

Модель автоколебаний однодискового несимметричного ротора

К. В. Аврамов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Предлагается модель автоколебаний несимметричного однодискового ротора в коротких подшипниках скольжения, которая сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Полученная динамическая система описывается нелинейными нормальными формами Шоу–Пьера.

Ключевые слова: короткие подшипники скольжения, уравнение Рейнольдса, нелинейные нормальные формы колебаний.

Введение. Автоколебания в роторных системах могут возникать при взаимодействии масляной пленки подшипника скольжения с цапфой ротора. В [1] показано, что они обусловили разрушение ряда роторных систем. В настоящее время для исследования колебаний роторных систем часто применяются современные аналитические и численные методы нелинейной динамики [2]. В [3] получены аналитические результаты, описывающие давления в масляной пленке подшипников скольжения. С использованием вариационного подхода в [4] получено асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривалась в [5]. Модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения получена в [6], где исследовалось влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Авторы работы [7] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах, в [8] анализируются вынужденные колебания ротора с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения и описывается динамика ротора с помощью расчетной схемы, состоящей из упругого вала с тремя дискретными массами.

В настоящее время нелинейные нормальные формы колебаний являются одним из наиболее эффективных подходов теории нелинейных механических колебаний, применяемых как для анализа свободных, так и вынужденных колебаний [9–11].

В данной работе предлагается новая модель автоколебаний несимметричного однодискового ротора в коротких подшипниках скольжения. Давления в масляном слое описываются с помощью модели короткого подшипника. Для исследования автоколебаний ротора предложена модификация метода нелинейных нормальных форм.

Уравнения движения системы. Изучим динамику жесткого диска, прикрепленного к вращающемуся упругому валу, который находится в двух коротких подшипниках скольжения (рис. 1). В процессе колебаний цапфы вала A и B (рис. 1) движутся. Эти движения описываются обобщенными координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Рассмотрим ротор в двух одинаковых подшипниках скольжения, в масляном слое которых возникают усилия, дей-

ствующие на цапфы. Проекции этих усилий на оси x и y обозначим соответственно $F_x(x_i; y_i)$, $F_y(x_i; y_i)$, $i=1, 2$. Предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z (рис. 1). Тогда угловую скорость диска представим так:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3; \quad (1)$$

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3; \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3;$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2,$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты декартовой системы координат, связанной с диском; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – углы поворота диска.

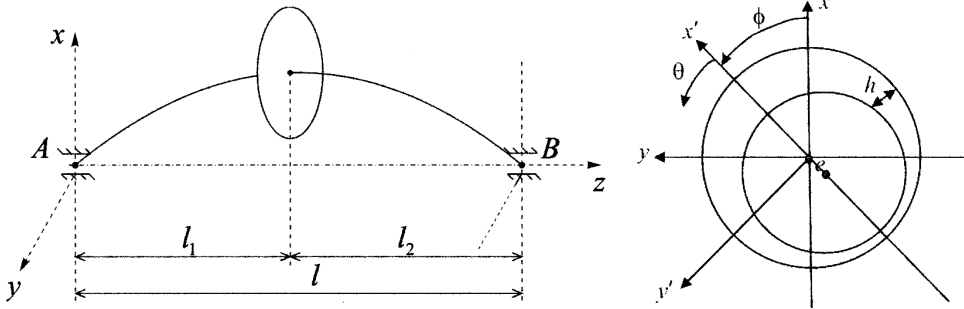


Рис. 1. Расчетная схема однодискового ротора в подшипниках скольжения.

Из условий движения следует, что $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$. Кинетическая энергия диска принимает вид

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где x, y – перемещения точек крепления диска к валу; I_e, I_p – экваториальный и полярный моменты инерции диска.

Если предположить, что цапфы A и B покоятся, потенциальная энергия вала примет следующий вид:

$$\Pi = \frac{c_{11}}{2} (x^2 + y^2) + \frac{c_{22}}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2) + c_{12} (x\theta_2 - y\theta_1),$$

где c_{11}, c_{22}, c_{12} – элементы матрицы жесткости.

Если цапфы движутся, потенциальную энергию можно представить так:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} [(x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1)^2 + (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2)^2] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} c_{22} \left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \\
 & + c_{12} \left[(x - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - \right. \\
 & \left. - (y - \xi_2 y_1 - \xi_1 y_2) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right]; \quad \xi_1 = \frac{l_1}{l}; \quad \xi_2 = \frac{l_2}{l}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения системы состоят из четырех уравнений Лагранжа, описывающих колебания диска, и четырех условий равновесия цапф:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & m\ddot{x} + c_{11}(x - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) + c_{12} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -mg; \\
 & m\ddot{y} + c_{11}(y - \xi_1 y_2 - \xi_2 y_1) - c_{12} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = 0; \\
 & I_e \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\
 & - \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + \\
 & + c_{22} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - c_{12}(y - \xi_2 y_1 - \xi_1 y_2) = 0; \\
 & I_e \ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p \Omega \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + c_{22} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + \\
 & + c_{12}(x - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) = 0; \\
 & \left(\frac{c_{12}}{l} - \xi_2 c_{11} \right) (x - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} - \xi_2 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = F_x(x_1, y_1); \\
 & \left(\frac{c_{12}}{l} - \xi_2 c_{11} \right) (y - \xi_1 y_2 - \xi_2 y_1) + \left(\xi_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{l} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = F_y(x_1, y_1); \\
 & \left(\xi_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (x - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} + \xi_1 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -F_x(x_2, y_2); \\
 & \left(\frac{c_{22}}{l} + \xi_1 c_{12} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \left(\xi_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \xi_2 y_1 - \xi_1 y_2) = F_y(x_2, y_2).
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Под действием силы тяжести ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое определяется следующими значениями обобщенных координат: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$, удовлетворяющими системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$F_X(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}; \quad F_X(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}; \quad (5a)$$

$$F_Y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0; \quad F_Y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \quad (56)$$

