

## Определение перемещений на поверхности плоских пространственных трещин в неограниченной упругой среде

П. П. Ворошко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Предлагается методика определения коэффициентов интенсивности напряжений плоских пространственных трещин, использующая интегральные тождества для перемещений и деформаций на поверхности трещин. Получены новые формулировки краевых задач математической теории линейной механики разрушения, которые применяются для построения моделей метода конечных элементов. Неизвестными функциями являются узловые перемещения на поверхности трещин. Приведенные данные сравниваются с аналитическими решениями и результатами, полученными другими способами.*

**Ключевые слова:** коэффициенты интенсивности напряжений, пространственные трещины, интегральные представления перемещений.

### Обозначения

$V, S$	– пространственная область трехмерного векторного пространства и ограничивающая ее поверхность
$\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta, \omega$	– внешняя нормаль к $S$ , вектор перемещений, его дивергенция и вихрь соответственно
$\mathbf{T}$	– тензор напряжений
$c_1 = (1-\nu)(1-2\nu)^{-1}, c_2 = 1+(2c_1)^{-1}, c_3 = 1-(2c_1)^{-1}$	
$\nu, E$	– коэффициент Пуассона, модуль упругости
$\mathbf{p} = (1+\nu)E^{-1}\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$	– безразмерный вектор поверхностных напряжений
$y, \mathbf{x}, \mathbf{z}$	– точки трехмерного евклидова пространства
$\psi = \frac{1}{4\pi r}, \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, r =  \mathbf{y} - \mathbf{x} $	– фундаментальное решение уравнения Лапласа
$ \cdot _{S(V)}$	– интегрирование по поверхности $S$ (области $V$ )

**Введение.** Одним из важных аспектов линейной механики разрушения является выбор способа вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $K_I, K_{II}, K_{III}$  в трехмерных телах с трещинами различной конфигурации. С этим чаще всего сталкиваются при решении прикладных задач методом конечных элементов (МКЭ) различными 3D кодами. Известно много методов вычисления КИН, которые используют информацию о напряженно-деформированном состоянии (НДС) окрестности фронта трещины. Выбор метода зависит от расчетной схемы и структуры модели МКЭ объекта исследования. Универсальные рекомендации по использованию информации о НДС в рамках технологии и реализации МКЭ для вычисления КИН отсутствуют. Так, в экспертном исследовании теоретических аспектов опре-

деления параметров механики разрушения средствами пакета ABAQUS [1] и их практического применения указывается, что такие рекомендации вряд ли будут разработаны.

В настоящей работе предлагается метод определения перемещений на поверхности трещин на основе интегральных представлений характеристик НДС через перемещения и напряжения на поверхности трехмерных тел и вычисления КИН по асимптотическим формулам линейной механики разрушения [2]. Использовать перемещения естественно, так как ошибка приближенного решения МКЭ по перемещениям минимальна, и вычисления не требуют дополнительных преобразований (усреднение, аппроксимация производных, введение специальных элементов и т.п.). Исследования точности вычисления КИН по перемещениям при моделировании усталостного роста трещин [3] показывают эффективность применения этого подхода при незначительных затратах на проведение расчетов МКЭ. Исследования разложения нормальных перемещений по данным МКЭ полиномами Чебышева второго рода вдоль линии нормали к фронту трещины [4] подтверждают выводы работы [3].

Основные положения предлагаемого метода приведены ранее [5] и использовались для построения интегральных уравнений перемещений. В настоящей работе эти положения разработаны в русле идей прямых методов сингулярных интегральных уравнений (МСИУ) [6] с целью снижения размерности матриц разрешающих систем линейных алгебраических уравнений, усилий и времени на их формирование, а также затрат на дискретизацию поверхности конечными элементами. В выкладках не учитываются объемные силы уравнений в перемещениях Ламе.

**Интегральные соотношения для перемещений и деформаций.** В работе [5] на основе теоремы взаимности получены интегральные представления перемещений, дивергенции и вихря в виде

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x})\mathbf{u} &= |(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}|_S, & \delta(\mathbf{x})\theta &= -\frac{1}{c_1} |(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \nabla\psi|_S; \\ \delta(\mathbf{x})\omega &= |(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \times \nabla\psi - \omega \cdot \mathbf{n} \nabla\psi|_S, & \delta(\mathbf{x}) &= 1, \quad \mathbf{x} \in V, \\ & & \delta(\mathbf{x}) &= 0,5, \quad \mathbf{x} \in S; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{s} = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \theta\mathbf{n}, \quad \mathbf{p} - \mathbf{s} = c_1\theta\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \omega; \quad (2)$$

$$\mathbf{U} = c_2\psi\mathbf{1} - c_3\nabla\psi \otimes \mathbf{r}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{n} \otimes \nabla\psi - \nabla\psi \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla\psi\mathbf{1}. \quad (3)$$

