

В.С. Кочергин

*Морской гидрофизический институт НАН Украины, г. Севастополь*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ  
ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ  
НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ**

В данной работе решается задача определения поля концентрации пассивной примеси по функциям влияния. Эти функции вычисляются для каждой точки области интегрирования. Каждая задача решается в параллельном режиме на многопроцессорной системе. При этом для различных начальных данных нет необходимости повторного интегрирования модели.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сопряженная задача, алгоритм, поле концентрации, функция влияния, начальные данные, многопроцессорная система.

**Введение.** При решении задачи переноса пассивной примеси с использованием большого количества различных начальных полей необходимо многократно интегрировать уравнение модели. Представленный в данной работе алгоритм позволяет существенно упростить эту процедуру с использованием подхода [1]. При численной реализации алгоритма решается серия сопряженных задач для каждой точки области интегрирования на заданном интервале времени. Алгоритм позволяет решать эти задачи в параллельном режиме для максимального использования ресурсов многопроцессорной системы.

**Алгоритм.** В качестве модели переноса пассивной примеси для тестовых расчетов рассмотрим следующее одномерное уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} = A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

и начальными данными

$$C(x,0) = C_0(x), \quad (3)$$

где  $C$  – концентрация примеси,  $U$  – заданная скорость,  $A$  – коэффициент турбулентной диффузии, область интегрирования модели  $D = [0, X]$ ,  $D_t = D \times [0, T]$ .

Поставим в соответствие (1) сопряженную задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} = A \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} \\ \Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \\ t = T: C^* = h(x) \end{array} \right. . \quad (4)$$

Умножая (1) – (3) на  $C^*$  и интегрируя по частям с учетом (4) получим

$$\int_D h C dD = \int_D C_0 C^* dD , \quad (5)$$

Выбираем  $h$  в виде

$$h = \begin{cases} \frac{1}{m(\Omega)} - \text{в области } \Omega \\ 0 - \text{вне области } \Omega \end{cases} , \quad (6)$$

где  $m$  – мера некоторой области  $\Omega \in D$ . При этом, в левой части выражения (5) получаем среднюю концентрацию  $\bar{C}_T$  в  $\Omega$  на момент времени  $T$ . В одномерном случае в качестве  $\Omega$  выберем интервал  $[x_i, x_{i+1}]$  и зададим  $h$  в виде

$$h = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} - \text{в интервале } [x_i, x_{i+1}] \\ 0 - \text{вне интервала } [x_i, x_{i+1}] \end{cases} , \quad (7)$$

где  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ .

Тогда среднюю концентрацию в  $[x_i, x_{i+1}]$  можно оценить по формуле

$$\bar{C}_T(x_{i+1/2}) = \int_0^x C_0 C^* dx , \quad (8)$$

где  $C^*$  – решение сопряженной задачи (4), которое фактически является функцией влияния начальных данных. Из (8) видно, что для получения  $\bar{C}_T$  необходимо решить на  $[0, T]$  серию задач (4), (6) для каждой точки области интегрирования. Задавая различные  $C_0$  по формуле (8) получаем соответствующие значения  $\bar{C}_T$ . Начальные данные  $C_0$  могут соответствовать любому моменту времени  $t_0 \in [0, T]$ , при этом процедура восстановления поля

концентрации пассивной примеси  $\bar{C}_T$  реализуется на интервале времени  $[t_0, T]$ . При интегрировании сопряженных задач осуществляется запись  $C^*$  на каждом моменте времени для восстановления  $\bar{C}_T$  по различным начальным данным  $C_{t_0}$ .

Сопряженные задачи в данном алгоритме независимы друг от друга и могут быть реализованы различными исполнителями (процессорами). Это позволяет с использованием современной вычислительной техники осуществлять необходимые вычисления в распараллеленном режиме. Дальнейшая оценка  $\bar{C}_T$  осуществляется без пространственно временного счета с использованием уже насчитанных значений  $C^*$ .

