УДК 539.375

Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечноэлементной методики решения пространственных задач механики разрушения

В. А. Баженов, А. И. Гуляр, С. О. Пискунов, А. С. Сахаров, А. А. Шкрыль, Ю. В. Максимюк

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

Изложены теоретические подходы и методика вычисления параметров нелинейной механики разрушения в призматических телах с трещинами с использованием метода конечных элементов. Проанализированы эффективность предложенных подходов и достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: механика разрушения, инвариантный *J*-интеграл, контур интегрирования, метод конечных элементов, линейная и нелинейная задачи.

Для решения большинства задач механики разрушения требуется применение численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ). Особенно сложными при этом являются постановка и разработка процедур решения задач механики разрушения в трехмерной постановке. Повышение эффективности процедуры конечноэлементного решения таких задач может быть достигнуто с использованием специальных модификаций МКЭ, одной из которых является полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ) [1, 2]. Метод показал высокую эффективность при решении широкого круга задач об определении коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на основе прямого метода при силовом [1, 2] и термосиловом [3] нагружении, а также задач о моделировании роста трещин в пространственных телах [4]. Однако область применения прямых методов и определяемых на их основе величин КИН ограничена задачами линейной механики разрушения при рассмотрении упругого деформирования тел. При этом, учитывая однозначную связь между *J*-интегралом и КИН при упругом деформировании, возможность параллельного вычисления параметров механики разрушения как прямыми, так и энергетическими методами позволяет осуществлять проверку достоверности получаемых результатов. В случае наличия существенных пластических деформаций для оценки несущей способности тел с трещинами необходимо применять энергетические подходы к определению параметров механики разрушения, в частности *J*-интеграла Черепанова–Райса [5, 6] – наиболее универсального параметра, который может быть использован в нелинейных задачах механики разрушения.

Цель данной работы состоит в создании теоретических основ, проведении практической реализации методики вычисления контурного *J*-интеграла в пространственных призматических телах на основе ПМКЭ, анализе достоверности получаемых результатов, в том числе с точки зрения удовлетворения фундаментальных свойств инвариантности J-интеграла, и сравнении эффективности разработанной методики с другими известными подходами. При этом предполагается также реализация новой методики вычисления J-интеграла, которая обеспечит его инвариантность в дискретных моделях МКЭ как в линейных, так и в нелинейных пространственных задачах механики разрушения.

В соответствии с базовым определением J-интеграла [5, 6] для его вычисления в некоторой точке фронта трещины (на рис. 1 т. C) в ее окрестности выделяют поверхность $F = F_1 + F_2 + F_k$ произвольной конфигурации, охватывающую фронт трещины и имеющую характерный размер Δ вдоль него.

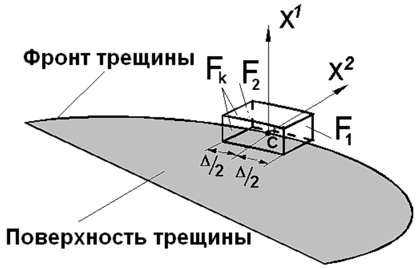


Рис. 1. Поверхность интегрирования в точке определения J-интеграла.

Формула для вычисления J-интеграла, полученная на основе гипотез механики сплошной среды, имеет вид

$$J_k = \frac{1}{\Delta}\int_F \left(W n_k - \sigma^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dF, \qquad (1)$$

где W – величина полной энергии деформирования, $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$; σ^{ij}, ε_{ij} – компоненты тензора напряжений и деформаций; n_k – компоненты внешней нормали к поверхности интегрирования F; u_i – перемещение.

Поверхность для вычисления J-интеграла в окрестности любой из точек фронта трещины будет состоять из контурной (F_k) и двух боковых (F_1 и F_2):

$$J = \frac{1}{\Delta}(J_{F_k} + J_{F_1} + J_{F_2}). \qquad (2)$$

Учитывая особенности построения дискретных моделей на основе ПМКЭ, при решении задач механики разрушения для тел канонической формы, в зависимости от характерного взаимного расположения фронта трещины и образующей, целесообразно рассматривать тела с продольными и поперечными трещинами [2].

В телах с продольными трещинами фронт и поверхность трещины расположены в плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения. Точки вычисления J-интеграла (на рис. 1 т. C) в этом случае находятся посередине между каждой парой точек интегрирования (на рис. 2 т. C' и C''), а боковые поверхности F_1 и F_2 проходят через эти точки.

Необходимо отметить, что рассмотрение дискретных моделей ПМКЭ для тел с продольными трещинами при выполнении условий равенства нулю перемещений $u^{3'}$ на торцах (поверхностях, перпендикулярных оси $z^{3'}$) позволяет решать задачи механики разрушения для объектов с постоянными вдоль фронта трещины значениями параметров механики разрушения. Такие задачи фактически эквивалентны двухмерным задачам, что дает возможность оценить достоверность результатов, полученных с использованием аппарата решения пространственных задач на основе ПМКЭ, путем их сравнения с известными решениями двухмерных задач с помощью МКЭ.