Представления (1)–(3) отличаются от принятых в прямых методах сингулярных интегральных уравнений выделением в выражении вектора поверхностных напряжений слагаемого  $\mathbf{s}$  и приводятся к ним включением в “силовую” тензор  $\mathbf{W}$  вектора  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{U}$ . Заметим, что эти формулы используются в дальнейшем для вывода следствий относительно перемещений на поверхностях плоских пространственных трещин с произвольным гладким фронтом.

Преобразуем тензор  $\mathbf{W}$ . Учитывая, что

$$|\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\psi|_S = |\mathbf{s}(\psi\mathbf{u}, \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \otimes \nabla\psi - \nabla\psi \otimes \mathbf{n})|_S,$$

получаем

$$\delta(\mathbf{x})\mathbf{u} = |(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}|_S = |(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{s}\psi - \mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \nabla\psi)|_S. \quad (4)$$

Пусть плоскость трещины  $S_T$  является частью поверхности полупространства  $X_3 \leq 0$ , ограниченной гладким контуром  $L_T$  (рис. 1).

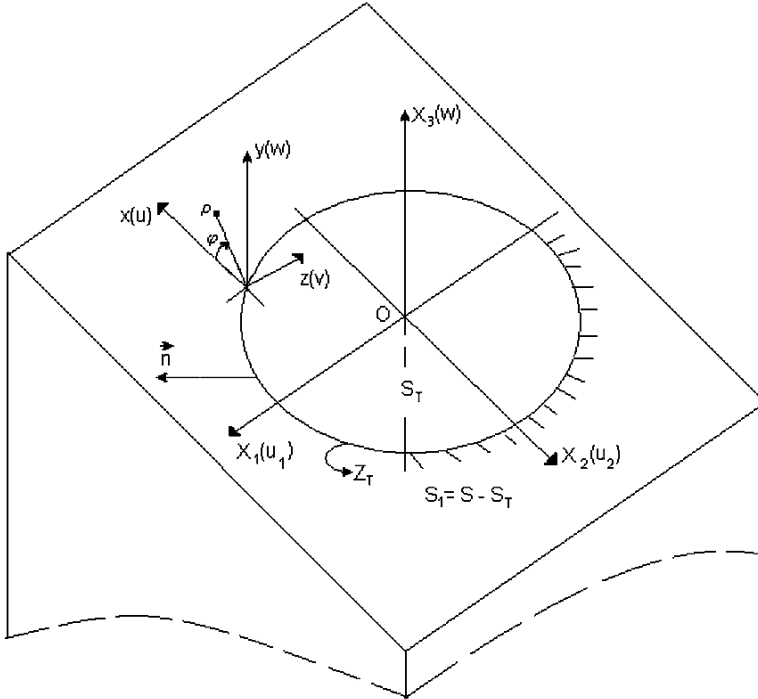


Рис. 1. Плоская пространственная трещина  $S_T$  по границе полупространства  $X_3 = 0$ .

В представлении (4) выделим касательные перемещения  $u_1, u_2, \mathbf{x} \in S_T$  и определим двумерную дивергенцию  $\chi(\mathbf{u}) = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2$ .

В результате прямого вычисления  $\chi(\mathbf{u} \cdot \nabla\psi \otimes \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y)$  – произвольный вектор, получим

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{u} \cdot \nabla\psi \otimes \mathbf{r}) &= \mathbf{u} \cdot \text{div}(\nabla\psi \otimes \mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{u} \cdot (-2\mathbf{r}/r^3 + \mathbf{r} \cdot \nabla_x(\mathbf{r}/r^3)) = \mathbf{u} \cdot (-3\mathbf{r}/r^3 + 3\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}/r^5) = 0, \end{aligned}$$

и представление (4) приводит к равенству

$$\chi(\mathbf{u}) = \frac{1}{c_1} |(\mathbf{s} \cdot \nabla\psi)|_S = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}. \quad (5)$$

**Постановка задач для основных типов деформации окрестности фронта трещины.** *Симметричное нагружение (нормальный отрыв).* Вследствие симметрии напряжений и перемещений относительно границы полупространства, где расположена трещина, краевые условия задачи записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_3 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_3 = c_1 \theta + \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_3, \quad p_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad \alpha = 1, 2, \\ u_3 = w = 0, \quad \mathbf{x} \in S - S_T. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в представление для дивергенции (1), с учетом равенства (5) получаем

$$\theta = 2(1 - 2\nu)p_3, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_3 = -\frac{1}{2}\theta, \quad \partial u_3 / \partial x_3 = \frac{1}{2}\theta, \quad \mathbf{x} \in S_T \quad (7)$$