**Численная реализация модели.** При численной реализации модели (1) – (3) использовались TVD<sup>1</sup>-аппроксимации [2, 3]. Поток вещества  $F = UC$  аппроксимируется следующим образом

$$F = F^G + \psi(F^L - F^G), \quad (9)$$

где  $\psi$  – весовой множитель;  $F^L$  – аппроксимация схемой Лакса-Вендроффа, которая при  $U = const$  преобразуется в схему Лейта;  $F^G$  – аппроксимация направленной разностью. Из (9) видно, что при  $\psi = 0$  имеем  $F = F^G$ , а при  $\psi = 1$  получаем  $F = F^L$ .

Величина  $\psi$  выбиралась одним из известных способов

$$\psi = \max(0, \min(1, r)) , \quad (10)$$

$$\psi = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r)) , \quad (11)$$

где аргумент  $r$  имеет вид

$$r_{i+1/2} = \frac{(C_{i+1-n} - C_{i-n})}{(C_{i+1} - C_i)}, \quad n = \begin{cases} 1, & U \geq 0 \\ -1, & U < 0 \end{cases} . \quad (12)$$

Из формулы (10) для весового множителя (схема *Minmod*) видно, что величина  $\psi \in [0, 1]$ , а в случае использования схемы *Superbee* (11) величина  $\psi \in [0, 2]$ . При  $\psi = 2$  имеем  $F = 2F^L - F^G$ . Если значения  $A < \frac{|U|h}{4}$ , то в некоторых точках области интегрирования наблюдается эффект «отрицательной вязкости».

**Результаты численных экспериментов.** Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров  $\Delta x = 5 \cdot 10^5$  см,  $\Delta t = 400$  сек,  $U = 10$  см/сек, значения коэффициента турбулентной диффу-

<sup>1</sup> TVD – Total Variation Diminishing – уменьшение полной вариации.

зии  $A$  задавались в диапазоне  $5 \cdot 10^4 - 2,5 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}$ . Максимальное значение  $A$  соответствует схемной вязкости в схеме направленной разности. Задача решалась на временном интервале 46 суток. Результаты численных экспериментов показали, что  $\bar{C}_T$  практически совпадает с концентрацией  $C$  рассчитанной по модели (см. рис. 1, а). Для оценки точности воспроизведения решения введены следующие нормы

$$NC = \frac{\max_{x \in D} |\bar{C} - C| \times 100}{\max_{x \in D} |C|} ; \quad (12)$$

$$NL = \frac{\sum_{x \in D} |\bar{C} - C| \times 100}{\sum_{x \in D} |C|} . \quad (13)$$

На рис. 1 изображены начальные распределения концентрации, решение модели и восстановленное поле концентрации. Данные расчеты выполнены при  $A = 5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}$ . При помощи рассчитанных функций влияния  $C^*$  для данного интервала времени задается другое начальное поле  $C_0$  (см. рис. 1, б) по формуле (8) вычисляется концентрация на конечный момент времени  $\bar{C}_T$ . Восстановленная концентрация также практически совпадает с рассчитанной по модели.

На рис. 2 представлена пространственная структура решения сопряженных задач ( $C^* \geq 10^{-4}$ ) для отдельно взятых точек. Единообразный вид  $C^*$  определяется заданием постоянных значений скорости и коэффициента турбулентной диффузии.

В таблице приведены значения  $NC$  и  $NL$  для расчетов восстановления  $\bar{C}$  при различных значениях коэффициентов турбулентной диффузии.

Таблица. Значения норм  $NC$  и  $NL$ .

Параметр	$A, \text{ см}^2/\text{с}$		
	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-5}$
$NC$	7,7666	2,4096	1,2317
$NL$	5,8304	2,2934	0,8595

Из таблицы видно, что предложенная процедура оценки поля концентрации дает достаточно хорошую точность восстановления  $\bar{C}$ , что позволяет перейти к решению многомерной задачи для акватории Черного моря.