Тогда равновесие диска определяется так:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \zeta_1 \bar{x}_2 + \zeta_2 \bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; & \bar{y} &= \zeta_2 \bar{y}_1 + \zeta_1 \bar{y}_2; \\ \bar{\theta}_1 &= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}; & \bar{\theta}_2 &= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь рассмотрим колебания ротора относительно положения статического равновесия. Для этого введем замену переменных:

$$(x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2),$$

и динамическую систему (4) представим так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_X^{(1)}; & I_e\ddot{\theta}_2 - I_p\Omega\dot{\theta}_1 + R_x^{(2)} &= 0; \\ m\ddot{y} &= R_Y^{(1)}; & I_e\ddot{\theta}_1 + I_p\Omega\dot{\theta}_2 - R_y^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$R_Y^{(1)} = \tilde{F}_Y(x_1, y_1) + \tilde{F}_Y(x_2, y_2); \quad R_X^{(1)} = \tilde{F}_X(x_2, y_2) + \tilde{F}_X(x_1, y_1);$$

$$R_Y^{(2)} = l_1\tilde{F}_Y(x_1, y_1) - l_2\tilde{F}_Y(x_2, y_2);$$

$$R_X^{(2)} = -l_2\tilde{F}_X(x_2, y_2) + l_1\tilde{F}_X(x_1, y_1);$$

$$\tilde{F}_X(x_i, y_i) = F_X(x_1 + \bar{x}_i, y_i + \bar{y}_i) - F_X(\bar{x}_i, \bar{y}_i);$$

$$\tilde{F}_Y(x_i, y_i) = F_Y(x_i + \bar{x}_i, y_i + \bar{y}_i) - F_Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i), \quad i = 1, 2.$$

Силы, действующие на цапфы вала со стороны масляного слоя (рис. 1), запишем в следующем виде [2]:

$$[F_X, F_Y]^T = - \int_0^{L_B} \int_0^\pi [\cos(\theta + \phi), \sin(\theta + \phi)]^T p(z_1, \theta) R d\theta dz_1, \quad (8)$$

где L_B – длина подшипника; ϕ – угол линии центров (рис. 1).

Предполагается, что масляный слой занимает область $\theta \in [0; \pi]$. Тогда давление масляного слоя на цапфу $p(z_1, \theta)$ определяется из уравнения Рейнольдса [2], решение которого представим так:

$$p(z_1, \theta) = \frac{3\mu}{h^3} \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) (z_1 - L_B) z_1, \quad (9)$$

где μ – вязкость масла; z_1 – продольная локальная координата подшипника скольжения; $h = c + e \cos \theta = c - e(x_1 \cos \phi + y_1 \sin \phi)$; c – величина зазора между цапфой и подшипником. Параметр e показан на рис. 1.

В дальнейшем используем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}; \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad H = \frac{h}{c}; \quad \tau = \Omega t. \quad (10)$$

Тогда силы масляного слоя определяются так:

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{L_B^3 \mu R \Omega}{2c^2} \int_0^\pi H^{-3} \cos(\theta + \phi) \{ \tilde{x}_1 \sin(\theta + \phi) - \tilde{y}_1 \cos(\theta + \phi) - \\ &- 2\tilde{x}'_1 \cos(\theta + \phi) - 2\tilde{y}'_1 \sin(\theta + \phi) \} d\theta; \\ F_Y &= \frac{L_B^3 \mu R \Omega}{2c^2} \int_0^\pi H^{-3} \sin(\theta + \phi) \{ \tilde{x}_1 \sin(\theta + \phi) - \tilde{y}_1 \cos(\theta + \phi) - \\ &- 2\tilde{x}'_1 \cos(\theta + \phi) - 2\tilde{y}'_1 \sin(\theta + \phi) \} d\theta; \\ H &= 1 - \tilde{x}_1 \cos(\theta + \phi) - \tilde{y}_1 \sin(\theta + \phi); \quad ()' = \frac{d()}{d\tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим положение равновесия ротора под действием силы тяжести. Тогда соотношение (9) представим в виде

$$p = - \frac{3\mu \Omega e \sin \theta}{(c + e \cos \theta)^3} z_1 (z_1 - L_B). \quad (12)$$

Уравнения равновесия цапфы принимают следующий вид:

$$F_{X'} = G \cos \phi_e; \quad F_{Y'} = -G \sin \phi_e, \quad (13)$$

где $F_{X'}$, $F_{Y'}$ – проекции сил на оси x' , y' ; ϕ_e – угол линии центров равновесного состояния цапфы; G – значение вертикального усилия в подшипнике, в цапфе A имеем $G = mg \frac{l_2}{l}$, в цапфе B – $G = mg \frac{l_1}{l}$.