и постановку задачи для гармонической функции  $\theta$  со смешанными краевыми условиями на линии фронта трещины:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \theta = 0, \quad \mathbf{x} \in V; \\ \theta = 2(1 - 2\nu)p_3, \quad \mathbf{x} \in S_T - L_T; \quad \mathbf{i}_3 \cdot \nabla \theta = 0, \quad \mathbf{x} \in S - S_T. \end{aligned} \quad (8)$$

Неизвестной функцией задачи (8) является физическая переменная – относительное изменение объема элемента упругой среды, что предпочтительнее для практической реализации. Так, приведенные в [7] условия (7) соблюдаются, если  $\theta$ ,  $s_3$ ,  $\partial u_3 / \partial x$  определять через вторые производные скалярной гармонической функции  $f(x)$ , к которой сводится представление решения в форме Треффца. Известные аналитические решения Грина и Снеддона [7], Лурье [8] и других авторов удовлетворяют этим условиям, однако формулировка краевых задач явно их не учитывает.

Поскольку на поверхности трещины дивергенция выражается через нормальные напряжения, можно записать

$$\begin{aligned} (1 - \nu) |\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}|_S = (1 - \nu) |p_3 w|_{S_T} = -|w| \nabla_y w \cdot \nabla \psi|_{S_T} |_{S_T} = \\ = -|w \nabla_x \cdot | \nabla_y w \psi|_{S_T} |_{S_T} = |(\nabla_x w) \cdot |(\nabla_y w) \psi|_{S_T} |_{S_T}. \end{aligned} \quad (9)$$

Придадим уравнению (9) следующий вид:

$$\Pi_w = [-(1 - \nu)p_3 w + (\nabla_x w) \cdot |(\nabla_y w) \psi|_{S_T} |_{S_T}] = 0. \quad (10)$$

Величину  $\Pi_w$  назовем частью потенциальной энергии системы, зависящей от перемещений на поверхности трещины, в которой учитываются условия симметрии нагрузки и формулы (7).

Применяя принцип “виртуальных работ”, получаем

$$\delta \Pi_w = [-(1 - \nu)p_3 \delta w + (\nabla_x \delta w) \cdot |(\nabla_y w) \psi|_{S_T} |_{S_T}] = 0. \quad (11)$$

Приравнивание дивергенции на поверхности трещины согласно (7) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода относительно градиента перемещений. Эта система нормально неразрешима. В уравнении (11) учитывается преобразование работы внешних сил, и неизвестная функция является перемещением с определенными на контуре трещины значениями. Краевые условия есть естественными и автомодельными на поверхности трещины при аппроксимации перемещений в области  $V$ .

В подтверждение достоверности формул (8) рассмотрим задачу для круговой трещины радиуса  $R$ , на поверхности которой задана изменяющаяся вдоль радиуса нагрузка  $p_3(\rho)$ . Используем формулу дивергенции и определим радиальное перемещение на поверхности трещины:

$$\theta = 2(1 - 2\nu)p_3 = \frac{1}{\rho} \partial(\rho u_\rho) / \partial \rho, \quad u_\rho = \int_0^\rho 2(1 - 2\nu)p_3 d\rho, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (12)$$

Сравнение значений  $u_\rho$  для постоянной нагрузки с данными решения этой задачи методом конечных элементов [9] показывает практически одинаковые результаты. Это является аргументом для реализации решения уравнения (12) каким-либо численным методом.

*Антисимметричное нагружение (поперечный и продольный сдвиг).* Для этого вида нагружения краевые условия запишем в виде

$$p_3 = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad p_\alpha = q_\alpha, \quad \mathbf{x} \in S_T, \quad u_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in S - S_T, \quad \alpha = 1, 2. \quad (13)$$

На поверхности  $S$  компоненты вихря и перемещение  $w$  будут:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2|s_3 \psi_{,2} - \omega_3 \psi_{,1}|_{S_T}, & \omega_2 &= 2|-s_3 \psi_{,1} - \omega_3 \psi_{,2}|_{S_T}; \\ s_3 &= -(u_{1,1} + u_{2,2}), & \omega_3 &= \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}), & w &= -\frac{1}{c_1} s_3 |\psi|_{S_T}. \end{aligned} \quad (14)$$