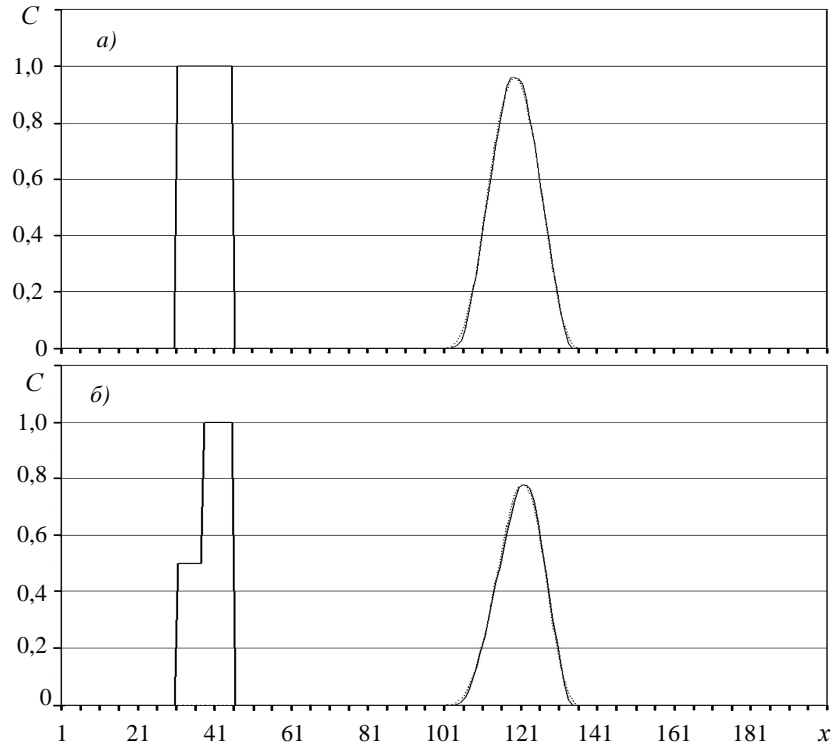


Рис. 1. Начальное поле концентрации (жирная сплошная линия), решение модели (тонкая сплошная) и восстановленное поле концентрации (пунктирная).

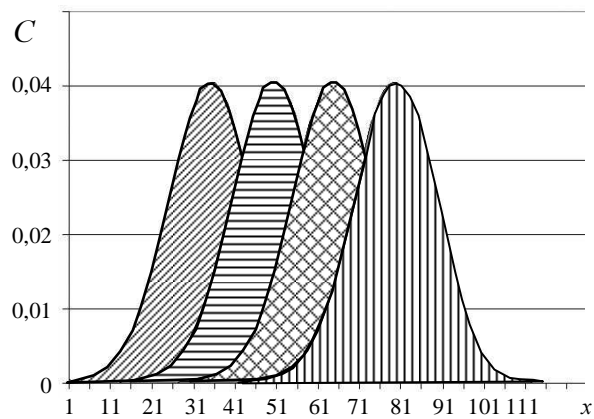


Рис. 2. Решения сопряженных задач.

В качестве входной информации для модели переноса пассивной примеси в Черном море на пятикилометровой сетке [4] были использованы поля скоростей, рассчитанные по модели [5].

Поверхностное распределение поля концентрации на начальный момент времени представлено на рис. 3. В верхнем 30 метровом слое прямо-

угольной области задавались значения условной концентрации, которые выбирались равными единице.

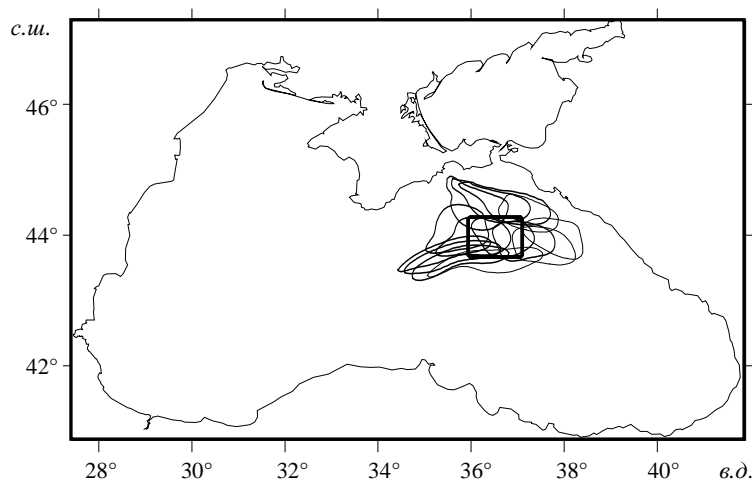


Рис. 3. Начальное поверхностное распределение концентрации и области, в которых значения  $C^* \geq 10^{-4}$ .