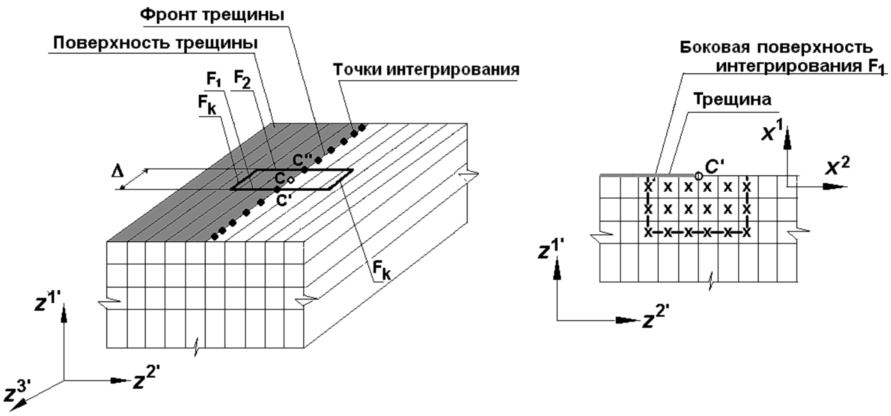


Рис. 2. Схема определения *J*-интеграла в телах с продольными трещинами.

В телах с поперечными трещинами фронт и поверхность трещины расположены в плоскости поперечного сечения тела (рис. 3), поэтому аппроксимация фронта трещины выполняется с помощью узлов конечноэлементной сетки. Соответственно *J*-интеграл вычисляется в узлах сетки (на рис. 3 т. C). Характерный размер Δ поверхности F при этом определяется размерами конечных элементов (КЭ), прилегающих к данному узлу и расположенных вдоль фронта трещины, а боковые поверхности F_1 и F_2 проходят через центры КЭ.

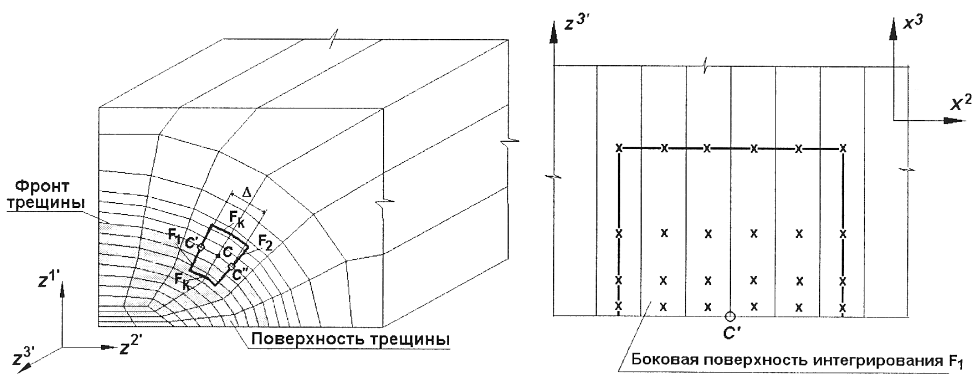


Рис. 3. Схема определения *J*-интеграла в телах с поперечными трещинами.

Для исследования пределов применения данной методики и оценки величин возможных погрешностей, которые возникают при численной аппроксимации напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины при использовании контуров разного размера, проведен ряд численных экспериментов по определению величины J-интеграла в телах с трещинами нормального отрыва. На первом этапе рассматриваются тестовые задачи о деформировании пространственных тел с продольными трещинами с постоянными вдоль их фронта значениями параметров механики разрушения.

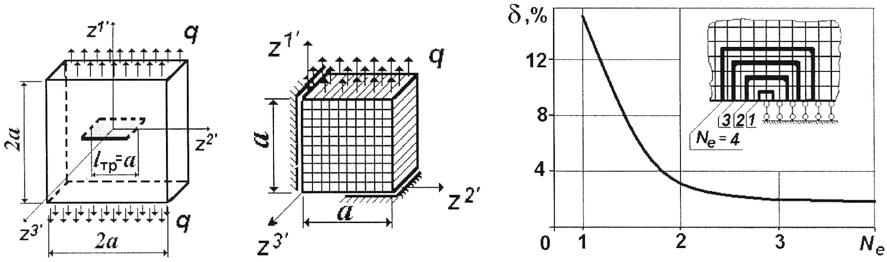
Для вычисления величины J-интеграла во всех тестовых примерах поверхность интегрирования выбирается таким образом, чтобы ее поперечное сечение, перпендикулярное к фронту трещины, представляло собой квадрат с равноотстоящими от фронта трещины сторонами [2, 7]. Это расстояние характеризуется отсчитанным от фронта трещины (или вершины трещины – для двухмерного случая) количеством конечных элементов N_e. Через середину последнего из элементов проходит поперечное сечение поверхности интегрирования (контур интегрирования). В дальнейшем величина N_e используется для обозначения указанных П-образных контуров интегрирования (П-контуров). Для обеспечения корректности сравнения получаемых результатов во всех случаях дискретизация области расположения контуров выполняется с использованием регулярной конечноэлементной сетки.