Дифференцируя  $w$  и комбинируя с  $\omega_1, \omega_2$ , а также повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, приходим к системе уравнений определения перемещений  $u_1, u_2$ :

$$\begin{aligned} |p_1 \delta u_1|_{S_T} &= \frac{1}{1 - \nu} |\delta u_{1,1} (u_{1,1} + u_{2,2}) \psi|_{S_T} + \delta u_{1,2} |(u_{1,2} - u_{2,1}) \psi|_{S_T} |_{S_T}; \\ |p_2 \delta u_2|_{S_T} &= \frac{1}{1 - \nu} |\delta u_{2,2} (u_{1,1} + u_{2,2}) \psi|_{S_T} - \delta u_{2,1} |(u_{1,2} - u_{2,1}) \psi|_{S_T} |_{S_T}. \end{aligned} \quad (15)$$

Решая систему, по значениям перемещений у фронта трещины определяем КИН  $K_{II}$  и  $K_{III}$ .

**Приближенное решение интегральных уравнений и определение КИН.** Для решения уравнений (11) и (15) с произвольным гладким контуром трещины с позиций дискретизации интегралов и аппроксимации производных целесообразно применить МКЭ. Область трещины разбивали трехузло-

выми треугольными элементами. У контура трещины моделировали  $\delta$ -поясок так, чтобы “размер элемента” по нормали к контуру был приближенно равен половине “размера” вдоль контура. Перемещения аппроксимировали линейными функциями форм, а интегрирование – суммированием по элементам. Для интегралов с переменной точкой  $x$  использовали квадратурную формулу четвертого порядка точности [10]. С учетом принятых предположений строка системы линейных алгебраических уравнений для вариации  $\delta\Pi_w$  имеет вид

$$\delta\Pi_w(w^{[i]}) = \sum_{j=1,ne} \nabla^{[j]}(f^{[i]}w^{[i]}) \sum_{k=1,7} \cdot \sum_{m=1,ne} \nabla^{[m]} \left( \sum_{n=1,3} f^{[n]}w^{[n]} \right) I_{1\psi}^{[m]}, \quad (16)$$

где  $ne$  – число элементов триангуляции;  $\nabla^{[j]}(\bullet)$  – градиент объекта  $j$ -го элемента по области  $S^{[j]}$ ;  $f^{[i]}$  – линейные функции форм;  $I_{1\psi}^{[m]}$  – потенциал простого слоя по элементу;  $k$  – номер узла квадратурной формулы.

Систему (15) формировали аналогично схеме вариации (16). Потенциалы простого слоя в (16) являются табличными интегралами, которые используются при формировании систем уравнений МСИУ [6]. Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляли по асимптотическим формулам для узловых перемещений элемента с двумя узлами на контуре трещины и относили к средней точке стороны элемента контура. Результаты сравнения для эллиптических трещин с полуосями  $a$ ,  $b$  при действии постоянных нормальной и касательной вдоль малой полуоси эллипса нагрузок с аналитическими решениями [7] приведены на рис. 2–4, где сплошными линиями показано аналитическое решение, точками – приближенное. Триангуляцию областей осуществляли средствами 2D генератора пакета RELAX-2D [9]. Число элементов составляет 1024, число узлов – 580.

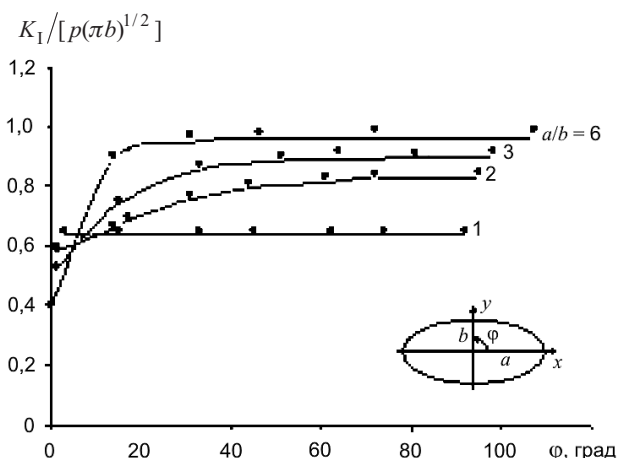


Рис. 2. Изменение коэффициента интенсивности напряжений при нормальном отрыве  $K_I$ .