Тогда статические силы масляного слоя запишем так:

$$F_{X'} = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^2}; \quad F_{Y'} = - \frac{\pi L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}; \quad \varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (14)$$

Из (13), (14) получим нелинейное уравнение для определения ε :

$$G = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad (15)$$

Тогда обобщенные координаты равновесного состояния цапфы A определяются так:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,0} &= \bar{x}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \cos \phi_{e1}; & \tilde{y}_{1,0} &= \bar{y}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \sin \phi_{e1}; \\ \operatorname{tg} \phi_e &= \pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} / (4\varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Индекс 1 у величин ε и ϕ_e обозначает, что они описывают равновесное состояние цапфы A . Аналогичные параметры для цапфы B приводятся с индексом 2.

Исследуем колебания ротора относительно положения равновесия. Для этого введем следующую замену переменных: $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}$; $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}$, $i=1, 2$. Тогда нелинейные силы F_X , F_Y , действующие на цапфы масляного слоя, разделим на две части: линейную $F_{X,1}$, $F_{Y,1}$ и нелинейную $F_{X,2}$, $F_{Y,2}$:

$$\left\{ \begin{aligned} [F_{X,1}, F_{X,2}]^T &= \gamma \int_0^\pi \cos(\theta + \phi_{e1}) [R_1, R_2]^T d\theta; \\ [F_{Y,1}, F_{Y,2}]^T &= \gamma \int_0^\pi \sin(\theta + \phi_{e1}) [R_1, R_2]^T d\theta; \\ R_1 &= \eta^{-3} \{(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) \sin \theta_1 - (\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}'_1) \cos \theta_1 - \\ &\quad - 3\varepsilon \eta^{-1} \sin \theta_1 (\tilde{x}_1 \cos \theta_1 + \tilde{y}_1 \sin \theta_1)\}; \\ R_2 &= \eta^{-3} \{3\eta^{-1} X [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) \sin \theta_1 - (\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}'_1) \cos \theta_1] - 6\varepsilon \sin \theta \eta^{-2} X^2\}; \\ X &= \tilde{x}_1 \cos \theta_1 + \tilde{y}_1 \sin \theta_1; \quad \eta = 1 + \varepsilon \cos \theta; \quad \theta_1 = \theta + \phi_{e1}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Линейные части сил $F_{X,1}$ и $F_{Y,1}$ масляного слоя представим так:

$$\begin{aligned} F_{X,1} &= \gamma [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) I_1 - (y_1 + 2\tilde{x}'_1) I_2 - 3\varepsilon \tilde{x}_1 I_3 - 3\varepsilon \tilde{y}_1 I_4] = \\ &= \gamma [\bar{K}_{11}^{(x)} \tilde{x}_1 + \bar{K}_{12}^{(x)} \tilde{y}_1 + \bar{\beta}_{11}^{(x)} \tilde{x}'_1 + \bar{\beta}_{12}^{(x)} \tilde{y}'_1]; \\ F_{Y,1} &= \gamma [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) I_5 - (y_1 + 2\tilde{x}'_1) I_1 - 3\varepsilon \tilde{x}_1 I_4 - 3\varepsilon \tilde{y}_1 I_6] = \\ &= \gamma [\bar{K}_{11}^{(y)} \tilde{x}_1 + \bar{K}_{12}^{(y)} \tilde{y}_1 + \bar{\beta}_{11}^{(y)} \tilde{x}'_1 + \bar{\beta}_{12}^{(y)} \tilde{y}'_1], \end{aligned} \quad (18)$$

где I_1, \dots, I_6 – интегралы, которые определяются в элементарных функциях (они не приводятся из-за краткости изложения).

Нелинейные части сил $F_{X,2}$ и $F_{Y,2}$ запишем в виде

$$\begin{aligned} F_{X,2} &= \gamma \{3(\tilde{x}_1^2 - \tilde{y}_1^2 - 2\tilde{x}_1 \tilde{y}'_1 - 2\tilde{y}_1 \tilde{x}'_1) I_7 - 3\tilde{x}_1 (\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}'_1) I_8 + \\ &\quad + 3\tilde{y}_1 (\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) I_9 - 6\varepsilon \tilde{x}_1^2 I_{10} - 6\varepsilon \tilde{y}_1^2 I_{11} - 12\varepsilon \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 I_{12}\}; \end{aligned} \quad (19a)$$

$$F_{Y,2} = \gamma \{ 3(\tilde{x}_1^2 - \tilde{y}_1^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1' - 2\tilde{y}_1\tilde{x}_1')I_9 - 3\tilde{x}_1(\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_1)I_7 + 3\tilde{y}_1(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}_1')I_{13} - 6\epsilon\tilde{x}_1^2I_{12} - 6\epsilon\tilde{y}_1^2I_{14} - 12\epsilon\tilde{x}_1\tilde{y}_1I_{11} \}, \quad (196)$$

где I_7, I_8, \dots, I_{14} – интегралы, которые определяются в элементарных функциях (интегралы и их значения также не приводятся).