С целью определения характерных размеров контура и соответственно размеров КЭ в области интегрирования, необходимых для получения достоверных результатов вычисления J-интеграла, рассматривается тестовая задача об одноосном растяжении квадратной пластины с центральной трещиной при упругом деформировании (рис. 4,*а*) [8]. Решение задачи проводится с использованием ПМКЭ, пластина рассматривается как тело с продольной трещиной, на торцах реализованы граничные условия, соответствующие плоскому деформированному состоянию. Эталонные значения J-интеграла определяются на основе вычисленных прямым методом величин КИН, связанных с J-интегралом при упругом деформировании соотношением

$$J = kK_{\mathrm{I}}^2 \big/ E, \tag{3}$$

где $k = 1$ в условиях плоского напряженного состояния; $k = 1 - \nu^2$ в условиях плоской деформации.

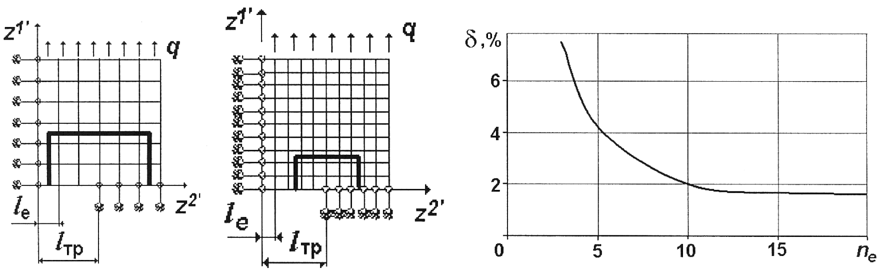
Как было показано ранее [2], обеспечение удовлетворительной точности результатов при вычислении КИН прямым методом требует использования в окрестности вершины трещины КЭ, размер которых составляет 1/10 характерного размера трещины $l_{\text{тр}}$ $(l_e = \frac{1}{10} l_{\text{тр}})$. С целью исследования зависимости погрешности вычисления J-интеграла от характерного топологического размера контура для обеспечения сравнения полученных результатов с эталонным решением вычисление J-интеграла было проведено с использованием в поперечном сечении регулярной сетки размером 20×20 КЭ. Принцип построения дискретной модели на основе ПМКЭ проиллюстрирован на рис. 4,*б*. Рассмотренные при этом контуры интегрирования представлены на рис. 4,*в*, где также приведена зависимость погрешности вычисления *J*-интеграла от характерного топологического размера контура N_e. Как видно, сходимость с точностью около 2% достигается при расположении контура на расстоянии трех характерных размеров КЭ от вершины трещины. При большем расстоянии и соответственно увеличении размера контура погрешность уменьшается лишь на 0,2%.



а *б* *в*

Рис. 4. Пластина с центральной трещиной: *а* – расчетная схема; *б* – конечноэлементная модель; *в* – сходимость *J*-интеграла.

Дальнейшее исследование сходимости результатов было проведено в зависимости от характерного размера КЭ в привершинной области при постоянных топологических размерах контура. Размер КЭ связан с характерным размером трещины соотношением $l_e = \frac{1}{n_e} l_{тр}$, где n_e – количество КЭ вдоль фронта трещины. Наиболее редкая сетка, на которой может быть использован обеспечивающий получение достоверных результатов контур (топологический размер $N_e = 3$), 6×6 КЭ при $n_e = 3$ (поперечное сечение конечноэлементной модели ПМКЭ для тела с продольной трещиной представлено на рис. 5,*а*). Результаты, полученные при дальнейшем сгущении сетки до 10×10 (рис. 5,*б*), 20×20 (рис. 4), а также 30×30 и 40×40 КЭ и соответствующем уменьшении размеров КЭ от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{20}$ длины трещины при неизменных топологических размерах контура ($N_e = 3$), показывают, что сходимость с точностью около 2%, так же как и для вычисления КИН на основе прямого метода, достигается при отношении размеров КЭ и трещины 1/10 (рис. 5,*в*).



