

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

Усталость металлов при неоднородном напряженном состоянии. Сообщение 2. Методы анализа результатов исследования

В. Т. Трощенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Проанализированы современные методы, используемые для объяснения различия между характеристиками сопротивления усталостному разрушению металлов и сплавов в условиях однородного и неоднородного напряженных состояний. Рассматриваются эмпирические методы, методы, основанные на учете различия между номинальными и действительными циклическими напряжениями, методы, базирующиеся на представлениях статистических теорий прочности, а также методы, предполагающие, что ответственными за усталостное разрушение являются напряжения, осредненные в поверхностном слое. Приведено сравнение расчетных результатов с экспериментальными.

Ключевые слова: номинальные и действительные напряжения, статистические теории прочности, критическое расстояние, механика разрушения.

Введение. В работе [1] были рассмотрены методы оценки напряженного состояния и результаты исследования характеристик сопротивления усталости неоднородно напряженных конструктивных элементов.

Методы учета влияния неоднородного напряженного состояния на характеристики сопротивления усталостному разрушению металлов и сплавов можно разделить на эмпирические методы, когда учет влияния градиента напряжений осуществляется путем простого аналитического описания наблюдаемых закономерностей или введением в известные формулы предельного состояния материалов градиента напряжений, и методы, когда влияние градиента напряжений следует из общих подходов к описанию закономерностей усталостного разрушения. Эти методы основываются на учете различия между номинальными и действительными напряжениями, неоднородности свойств материала с использованием статистических теорий прочности и осредненных напряжений в поверхностном слое.

Эмпирические методы. Приведем некоторые примеры такого подхода.

В работе [2] предложено учитывать влияние градиента напряжений на сопротивление усталости в условиях сложного напряженного состояния путем модификации формулы Финдли, которая имеет вид [3]

$$\tau_a + a\sigma_{\max} \leq \gamma, \quad (1)$$

где τ_a – амплитуда касательных напряжений; σ_{\max} – максимальные нормальные напряжения в критической плоскости; a и γ – параметры.

С учетом градиента напряжений получим

$$\tau_a + a\sigma_{\max} - \beta\sqrt{\eta\langle\sigma_{\max}\rangle} \leq \gamma, \quad (2)$$

где β – параметр; $\eta\langle\sigma_{\max}\rangle$ – градиент напряжений, определяемый по формуле

$$\eta\langle\sigma_{\max}\rangle = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_{\max}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{\max}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{\max}}{\partial z}\right)^2}.$$

В работе [2] описана методика определения параметров β , α , γ и обоснована эффективность предложенного подхода.

В [4] предлагается следующее уравнение для описания условий подобия усталостного разрушения с учетом размеров образцов и концентрации напряжений:

$$\lg(\xi - 1) = \beta \left(\lg \frac{L}{\bar{\eta}} - 1,946 \right) + U_p S; \quad (3)$$

$$\xi = \frac{(\sigma_R)_{\text{ном}} K_t}{0,5\bar{\sigma}_R},$$

где $(\sigma_R)_{\text{ном}}$ – номинальные напряжения в конструктивном элементе с концентратором напряжений, соответствующие числу циклов до разрушения N при вероятности разрушения P ; $\bar{\sigma}_R$ – средняя величина усталостной прочности лабораторных образцов диаметром 7,5 мм без концентрации напряжений; K_t – теоретический коэффициент концентрации напряжений; U_p – квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности P ; $\bar{\eta}$ – относительный градиент напряжений; L – периметр поперечного сечения с максимальными напряжениями. Была показана возможность описания с использованием уравнения (3) результатов исследования усталости образцов различных размеров с концентраторами напряжений.

Различие между номинальными и действительными напряжениями.

В ряде работ, среди которых одной из первых была работа И. А. Одингга [5], предполагается, что различие между пределами выносливости материалов в условиях однородного и неоднородного напряженных состояний обусловлено тем, что номинальные напряжения отличаются от действительных, определение которых приведено ранее [1]. Из этих работ следует, что если сравнивать пределы выносливости материалов при однородном напряженном состоянии с действительными напряжениями, т.е. напряжениями, подсчитанными с учетом неупругости, соответствующими пределам выносливости в условиях неоднородного напряженного состояния, то никакого различия между пределами выносливости не будет.

Это утверждение получило некоторые экспериментальные подтверждения прежде всего при анализе характеристик сопротивления усталости при малоцикловом нагружении [6, 7 и др.].

О соотношении действительных диаграмм деформирования, за которые в данном случае принимаются циклические диаграммы деформирования при осевом нагружении, и диаграмм деформирования, построенных с использованием номинальных напряжений при изгибе (кручении), а также соответствующих им кривых усталости можно судить из схемы, приведенной на рис. 1, где 1 – циклическая диаграмма деформирования при осевом нагружении в координатах $\sigma_a - \varepsilon_a$; 2 – диаграмма деформирования в координатах $(\sigma_a)_{\text{ном}} - \varepsilon_a$, рассчитанная с использованием диаграммы деформирования при осевом нагружении; 3 – кривая усталости при растяжении в координатах $\sigma_a - N$; 4 – кривая усталости при изгибе в координатах $(\sigma_a)_{\text{ном}} - N$.