Отметим, что силы масляного слоя (18), (19) выражаются через обобщенные координаты цапф. Для упрощения уравнений движения ротора (7) выразим эти силы через обобщенные координаты диска. Для этого воспользуемся четырьмя алгебраическими уравнениями системы (4). В этих уравнениях отбросим нелинейные слагаемые и представим их в следующей матричной форме:

$$[R]_q = [\tilde{D}]_{q_1}, \quad (20)$$

$$[\tilde{D}] = \begin{bmatrix} \gamma\bar{K}_{11}^{(x)} - cr_{11} & \gamma\bar{K}_{12}^{(x)} & -cr_{12} & 0 \\ \gamma\bar{K}_{11}^{(y)} & \gamma\bar{K}_{12}^{(y)} - cr_{11} & 0 & -cr_{12} \\ cr_{12} & 0 & cr_{32} - \gamma\bar{K}_{11}^{(x)} & -\gamma\bar{K}_{12}^{(x)} \\ 0 & -cr_{12} & \gamma\bar{K}_{11}^{(y)} & \gamma\bar{K}_{12}^{(y)} - cr_{32} \end{bmatrix};$$

$$[R] = \begin{bmatrix} l^{-1}c_{12} - \xi_2c_{11} & 0 & 0 & l^{-1}c_{22} - \xi_2c_{12} \\ 0 & c_{12}\xi_2 - c_{22}l^{-1} & l^{-1}c_{12} - \xi_2c_{11} & 0 \\ c_{11}\xi_1 + c_{12}l^{-1} & 0 & 0 & l^{-1}c_{22} + c_{12}\xi_1 \\ 0 & l^{-1}c_{22} + c_{12}\xi_1 & -c_{11}\xi_1 - c_{12}l^{-1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$r_{11} = -2\xi_2c_{12}l^{-1} + \xi_2^2c_{11} + c_{22}l^{-2}; \quad r_{12} = (\xi_2 - \xi_1)c_{12}l^{-1} + \xi_1\xi_2c_{11} - c_{22}l^{-2};$$

$$r_{32} = \xi_1^2c_{11} + 2\xi_1c_{12}l^{-1} + c_{22}l^{-2}; \quad q = [x, \theta_1, y, \theta_2]^T; \quad q_1 = [\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2]^T.$$

Теперь из соотношений (20) выразим вектор q_1 и введем его в значения сил масляного слоя (18), (19).

Уравнение движения ротора (7) представим в следующем виде:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q_1'), \quad (21)$$

где $[M] = \text{diag}(m, I_e, m, I_e)$; $[G]$ – матрица гироскопических сил, действующих на ротор; $[K_1]$ – матрица линейной части упругих сил масляной пленки; $[D_1]$ – матрица линейной части диссипативных сил масляной пленки; W – вектор нелинейной части сил масляной пленки, $W = (w_1, \dots, w_4)^T$; $q' = dq/dt$.

Запишем систему (21) в окончательном виде

$$\begin{cases} \ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}); \\ [F] = [M]^{-1}([G] - [D_1]\Omega^{-1}); \end{cases} \quad (22a)$$

$$\begin{cases} [Q] = -[M]^{-1}[K_1]; \\ \tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1}W(q_1, q'_1) = [M]^{-1}W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}_1) = \\ = [M]^{-1}W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q}), \end{cases} \quad (22б)$$

где $[F] = \|f_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}$; $[Q] = \|\tilde{Q}_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}$; $\tilde{W} = [\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_4]$.

Нелинейные нормальные формы Шоу–Пьера. Нелинейные нормальные формы Шоу–Пьера являются современным методом исследования нелинейных динамических систем [9–11] и применяются для решения многих технических задач [12, 13]. Ниже предлагается модификация этого метода для исследования автоколебаний роторов.

Линейную часть системы (22) представим так:

$$\dot{z} = [\Gamma]z, \quad (23)$$

где

$$z = [z_1, \dots, z_8] = [q\dot{q}]^T = [qv]^T; \quad [\Gamma] = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -Q & -F \end{bmatrix};$$

E – единичная матрица.

Из численных расчетов следует, что все собственные значения λ_j матрицы $[\Gamma]$ являются комплексно-сопряженными. Поэтому общее решение системы (23) имеет вид

$$z(t) = \sum_{j=1}^4 [C_{2j}W_{2j} \exp(\lambda_{2j}t) + C_{2j-1}W_{2j-1} \exp(\lambda_{2j-1}t)], \quad (24)$$

где $\lambda_{2j} = \overline{\lambda_{2j-1}}$; $W_{2j} = \overline{W_{2j-1}}$; $C_{2j} = \overline{C_{2j-1}}$; черта над символом обозначает комплексно-сопряженную величину.

Рассмотрим образование автоколебаний вследствие бифуркации Хопфа. В этом случае предельный цикл рождается вследствие потери устойчивости состояний равновесия [14], а два характеристических показателя определяются так: $\lambda_{1,2} = \pm i\chi_1$. Потеря устойчивости ротора описывается следующим частным решением системы (23):

$$z(t) = C_2W_2 \exp(\lambda_2 t) + C_1W_1 \exp(\lambda_1 t), \quad (25)$$

где $W_1 = \gamma_1 - i\delta_1$; $C_1 = K_1^{(1)} = iK_1^{(2)}$; $\lambda_1 = \alpha_1 - i\chi_1$; $\gamma_1 = \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(8)}\}$; $\delta_1 = \{\delta_1^{(1)}, \dots, \delta_1^{(8)}\}$; $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}$ – константы интегрирования; i – мнимая единица.

