}$$

где $F(\Omega)$ – множество всех $\mathcal{L}$-измеримых селекторов отображения $F(\omega)$, $\omega \in \Omega$ и $\delta = \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_{\Omega} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega)$.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\omega \in \Omega$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\tau) = \{x \in R^l : f(\omega, x) < \varepsilon\}$, $G_\varepsilon : \Omega \to 2^{\mathrm{R}^l}$, которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $x \in R^l$ функции $f(\omega, x)$ при любом $\omega \in \Omega$.

Нетрудно показать, что при всех $\varepsilon \in R^1$ $h(\omega) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $G_\varepsilon(\tau) \bigcap F(\omega) \neq \varnothing$, $\omega \in \Omega$. Действительно, пусть $h(\omega) < \varepsilon$ и $\delta > 0$ выбрано так, что $h(\omega) + \delta < \varepsilon$. Тогда по свойству инфинума существует такое $x_\delta \in F(\omega)$, что $f(\omega, x_\delta) \leq h(\omega) + \delta < \varepsilon$ и поэтому $G_\varepsilon(\omega) \bigcap F(\omega) \neq \varnothing$, $\omega \in \Omega$. Обратно, если $z \in F(\omega)$ и $f(\omega, z) < \varepsilon$, $\omega \in \Omega$,, то имеем $h(\omega) = {}$ $= \inf_{x\in F(\omega)} f(\omega, x) \leq f(\omega, z) < \varepsilon$.

Пусть $\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}$ счетное плотное семейство $\mathcal{L}$-измеримых селекторов многозначного отображения $F(\omega)$ и при этом $F(\omega) = \overline{\bigcup_{i>1} q_i(\omega)}$ для каждого $\omega \in \Omega$. Здесь черта над выражением означает замыкание [2, 3]. Тогда для любого $\varepsilon \in R^1$ имеем

$$\{\omega \in \Omega : h(\omega) < \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega : G_\varepsilon(\omega) \bigcap F(\omega) \neq \varnothing\} =$$
$$= \left\{\omega \in \Omega : G_\varepsilon(\omega) \bigcap [\overline{\textstyle\bigcup_{i>1} q_i(\omega)}] \neq \varnothing\right\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega :\ f(\omega, z) < \varepsilon \text{ для некоторого } z \in \overline{\textstyle\bigcup_{i>1} q_i(\omega)}\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega :\ f(\omega, q(\omega)) < \varepsilon \text{ для некоторого } q(\cdot) \in \{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}\} =$$
$$= \bigcup_{q(\cdot)\in\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}} \{\omega \in \Omega :\ f(\omega, q(\tau)) < \varepsilon\}.$$

Но множество $\{\omega \in \Omega :\ f(\omega, q(\omega)) < \varepsilon\}$ $\mathcal{L}$-измеримо, поскольку по условию функция $f(\omega, x)$ является $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримой и, следовательно, суперпозиционно измеримой. Поэтому функция $h(\omega) = \inf_{x\in F(\omega)} f(\omega, x)$ – $\mathcal{L}$-измеримая функция.

Покажем справедливость соотношения (2). Ясно, что имеет место неравенство

$$\delta \geq \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega). \tag{3}$$

Пусть в соотношении (3) имеет место строгое неравенство. Тогда существует суммируемая функция $\delta_0(\omega)$, такая, что

$$\delta > \int_{\Omega} \delta_0(\omega)\mu(d\omega) \tag{4}$$

и для некоторой $\mathcal{L}$-измеримой функции $x_0(\cdot) \in F(\Omega)$, при почти всех $\omega \in \Omega$ имеем

$$\delta_0(\omega) > \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x_0(\omega)\right). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x_0(\omega)\right) \geq \inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x\right) = \inf_{x\in F(\omega)} f\left(\omega, x\right), \quad \omega \in \Omega. \tag{6}$$

Поэтому соотношения (5), (6) при почти всех $\omega \in \Omega$ дают

$$\delta_0(\omega) > \inf_{x\in F(\omega)} f\left(\omega, x\right). \tag{7}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Psi(\omega) = \{x \in F(\omega) : f\left(\omega, x\right) < \delta_0(\omega)\} = F(\omega) \bigcap G_{\delta_0(\omega)}(\omega)\}.$$