а *б* *в*

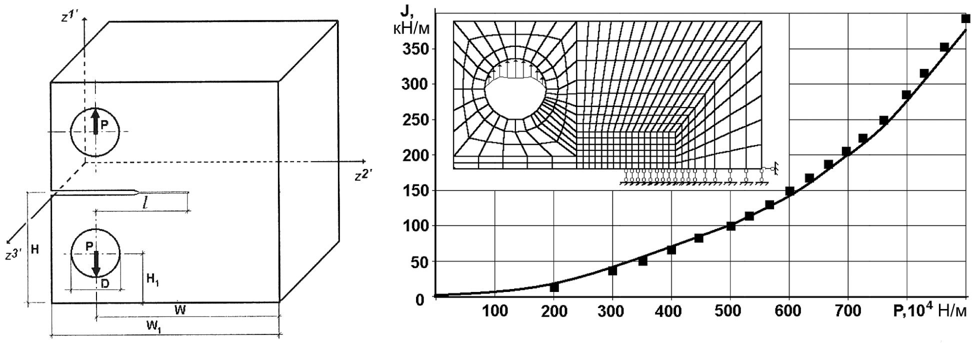
Рис. 5. Контуры топологическим размером $N_e = 3$ в поперечных сечениях дискретных моделей ПМКЭ (*а*, *б*) и сходимость *J*-интеграла (*в*).

Таким образом, были определены минимально необходимые размеры контура интегрирования, количество и характерные размеры КЭ для достоверного вычисления величины *J*-интеграла.

Для изучения вопроса о достоверности вычисления *J*-интеграла с использованием формул (1), (2) в нелинейных задачах проводили определение *J*-интеграла при деформировании компактного образца (рис. 6,*а*) [8]. Материал образца – сталь 12Х2МФА, для которой $E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, а закон пластического деформирования имеет вид

$$\bar{\sigma}/\sigma_m = 1 + 0{,}645(\bar{\varepsilon}_p)^{0{,}388}, \qquad \sigma_m = 637 \text{ МПа}.$$

Поперечное сечение дискретной модели ПМКЭ показано на рис. 6,*б*. При решении задачи внешняя нагрузка, равнодействующая которой равна силе P, распределена по внутренней поверхности отверстия.



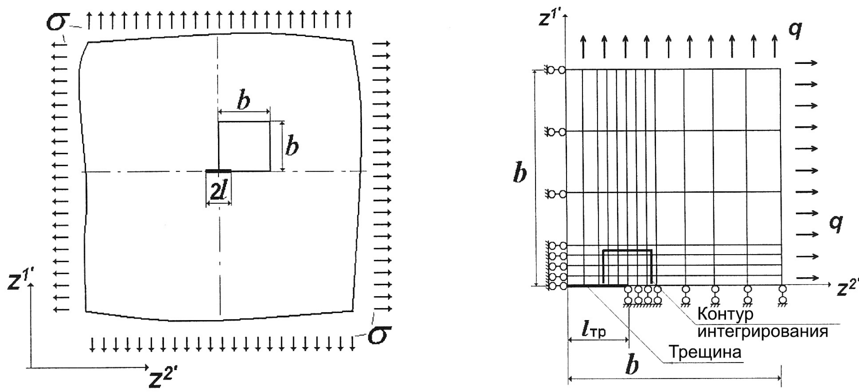
а *б*

Рис. 6. Расчетная схема компактного образца (*а*) и результаты вычисления *J*-интеграла при разных величинах нагрузки (*б*): точки – по формулам (1), (2); сплошная линия – по данным [8].

Полученные в условиях плоской деформации с соблюдением условий сходимости значения *J*-интеграла при разных величинах нагрузок совпадают с приведенными в [8] (рис. 6,*б*), что подтверждает достоверность использованного подхода к определению *J*-интеграла в задачах упругопластического деформирования при постоянных вдоль фронта трещины значениях параметров механики разрушения.

Эффективность описанной методики вычисления контурного *J*-интеграла была исследована на основании анализа результатов решения тестовой задачи о растяжении бесконечной пластины с центральной трещиной в условиях плоской деформации [9] (рис. 7,*а*). Поперечное сечение дискретной модели рассматриваемого фрагмента пластины размером $2b \times 2b = 8 \times 8$ см и контур для вычисления *J*-интеграла приведены на рис. 7,*б*. Нагружение фрагмента осуществлялось по плоскостям $z^{1'} = b$ и $z^{2'} = b$ неравномерно распределенной нормальной нагрузкой $q = 10$ МН/м^2.

На рис. 8 приведены зависимости величин контурного *J*-интеграла от количества неизвестных N в поперечном сечении конечноэлементной модели, полученные с использованием рассматриваемой методики (кривая *2*) и метода эквивалентного объемного интегрирования [9] (кривая *3*) в сравнении с эталонным решением (линия *1*). Как видно, сходимость результатов, полученных по формуле (1), происходит существенно быстрее, чем по методу эквивалентного объемного интегрирования. В частности, количество неизвестных дискретной модели, необходимых для получения величин *J*-интеграла с погрешностью в пределах 0,5% по формуле (1), примерно в 3,5 раза меньше, чем приведенное в работе [9].