Отметим, что решение (25) представляет собой центральное многообразие следующего вида:

$$z_\nu(t) = \gamma_1^{(\nu)} \eta_1(t) + \delta_1^{(\nu)} \eta_2(t), \quad \nu = \overline{1, 8}; \quad (26)$$

$$\eta_1(t) = 2 \exp(\alpha_1 t) [K_1^{(1)} \cos(\chi_1 t) - K_1^{(2)} \sin(\chi_1 t)];$$

$$\eta_2(t) = -2 \exp(\alpha_1 t) [K_1^{(1)} \sin(\chi_1 t) + K_1^{(2)} \cos(\chi_1 t)].$$

Первая и пятая координаты вектора z имеют вид

$$x = \gamma_1^{(1)} \eta_1(t) + \delta_1^{(1)} \eta_2(t); \quad \dot{x} = \gamma_1^{(5)} \eta_1(t) + \delta_1^{(5)} \eta_2(t).$$

Эти уравнения можно представить так:

$$\eta_1(t) = \frac{x \delta_1^{(5)} - \dot{x} \delta_1^{(1)}}{\gamma_1^{(1)} \delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)} \delta_1^{(1)}}; \quad \eta_2(t) = \frac{\dot{x} \gamma_1^{(1)} - x \gamma_1^{(5)}}{\gamma_1^{(1)} \delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)} \delta_1^{(1)}}. \quad (27)$$

Уравнение (27) подставим в (25) и получим линейную часть нелинейной нормальной формы, которую можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ y \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{61} & a_{52} \\ a_{71} & a_{62} \\ a_{81} & a_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$a_{\nu 1} = \frac{\gamma_1^{(\nu)} \delta_1^{(5)} - \delta_1^{(\nu)} \gamma_1^{(5)}}{\gamma_1^{(1)} \delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)} \delta_1^{(1)}}; \quad a_{\nu 2} = \frac{\delta_1^{(\nu)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(\nu)} \delta_1^{(1)}}{\gamma_1^{(1)} \delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)} \delta_1^{(1)}},$$

$$\nu = 2, \dots, 8, \quad \nu \neq 5.$$

В общем случае нелинейную нормальную форму представим так:

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j(x, v) = a_{j1}x + a_{j2}v + a_{j3}x^2 + a_{j4}v^2 + a_{j5}xv + \dots; \\ \dot{q}_j &= Q_{j+4}(x, v) = a_{4+j,1}x + a_{4+j,2}v + a_{4+j,3}x^2 + a_{4+j,4}v^2 + \\ &+ a_{4+j,5}xv + \dots, \quad j = \overline{2, 4}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $v = \dot{x}$.

Нелинейная нормальная форма (29) удовлетворяет системе уравнений в частных производных. Для ее вывода уравнения (29) необходимо продифференцировать по времени, а в полученные уравнения подставить (22). В результате получим следующую систему уравнений в частных производных относительно $Q_j(x, v)$, $Q_{j+4}(x, v)$:

$$\begin{aligned}
 & -f_{j1}v - \sum_{\nu=2}^4 f_{j\nu}Q_{\nu+4}(x, v) - \tilde{Q}_{j1}x - \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{j\nu}Q_{\nu}(x, v) + \\
 & + \tilde{W}_j(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v), \dots) = \\
 & = \frac{\partial Q_{j+4}}{\partial x} v + \frac{\partial Q_{j+4}}{\partial v} \left\{ -f_{11}v - \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu}Q_{\nu+4}(x, v) - \tilde{Q}_{11}x - \right. \\
 & \left. - \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu}Q_{\nu}(x, v) + \tilde{W}_1(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v)) \right\}; \quad (30a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Q_{j+4}(x, v) - \frac{\partial Q_j}{\partial x} v + \frac{\partial Q_j}{\partial v} \left\{ f_{11}v + \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu}Q_{\nu+4}(x, v) + \right. \\
 & \left. + \tilde{Q}_{11}x + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu}Q_{\nu}(x, v) - \tilde{W}_1(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v)) \right\} = 0. \quad (30b)
 \end{aligned}$$

Теперь нелинейные моды (29) введем в систему (30) и приравняем коэффициенты при $x^{j_1} v^{j_2}$ ($j_1 = 0, 1, \dots; j_2 = 0, 1, \dots$). Вначале приравняем слагаемые при x и v . В результате получим следующие алгебраические уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & a_{j,2} \left[\tilde{Q}_{11} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu} a_{4+\nu,1} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu} a_{\nu,1} \right] + a_{j+4,1} = 0; \\
 & - \sum_{\nu=2}^4 f_{j\nu} a_{4+\nu,1} - \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{j,\nu} a_{\nu,1} - \tilde{Q}_{j,1} + \\
 & + a_{4+j,2} \left(\tilde{Q}_{11} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu} a_{4+\nu,1} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu} a_{\nu,1} \right) = 0; \\
 & - a_{j,1} + a_{j+4,2} + a_{j,2} \left(f_{11} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu} a_{4+\nu,2} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu} a_{\nu,2} \right) = 0; \\
 & - \sum_{\nu=2}^4 f_{j\nu} a_{4+\nu,2} - \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{j,\nu} a_{\nu,2} - f_{j,1} - a_{4+j,1} + \\
 & + a_{4+j,2} \left(f_{11} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1\nu} a_{4+\nu,2} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1\nu} a_{\nu,2} \right) = 0, \quad j = \overline{2, 4}.
 \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Итак, получена система нелинейных алгебраических уравнений относительно $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{81}, a_{82})$. Подобная система представлена в [9].