Соотношение (7) гарантирует, что $\Psi(\omega) \neq \varnothing$. Для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\omega \in \Omega$ многозначное отображение $G_\varepsilon\left(\omega\right) = \left\{x \in R^l : f\left(\omega, x\right) < \varepsilon\right\}$ имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $x \in R^l$ функции $f\left(\omega, x\right)$ при любом $\omega \in \Omega$. График этого отображения будет $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измерим, поскольку функция $f\left(\omega, x\right)$ $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}\left(\mathrm{R}^l\right)$-измерима [1]. В силу предложения 5 [3, стр. 340] с учетом леммы 1 [1] многозначное отображение $\Psi(\omega)$ измеримо и пусть $\psi_0(\omega)$ произвольный измеримый селектор этого отоборажения. Тогда получаем

$$f\left(\omega, \psi_0(\omega)\right) < \delta_0(\omega), \quad \psi_0(\omega) \in F(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{8}$$

Неравенства (4) и (8) дают

$$\delta > \int_0^t \delta_0(\tau)\,d\tau > \int_0^t \alpha\left(t, \tau, \psi_0(t,\tau)\right)d\tau \geq \delta.$$

Полученное противоречие показывает, что в соотношении (3) имеет место равенство.

Следствие 1. Имеет место равенство

$$\delta = \int\limits_{\Omega} \inf_{x \in F(\omega)} f(\omega, x)\mu(d\omega).$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\text{co}} f(\omega, x)$ – функция Каратеодори, то для нее справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} \inf_{x \in F(\omega)} \overline{\text{co}} f(\omega, x)\mu(d\omega) = \inf_{x(\cdot) \in F(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \overline{\text{co}} f(\omega, x(\omega))\mu(d\omega). \qquad (9)$$

Действительно, по теореме о маргинальном отображении [2] маргинальная функция $\inf\limits_{x \in F(\omega)} \overline{\text{co}} f(\omega, x)$ измерима и соответствующее маргинальное многозначное отображение

$$F_0(\omega) = \{x_0 \in F(\omega) : \overline{\text{co}} f(\omega, x_0) = \inf_{x \in F(\omega)} \overline{\text{co}} f(\omega, x)\}$$

непусто, компактнозначно и измеримо. Пусть $x_0(\cdot)$ – измеримый селектор этого многозначного отображения. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega} \inf_{x \in F(\omega)} \overline{\text{co}} f(\omega, x)\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} \overline{\text{co}} f(\omega, x_0(\omega))\mu(d\omega) \geq \inf_{x(\cdot) \in F(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \overline{\text{co}} f(\omega, x(\omega))\mu(d\omega).$$

В обратную сторону неравенство очевидно, т. е. соотношение (9) справедливо.

Теперь с учетом соотношения $\inf\limits_{x \in F(\omega)} \overline{\text{co}} f(\omega, x) = \inf\limits_{x \in F(\omega)} f(\omega, x)$ равенство (2) дает требуемый результат.

Следствие 2. Пусть интегрант $f(\omega, x)$ $\mathcal{L}$-измерим как функция $\omega \in \Omega$ при всех $x \in \mathrm{R}^l$ и при каждом $\omega \in \Omega$ полунепрерывен сверху по $x \in \mathrm{R}^l$ так, что множество точек разрыва имеет меру нуль. Тогда интегрант $f(\omega, x)$ будет $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-измерим и для него справедливы все утверждения теоремы.

Доказательство. Рассмотрим $\overline{f}(\omega, x)$ – замыкание функции $f(\omega, x)$ [3]. Функция $\overline{f}(\omega, x)$ – функция Каратиодори и поэтому $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима [1]. Тогда функция $f(\omega, x)$ также будет $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима, поскольку отличается от функции $\overline{f}(\omega, x)$ на множестве меры нуль.

Й.С. Раппопорт

ПРО РЕГУЛЯРІЗАЦІЮ ІНТЕГРАНТІВ

Встановлено мінімальні умови регулярності інтегрантів для існування інтегральних функціоналів. Показана можливість регулярізації інтегрантів при збереженні екстремального значення інтегральних функціоналів.

I.S. Rappoport

ON THE REGULARIZATION OF INTEGRANTS

Minimum conditions of reguiar integrants for the existence of integral functionals and the possibility of regularization of integrants while maintaining extreme value of integral functionals is established.

1. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* К теореме об обратном образе для $L \otimes B$-измеримых многозначных отображений // ДАН Украины. – 2011. – № 11. – С. 54 – 58.
2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis // Mathematics and Its Applications. – Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
3. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. *Chikrii A.A.* Conflict controlled processes // Springer Science and Business Media. – 2013. – 424 p.

Получено 23.03.2016