а *б*

Рис. 7. Расчетная схема (*а*) и поперечное сечение дискретной модели ПМКЭ (*б*) для бесконечной пластины.

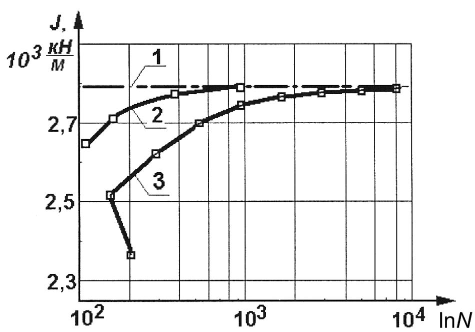


Рис. 8

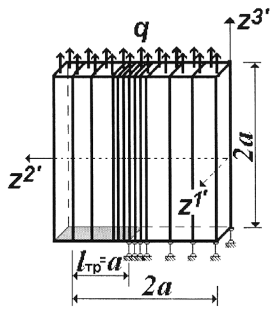
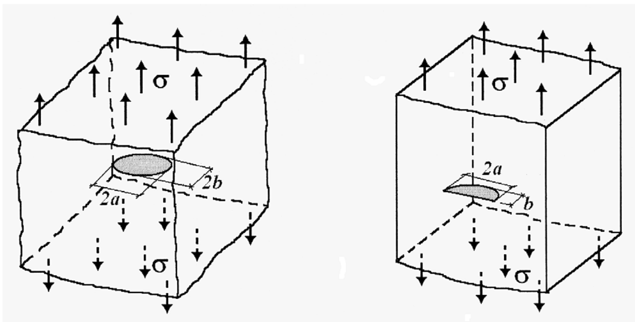


Рис. 9

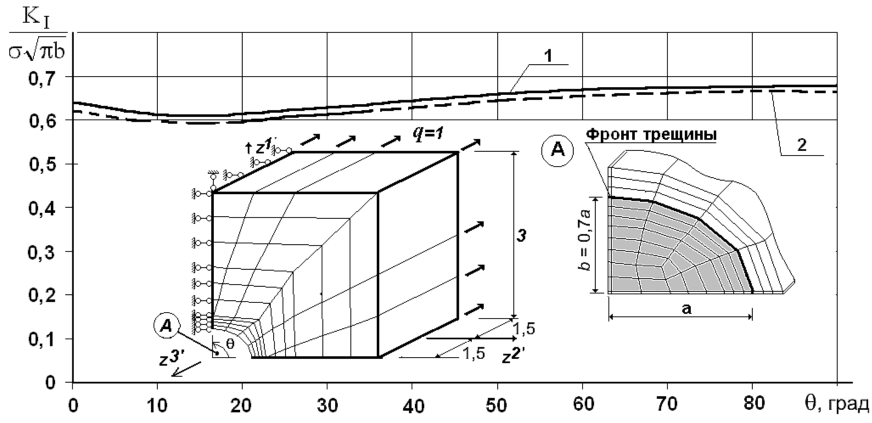
Рис. 8. Результаты вычисления *J*-интеграла в бесконечной пластине.
Рис. 9. Дискретная модель ПМКЭ пластины с центральной трещиной как тела с поперечной трещиной.

Для проверки достоверности разработанной методики при использовании дискретных моделей ПМКЭ для тел с поперечными трещинами при постоянных вдоль фронта значениях параметров механики разрушения было определено значение *J*-интеграла для пластины с центральной трещиной с помощью приведенной на рис. 9 дискретной модели. На поверхностях пластины при $z^{1'} = \pm l/2$ реализованы граничные условия, соответствующие условиям плоской деформации ($u^{1'} = 0$). Значения *J*-интеграла, полученные для случаев продольной и поперечной трещин, совпадают между собой и с эталонными результатами.

Дальнейшую апробацию методики проводили на пространственных задачах о деформировании тел с неравномерным распределением параметров механики разрушения вдоль фронта трещины. Рассмотрены задачи об определении распределения параметров механики разрушения вдоль фронта трещины для бесконечного (рис. 10,*а*) и полубесконечного (рис. 10,*б*) тел соответственно с эллиптической и полуэллиптической трещинами.



а *б*



в

Рис. 10. Определение *J*-интеграла в телах с поперечными трещинами: расчетные схемы бесконечного (*а*) и полубесконечного (*б*) тел с эллиптической и полуэллиптической трещинами, дискретная модель ПМКЭ и распределение КИН вдоль фронта трещины (*в*): *1* – данные по ПМКЭ; *2* – данные [10].