ные этой системы могут быть определены из (28). Поэтому система (31) служит только для проверки правильности расчета.

Теперь линейную часть нелинейной нормальной формы (29) введем в функцию $\tilde{W}(q, \dot{q})$ динамической системы (22), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \tilde{W}_j(q, \dot{q}) &= \tilde{W}_j(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v), \dots) = \\ &= \gamma_{11}^{(j)} x^2 + \gamma_{12}^{(j)} xv + \gamma_{22}^{(j)} v^2, \quad j = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (32) введем в (30) и приравняем коэффициенты при x^2 , xv , v^2 . Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $(a_{23}, a_{24}, a_{25}, \dots, a_{83}, a_{84}, a_{85})$:

$$\left\{ \begin{aligned} &-a_{j,2}\gamma_{1,1}^{(1)} + a_{j,2} \left(\sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,3} + \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,3} \right) + a_{j+4,3} + \beta a_{j,5} = 0; \\ &\gamma_{11}^{(j)} - \sum_{v=2}^4 f_{j,v} a_{4+v,3} - \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{j,v} a_{v,3} - a_{j+4,2}\gamma_{11}^{(1)} + \\ &+ a_{4+j,2} \left(\sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,3} + \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,3} \right) + \beta a_{j+4,5} = 0; \\ &-a_{j,2}\gamma_{1,2}^{(1)} - 2a_{j,3} + 2\beta a_{j,4} + \alpha a_{j,5} + a_{j+4,5} + \\ &+ a_{j,2} \left(\sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,5} + \sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,5} \right) = 0; \\ &-\sum_{v=2}^4 f_{j,v} a_{4+v,5} + 2\beta a_{4+j,4} + \alpha a_{j+4,5} + \\ &+ a_{4+j,2} \left(\sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,5} + \sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,5} \right) - \\ &-2a_{4+j,3} - \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{j,v} a_{v,5} + \gamma_{12}^{(j)} - a_{j+4,2}\gamma_{12}^{(1)} = 0; \\ &-a_{j,2}\gamma_{2,2}^{(1)} + a_{4+j,4} - a_{j,5} + 2\alpha a_{j,4} + \\ &+ a_{j,2} \left(\sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,4} + \sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,4} \right) = 0, \quad j = \overline{2, 4}; \\ &-\sum_{v=2}^4 f_{j,v} a_{4+v,4} - \gamma_{22}^{(1)} a_{4+j,2} - \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,4} + \\ &+ a_{4+j,2} \left(\sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1,v} a_{v,4} + \sum_{v=2}^4 f_{1,v} a_{4+v,4} \right) + 2\alpha a_{4+j,4} - a_{4+j,5} + \gamma_{22}^{(j)} = 0, \end{aligned} \right. \quad (33)$$

где

$$\alpha = f_{11} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1,\nu} a_{\nu,2} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1,\nu} a_{4+\nu,2}; \quad \beta = \tilde{Q}_{1,1} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1,\nu} a_{\nu,1} + \sum_{\nu=2}^4 f_{1,\nu} a_{4+\nu,1}.$$

Решение системы (33) определяет квадратичные коэффициенты нелинейной нормальной формы (29). Таким образом, нелинейная нормальная форма автоколебаний определена.

Теперь исследуем движения на полученной нелинейной нормальной форме. Для этого нелинейную форму (29) введем в первое уравнение системы (22), в результате чего получим следующую динамическую систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^2 + \varepsilon x \dot{x} = 0, \quad (34)$$

где

$$\varepsilon = \sum_{\nu=2}^4 f_{1,\nu} a_{4+\nu,5} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1,\nu} a_{\nu,5} - \gamma_{12}^{(1)};$$

$$\gamma = \sum_{\nu=2}^4 f_{1,\nu} a_{4+\nu,3} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1,\nu} a_{\nu,3} - \gamma_{11}^{(1)}; \quad \delta = \sum_{\nu=2}^4 f_{1,\nu} a_{4+\nu,4} + \sum_{\nu=2}^4 \tilde{Q}_{1,\nu} a_{\nu,4} - \gamma_{22}^{(1)}.$$

Для исследования динамической системы (34) воспользуемся методом гармонического баланса. Тогда движения представим так:

$$x = A_0 + A_s^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_1) + A_c \cos(2\omega t + \varphi_2), \quad (35)$$

где A_0 , $A_s^{(1)}$, A_c , φ_1 , φ_2 , ω – неизвестные параметры.