Сравнение результатов определения  $K_I$  с известными данными, полученными иными методами, проводили для некоторых конфигураций фронта трещины. Значения  $K_I$  взяты из справочника [11]. Решали задачи для прямо-

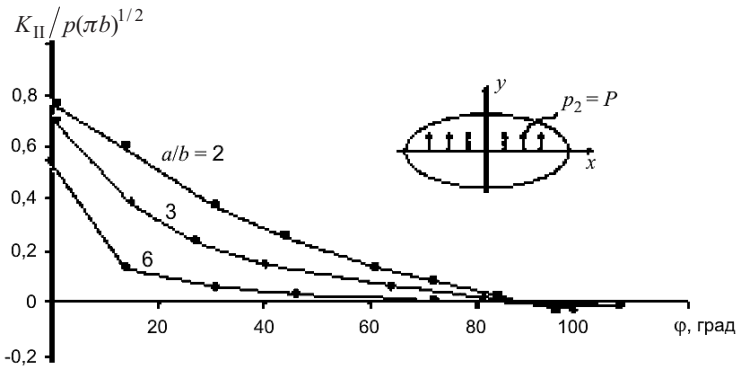


Рис. 3. Изменение коэффициента интенсивности напряжений при поперечном сдвиге  $K_{II}$ .

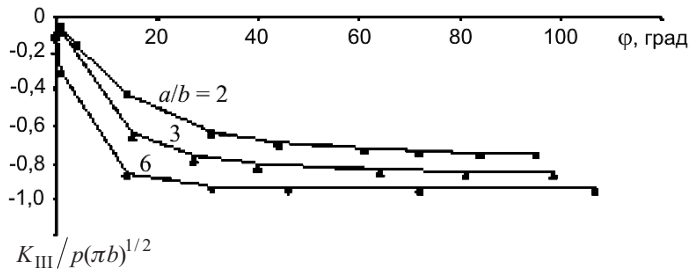


Рис. 4. Изменение коэффициента интенсивности напряжений при продольном сдвиге  $K_{III}$ .

угольной трещины ( $a/b = 10$ ), треугольной равносторонней ( $2a = 1$ ), полукруговой ( $a = 1$ ) и кольцевой ( $a/b = 0,5$ ) при  $\nu = 0,3$ ,  $E = 1$  МПа,  $\mathbf{p} = -\mathbf{i}_3$ .

Относительная разность в значениях  $K_I$  для характерных точек фронта трещин не превышает 10%, что является дополнительным подтверждением работоспособности предлагаемого способа вычисления КИН.

## Выводы

1. Сформулирована новая постановка трехмерных краевых задач теории упругости для плоских пространственных трещин с гладким фронтом в неограниченной упругой среде. Неизвестными функциями задач являются физические переменные: относительное изменение объема элемента упругой среды и проекции вихря перемещений, что предпочтительнее для практической реализации.

2. Предложен и реализован численный метод определения перемещений на поверхности трещин и КИН для трех видов деформирования окрестности фронта трещины.

3. Достоверность метода подтверждена при сравнении полученных результатов с аналитическими решениями и данными, полученными иными способами.

4. Эффективность метода как альтернативного способа реализации МСИУ заключается в существенном для практических расчетов снижении размерности матриц разрешающих систем линейных алгебраических уравнений, затрате усилий и времени на их формирование и дискретизацию поверхности конечными элементами.

## Резюме

Запропоновано методику визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень плоских просторових тріщин, яка використовує інтегральні тотожності переміщень і деформацій на поверхні тріщин. Отримано нові формулювання крайових задач математичної теорії лінійної механіки руйнування, що використовуються для побудови моделей метода скінченних елементів. Невідомими функціями є вузлові переміщення на поверхні тріщин. Наведені дані порівнюються з аналітичними розв'язками і результатами, отриманими іншими методами.

1. *Brocks W. and Schelder I.* Numerical Aspects of Path-Dependence of the  $J$ -integral in Incremental Plasticity // GKSS, Technical Notes GKSS/WMS/01/08.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. *Courtin S., Gardin C., Bezine G., and Hamouda Ben Hadj H.* Advantages of the  $J$ -integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABACOUS // Eng. Fract. Mech. – 2005. – 72. – P. 2174 – 2185.
4. *Ворошко П. П.* Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений на основе интегральных характеристик раскрытия поверхностей трещин нормального отрыва // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 122 – 127.
5. *Ворошко П. П.* Построение интегральных соотношений теории упругости и их приложение к задачам линейной механики разрушения // Там же. – 2003. – № 6. – С. 85 – 92.
6. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
7. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения. – М.: Мир, 1975. – С. 83 – 203.
8. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
9. *Чирков А. Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – Киев: Ин-т пробл. прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2003. – 250 с.
10. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
11. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 619 с.

Поступила 02. 06. 2009