Распределение КИН вдоль фронта трещины, полученное на основании значений *J*-интеграла, вычисленных с использованием дискретной модели ПМКЭ тела с поперечной трещиной (рис. 10,*в*) по формуле (1) для полубесконечного тела с полуэллиптической трещиной, с точностью около 5% совпало с решением, приведенным в работе [10]. Аналогичные результаты получены также для бесконечного тела с эллиптической трещиной.

Таким образом, методика вычисления *J*-интеграла с помощью соотношений (1), (2) при соблюдении сформулированных и обоснованных выше требований к дискретной модели и контуру интегрирования обеспечивает получение достоверных результатов с использованием ПМКЭ для объектов с продольными и поперечными трещинами при постоянных вдоль фронта значениях параметров механики разрушения и объектов с поперечными трещинами при неравномерном распределении параметров механики разрушения вдоль фронта трещины.

Дальнейшее исследование достоверности результатов для пространственных задач проведено при рассмотрении тестового примера по определению *J*-интеграла для призматического тела с боковым надрезом (рис. 11). Решение этого примера в двухмерной постановке при дискретизации согласно сформулированным выше требованиям (использование регулярной конечноэлементной сетки с характерным размером КЭ 1/10 длины трещины) позволяет определить величины *J*-интеграла, совпадающие как с приведенным в работе [10] эталонным значением с погрешностью в пределах 2%, так и с полученными прямым методом результатами.

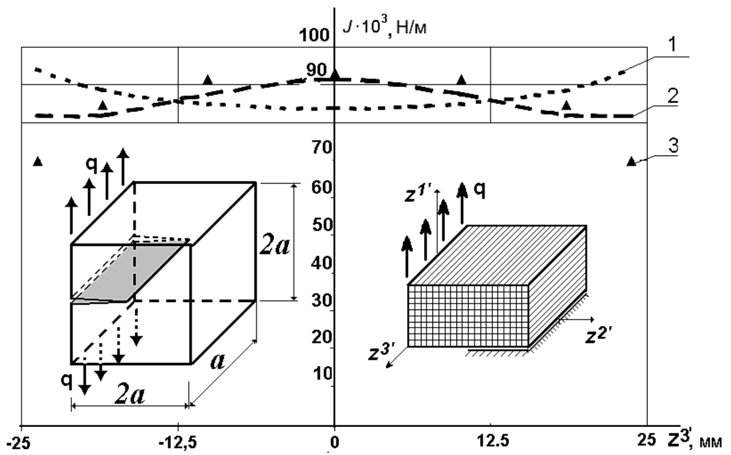


Рис. 11. Расчетная схема, дискретная модель ПМКЭ и распределение *J*-интеграла вдоль фронта боковой трещины в призматическом теле при упругом деформировании.

При решении задачи в пространственной постановке данный объект рассматривается как тело с продольной трещиной, конечноэлементная сетка ПМКЭ в поперечном сечении тела (в плоскости $z^{1'} - z^{2'}$) принята такой же, как для двухмерной задачи. Это позволяет получить эталонное решение на основании вычисленных прямым методом величин КИН [7] и исключить при анализе результатов погрешности, связанные с конечноэлементной дискретизацией. Полученные результаты показывают, что для данного объекта распределение *J*-интеграла вдоль фронта трещины является существенно неравномерным. При этом обнаружены значительные отличия не только количественного, но и качественного характера в распределениях *J*-интеграла вдоль фронта трещины, полученных с использованием разных контуров (*1* – $N_e = 9$; *2* – $N_e = 3$) по сравнению с эталонным решением (кривая *3*) – рис. 11.

На рис. 12 приведены абсолютные погрешности вычисления *J*-интеграла на боковых поверхностях (кривая *1*) и в центре (кривая *2*) призматического тела, полученные с использованием контуров, показанных на фрагменте поперечного сечения пространственной конечноэлементной модели ПМКЭ. Как видно, с увеличением размера контура интегрирования погрешность неуклонно возрастает, достигая 55%, ее значения разные в разных точках фронта трещины. Необходимо отметить, что аналогичное распределение J-интеграла было получено также с использованием трехмерного МКЭ (3D МКЭ).

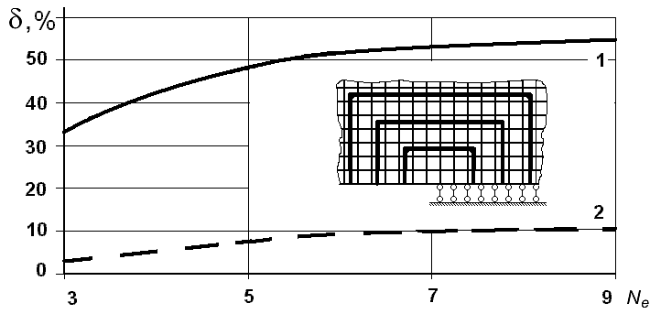


Рис. 12. Контуры и абсолютные погрешности вычисления J-интеграла в призматическом теле с боковой трещиной.