Поскольку система (34) является автономной, она инвариантна относительно замены переменных $t = t_1 + t_0$, где t_0 – произвольное число.

Предположив, что $t_0 = -\varphi_1/\omega$, решение (35) запишем в виде

$$x = A_0 + A_s^{(1)} \sin(\omega t) + A_c^{(2)} \cos(2\omega t) + A_s^{(2)} \sin(2\omega t). \quad (36)$$

Решение (36) введем в уравнение (34) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках $\sin(\nu\omega t)$ и $\cos(\nu\omega t)$, $\nu = 0, 1, 2$. В результате получим следующую систему пяти нелинейных алгебраических уравнений относительно $(\omega, A_0, A_s^{(1)}, A_s^{(2)}, A_c^{(2)})$:

$$\begin{cases} \beta A_0 + \gamma \left(A_0^2 + \frac{A_s^{(1)2}}{2} + \frac{A_c^{(2)2}}{2} + \frac{A_s^{(2)2}}{2} \right) + \delta \omega^2 \left(\frac{A_s^{(1)2}}{2} + 2A_c^{(2)2} + 2A_s^{(2)2} \right) = 0; \\ \beta - \omega^2 + 2\gamma A_0 - \gamma A_c^{(2)} - 2\delta \omega^2 A_c^{(2)} - \frac{\varepsilon \omega}{2} A_s^{(2)} = 0; \end{cases} \quad (37a)$$

$$\begin{cases} \alpha\omega + \gamma A_s^{(2)} + 2\delta\omega^2 A_s^{(2)} + \varepsilon\omega A_0 - \frac{\varepsilon\omega}{2} A_c^{(2)} = 0; \\ (\beta - 4\omega^2) A_s^{(2)} - \alpha A_c^{(2)} 2\omega + 2\gamma A_0 A_s^{(2)} + \varepsilon\omega \left(\frac{A_s^{(1)2}}{2} - 2A_c^{(2)} A_0 \right) = 0; \\ 2\alpha\omega A_s^{(2)} + (\beta - 4\omega^2) A_c^{(2)} + \gamma(2A_0 A_c^{(2)} - 0,5 A_s^{(1)2}) + \\ + \frac{\delta\omega^2}{2} A_s^{(1)2} + 2\varepsilon\omega A_s^{(2)} A_0 = 0. \end{cases} \quad (376)$$

Теперь рассмотрим более простой способ исследования автоколебаний, описанных системой (34). Для этого воспользуемся методом гармонического баланса, и колебания представим так:

$$x = A_0 + A_s^{(1)} \sin(\omega t). \quad (38)$$

Приравняем коэффициенты при $\sin(\nu\omega t)$ и $\cos(\nu\omega t)$, $\nu = 0, 1$ и получим систему трех нелинейных алгебраических уравнений, которая имеет следующее аналитическое решение:

$$A_0 = -\frac{\alpha}{\varepsilon}; \quad \omega = \sqrt{\beta - 2\gamma \frac{\alpha}{\varepsilon}}; \quad A_s^{(1)} = \sqrt{-\frac{2(\beta A_0 + \gamma A_0^2)}{\gamma + \delta\omega^2}}. \quad (39)$$

Аналитическое решение (39) может использоваться как начальное приближение для решения системы (37) итерационным методом Ньютона.

Результаты анализа автоколебаний ротора представляются на амплитудно-частотной характеристике, расчет которой проводится следующим образом. Задается значение Ω с некоторым шагом. Для каждого значения Ω амплитуды автоколебаний ротора определяются из соотношений (39) или из решения системы нелинейных алгебраических уравнений (37).

Численный анализ автоколебаний. Рассмотрим автоколебания ротора со следующими параметрами [15]: $R = 0,057$ м; $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ Па · с; $L_B = 28,5 \cdot 10^{-3}$ м; $c = 0,2 \cdot 10^{-3}$ м; $m = 374$ кг; $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 0,648$ м; $I_p = 28,4$ кг · м²; $I_e = 14,2$ кг · м²; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $J = 8,29 \cdot 10^{-6}$ м⁴.

Собственная частота прямой прецессии ротора имеет следующее численное значение: $\Omega_{*,1} = 394$ рад/с. Угловая скорость, при которой ротор теряет устойчивость равномерного вращения, составляет $\tilde{\Omega} = 2110$ рад/с. Итак, при $\Omega < \tilde{\Omega}$ равномерное вращение ротора устойчиво, в противном случае оно неустойчиво. При $\Omega = \tilde{\Omega}$ наблюдается бифуркация Хопфа, вследствие которой рождается предельный цикл. Для исследования таких циклов используются нелинейные нормальные моды, рассмотренные выше. Линейная часть нелинейных мод определяется из (22). Отметим, что для коэффициентов линейной части нелинейной моды система (31) удовлетворяется тождественно. Для определения коэффициентов квадратичных слагаемых ряда (29)

решается система линейных алгебраических уравнений (33). Нелинейные нормальные формы (29) рассчитываются для различных значений угловой скорости вращения ротора. В качестве примера нелинейная нормальная форма при $\Omega = 980$ рад/с представлена на рис. 2.