Задача решалась на 20 суток модельного времени. Результат моделирования представлен на рис. 4. После решения серии сопряженных задач с соответствующими условиями (6) в начальных данных по формуле (5) оцениваем поле концентрации на конечный момент времени, которое визуально практически совпадает с модельным решением. Значения норм при этом составляют  $NC = 2,2777$ ,  $NL = 2,1564$ . На рис. 4 изображены отдельные точки, для которых соответствующие решения сопряженных задач ( $C^* \geq 10^{-4}$ ) представлены на рис. 3.

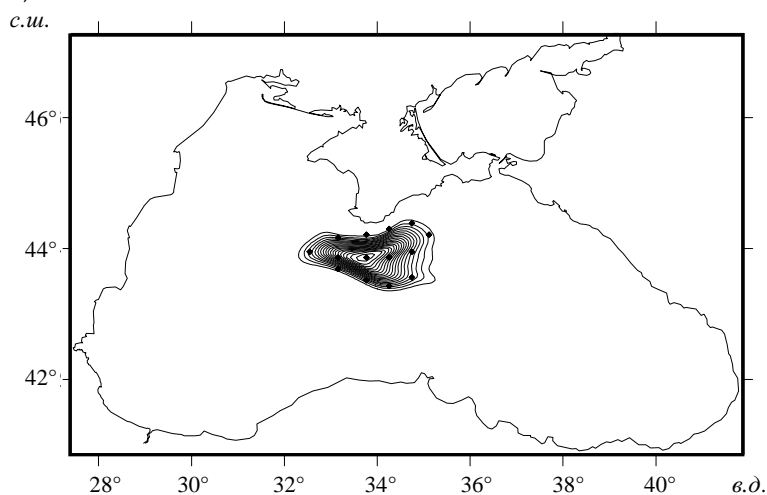


Рис. 4. Поверхностное модельное поле концентрации и отдельные точки на поверхности моря (соответствуют областям на рис. 3).

**Заключение.** Представленные результаты показывают надежную работу алгоритма и дают возможность оперативно осуществлять оценку concentra-

ции на конечный момент времени для различных начальных данных без многократного интегрирования модели переноса пассивной примеси (1) – (3). Изложенный алгоритм будет весьма полезен в случае проведения большого количества расчетов с различными начальными данными, так как оценка концентрации  $\bar{C}_T$  по насчитанным функциям влияния  $C^*$  практически не требует затрат вычислительных ресурсов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М. : Наука, 1982. – 320 с.
2. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* – 1983, – vol. 49. – P. 357-393.
3. *Pietrzak J.* The use of TVD limiters for forward-time upstream-biased advection schemes in ocean modeling // *Mon. Wea. Rev.* – 1998, – vol. 126. – P. 812-830.
4. *Кочергин В.С.*, Использование сопряженных уравнений для решения экологических задач // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.* – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». – 2009. – вып. 18. – С. 93-99.
5. *Демьшиев С.Г., Иванов В.А., Маркова Н.В., Черкесов Л.В.* Построение поля течений в Черном море на основе вихререзающей модели с ассимиляцией климатических полей температуры и солености // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.* – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». – 2007. – вып. 15. – С. 215-226.

Материал поступил в редакцию 17.10.2011 г.

После переработки 10.11.2011 г.

**АНОТАЦІЯ** Розроблено алгоритм визначення поля концентрації пасивної домішки за початковими даними. Процедура заснована на рішенні серії сполучених завдань на заданому інтервалі часу. Отримані функції впливу використовуються для оцінки поля концентрації за початковими даними.

**ABSTRACT** The algorithm for determining the concentration field of passive admixture with use the initial data was done. The procedure is based on solving a series of adjoint problems at a given time interval. The resulting influence functions are used to estimate the concentration field on the initial data.