Согласно определению J-интеграла для континуальных областей, при интегрировании по замкнутому контуру его величина должна быть равной нулю. Как показывают проведенные исследования, при замыкании использованных ранее П-контуров интегрирования линией вдоль поверхности трещины (рис. 13) величина J-интеграла J_0, вычисленная по такому замкнутому прямоугольному контуру, не равна нулю. Причем характер отличия от нуля интеграла по замкнутому контуру δ_{J_0} при разной степени сгущения сетки эквивалентен характеру погрешности вычисления J-интеграла по П-контуру: величины погрешностей разные для разных точек фронта трещины (на рис. 13 кривая *1* – на боковых поверхностях, кривая *2* – в центре призматического тела), абсолютная величина погрешности достигает 60%.

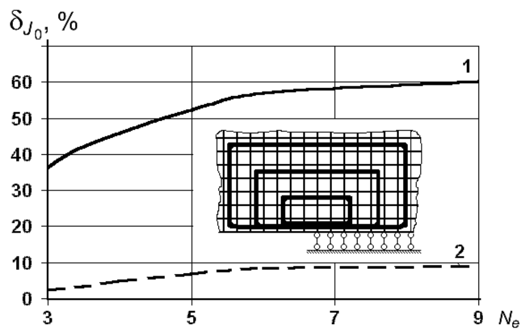


Рис. 13. Замкнутые контуры и абсолютные погрешности вычисления J-интеграла в призматическом теле с боковой трещиной.

Для исследования достоверности результатов при упругопластическом деформировании пространственного тела с боковым надрезом была рассмотрена расчетная схема, в которой для предотвращения возникновения локальных пластических деформаций приложение нагрузки осуществляется по поверхности $z^{2'} = 0$: $q_1 = q/a$ (рис. 14). Обеспечение сходимости результатов описания напряженно-деформированного состояния при наличии деформаций пластичности потребовало использования конечноэлементной сетки с характерным размером КЭ, который в три раза меньше, чем при упругом деформировании (30×60 КЭ). Поперечное сечение дискретной модели ПМКЭ приведено на рис. 14.

Как и в случае упругого деформирования, полученные результаты позволяют обнаружить существенные отличия не только количественного, но и качественного характера в распределении J-интеграла вдоль фронта трещины на разных контурах (*1* – $N_e = 20$; *2* – $N_e = 12$; *3* – $N_e = 9$; *4* – $N_e = 3$) по сравнению с эталонным решением при последовательном сгущении конечноэлеметной сетки до достижения погрешности вычисления J-интеграла между двумя решениями в пределах 2% (кривая *5*) – рис. 14.

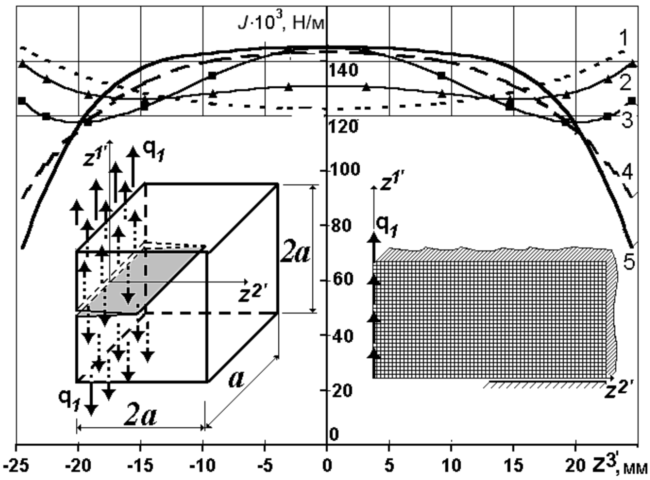


Рис. 14. Расчетная схема, поперечное сечение дискретной модели ПМКЭ и распределение J-интеграла вдоль фронта боковой трещины в призматическом теле при упругопластическом деформировании.

Исследования сходимости результатов показывают, что более точное вычисление J-интеграла требует значительного сгущения конечноэлементной сетки (рис. 15), что соответственно приводит к неоправданно большим вычислительным затратам. Кроме того, необходимо накладывать ограничения на размерность контура интегрирования. В данной задаче для достижения погрешности вычисления J-интеграла как по замкнутому контуру (на рис. 15 кривая *1*), так и по П-контуру (на рис. 15 кривая *2*) с точностью 2% потребовалось использовать дискретные модели, в которых соотношение размеров КЭ и трещины $\dfrac{l_e}{l_{\text{тр}}} = \dfrac{1}{120}$ при контуре интегрирования $N_e = 3$. В случае решения задачи упругопластического деформирования призматического тела соответствующие погрешности в определении J-интеграла (на рис. 15 кривые *3*, *4*) оказались больше в два раза.