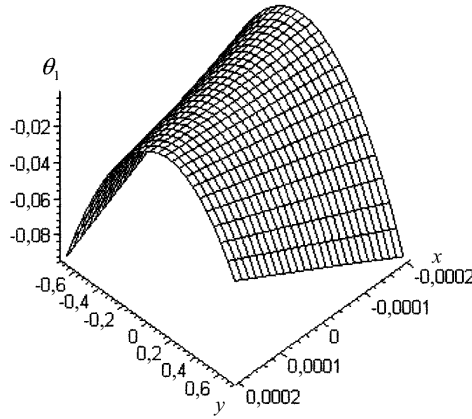


Рис. 2. Нелинейная нормальная форма в конфигурационном пространстве.

Использовались движения на нелинейных нормальных формах с помощью решений (39). Амплитудно-частотная характеристика ротора приведена на рис. 3. Там же показана зависимость первой гармоники ряда Фурье (35) $A_s^{(1)}$ от угловой скорости вращения ротора Ω . Решение $A_s^{(1)} = 0$ описывает устойчивое равномерное вращение ротора. Неустойчивые автоколебания претерпевают седло-узловую бифуркацию и преобразуются в устойчивые, которые исследуются прямым численным интегрированием системы (22). В качестве примера устойчивые автоколебания при $\Omega = 2150$ рад/с показаны на фазовой плоскости (рис. 4).

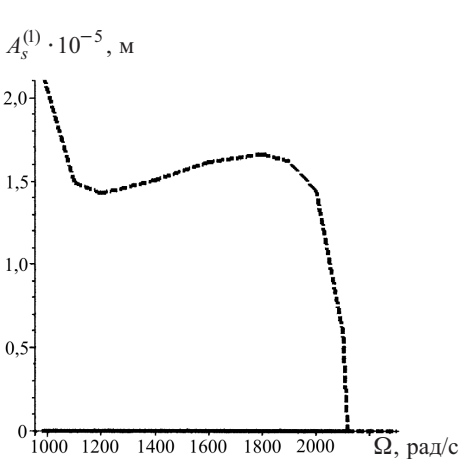


Рис. 3

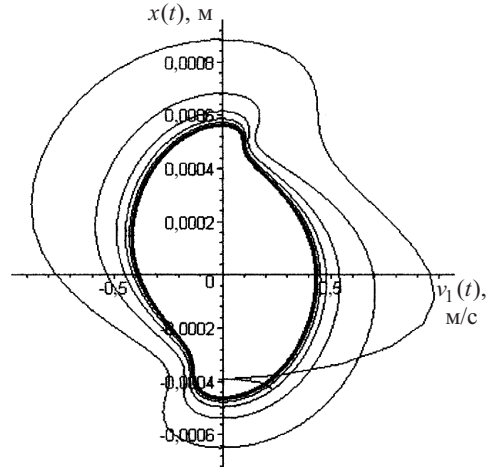


Рис. 4

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика ротора. (Сплошная линия – устойчивые колебания, штриховая – неустойчивые.)

Рис. 4. Автоколебания ротора.

Резюме

Запропоновано модель автоколивань несиметричного однодискового ротора у коротких підшипниках ковзання, яка зводиться до системи чотирьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Динамічна система описується нелінійними нормальними формами Шоу–П'єра.

1. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200 MW steam turbine generator systems // Power Industry. – 1992. – No. 12. – P. 32 – 37.
2. Legrand M., Jiang D., Pierre C., and Shaw S. W. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the invariant manifold method // Int. J. Rotating Machinery. – 2004. – No. 10. – P. 319 – 335.
3. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения // Динамика гибких роторов. – М.: Наука, 1972. – С. 22 – 29.
4. Олимпиев В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1960. – № 3. – С. 24 – 29.
5. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 386 с.
6. Каринцев И. Б., Шульженко Н. Г. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения // Динамика и прочность машин. – 1972. – Вып. 16. – С. 14 – 18.
7. Филиппов А. П., Шульженко Н. Г. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения // Машиноведение. – 1973. – № 4. – С. 21 – 28.
8. Овчарова Д. К., Голоскоков Е. Г. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения // Прикл. механика. – 1975. – № 11. – С. 95 – 99.
9. Shaw S. W. and Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. Sound Vibration. – 1993. – 164. – P. 58 – 124.
10. Avramov K. V. Analysis of forced vibrations by nonlinear modes // Nonlinear Dynamics. – 2008. – 53. – P. 117 – 127.
11. Аврамов К. В., Пьер К., Ширяева Н. В. Нелинейные нормальные формы колебаний системы с гироскопическими силами // Доп. НАН України. – 2006. – № 11. – С. 7 – 11.
12. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. О гашении свободных упругих колебаний в линейных системах // Прикл. механика. – 2005. – № 2. – С. 12 – 21.
13. Avramov K. V., Pierre C., and Shyriaieva N. V. Non-linear equations of flexural-flexural-torsional oscillations of rotating beams with arbitrary cross section // Там же. – 2008. – № 5. – С. 123 – 132.
14. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 670 с.
15. Ping J. J., Guang M., and Song Yi. S. On the nonlinear dynamic behavior of a rotor-bearing system // J. Sound Vibration. – 2004. – 274. – P. 1031 – 1044.

Поступила 17. 11. 2008