Таким образом, процедура вычисления контурного J-интеграла с использованием величин напряжений и градиентов перемещений (формулы (1), (2)) позволяет получать достоверные результаты определения J-интеграла в двухмерных задачах упругого и упругопластического деформирования. При этом

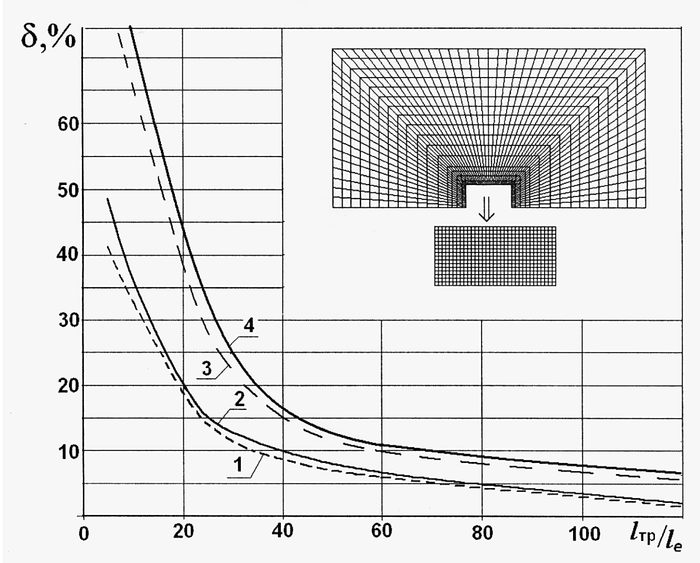


Рис. 15. Погрешности в вычислении J-интеграла по замкнутому контуру в призматическом теле с боковой трещиной.

достаточным является использование в окрестности вершины трещины области сгущения сетки с характерными размерами КЭ 1/10 размеров трещины и контура, проходящего на расстоянии трех характерных размеров конечного элемента от вершины трещины. Использование этих параметров при реализации методики обеспечивает ее эффективность по сравнению с методом объемного эквивалентного интегрирования, который широко применяется при конечноэлементном вычислении J-интеграла. Результаты определения контурного J-интеграла в ряде пространственных задач упругого деформирования с использованием ПМКЭ также являются достоверными и совпадают с полученными на основе традиционного трехмерного метода конечных элементов. Однако в некоторых случаях получение достоверных результатов решения пространственной задачи требует значительного сгущения конечноэлементной сетки и наложения ограничений на размерность контура интегрирования, что приводит к неоправданным вычислительным затратам. Следовательно, методика вычисления контурного J-интеграла с использованием величин напряжений и градиентов перемещений не является универсальной и эффективной при конечноэлементном решении всех классов задач механики разрушения. В связи с этим актуален вопрос разработки и реализации новой эффективной методики вычисления J-интеграла, которая обеспечивала бы его инвариантность в дискретных моделях МКЭ.

Резюме

Викладено теоретичні підходи і методику обчислення параметрів нелінійної механіки руйнування в призматичних тілах із тріщинами з використанням методу скінченних елементів. Проаналізовано ефективність запропонованих підходів і вірогідність отримуваних результатів.

1. *Баженов В. А.*, *Гуляр А. И.*, *Сахаров А. С.*, *Топор А. Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Киев: НИИ СМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В. А.*, *Гуляр О. І.*, *Пискунов С. О.*, *Сахаров О. С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. – Київ: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Гречух Н. А.*, *Пискунов С. О.*, *Остапенко Р. М.* Обчислення КІН в просторових тілах обертання при температурному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – № 80. – С. 38 – 53.
4. *Баженов В. А.*, *Гуляр А. И.*, *Пискунов С. О.*, *Шкриль А. А.* Определение ресурса лопатки газовой турбины с учетом разрушения // Пробл. прочности. – 2008. – № 5. – С. 28 – 36.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks // J. Appl. Mech. – 1968. – No. 4. – P. 379 – 386.
7. *Баженов В. А.*, *Гуляр О. І.*, *Пискунов С. О.* та ін. Метод реакцій для обчислення *J*-інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – № 79. – С. 3 – 17.
8. *Морозов Е. М.*, *Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 2007. – 256 с.
9. *Giner E.*, *Fuentmayor F.*, *Baeza L.*, *and Tarancon J.* Error estimation for the finite element evaluation of G_{I} and G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – **41**. – P. 1079 – 1104.
10. *Саврук М. П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.

Поступила 18. 06. 2009