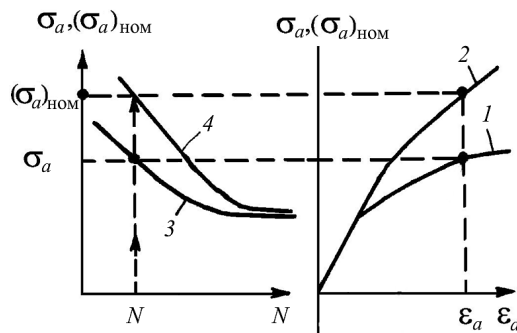


Рис. 1. Схема построения диаграмм деформирования и кривых усталости при изгибе.

Методики построения диаграмм деформирования в координатах $(\sigma_a)_{\text{ном}} - \varepsilon_a$ в предположении линейного участка упрочнения на диаграмме осевого нагружения были рассмотрены в работах [8–11].

Использование линейной аппроксимации для диаграммы циклического деформирования обосновано, если диапазон неупругих деформаций невелик, как это имеет место для многоциклового усталости.

Приняв диаграмму деформирования с линейным упрочнением в виде

$$\begin{aligned} \sigma_a &= E\varepsilon_a \quad \text{при} \quad \varepsilon_a \leq \varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}}; \\ \sigma_a &= E_T^{\text{II}}\varepsilon_a + (E - E_T^{\text{II}})\varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}} \quad \text{при} \quad \varepsilon_a \geq \varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}}, \end{aligned}$$

где E – модуль упругости, $E = \text{tg } \alpha$; E_T^{II} – модуль упрочнения, $E_T^{\text{II}} = \text{tg } \alpha_1$; $\varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}}$ – деформация, соответствующая пределу пропорциональности, получим выражения [11] для номинальных напряжений при поперечном изгибе образцов прямоугольного и круглого поперечного сечения соответственно:

$$(\sigma_a)_{\text{ном}} = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{1}{\varepsilon_a^2} \left[E_T^{\text{II}} \varepsilon_a^2 + (E - E_T^{\text{II}})(3\varepsilon_a^2 - \varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}2}) \frac{\varepsilon_{\text{п.ц}}^{\text{II}}}{2} \right]; \quad (4)$$

$$(\sigma_a)_{\text{ном}} = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{16}{\pi \varepsilon_a^3} [EI_1 + E_T^{\text{и}} I_2 + \varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}} (E - E_T^{\text{и}}) I_3]; \quad (5)$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_a^2}{8} \left(\varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}} \sqrt{\varepsilon_a^2 - \varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}2}} + \varepsilon_a^2 \arccos \frac{\varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}}}{\varepsilon_a} \right) - \frac{\varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}}}{4} \sqrt{(\varepsilon_a^2 - \varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}2})^3};$$

$$I_2 = \frac{\pi \varepsilon_a^4}{16} - I_1; \quad I_3 = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_a^2 - \varepsilon_{\text{п.п}}^{\text{и}2})^3}$$

($M_{\text{и}}$ – изгибающий момент; W – момент сопротивления сечения).

Анализ изменения отношения $\Delta\sigma = ((\sigma_{-1})_{\text{и}} - \sigma_{-1}) / \sigma_{-1}$, где $(\sigma_{-1})_{\text{и}}$ – рассчитанные номинальные напряжения при изгибе, соответствующие числу циклов до разрушения N в соответствии со схемой на рис. 1; σ_{-1} – пределы выносливости при этом же числе циклов до разрушения при осевом нагружении в зависимости от числа циклов до разрушения, для различных сплавов выполнен в работе [12].

Приведенные на рис. 2–6 результаты этого анализа показывают, что при $N = 10^6 \dots 10^7$ цикл только для аустенитных сталей (рис. 3) различие между номинальными и действительными напряжениями достигает 8...10%. Для всех остальных исследованных материалов это расхождение составляет 1...2%. Из этого следует, что различие между пределами выносливости при изгибе и растяжении (в [1] рис. 8) нельзя объяснить отличием действительных напряжений от номинальных.

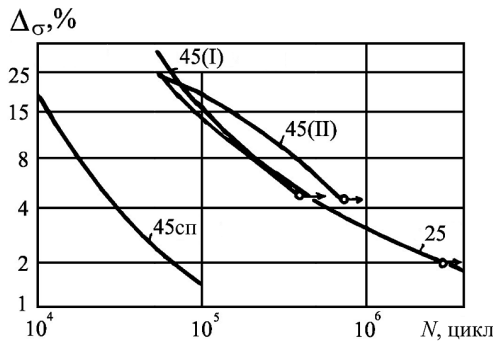


Рис. 2. Зависимость $\Delta\sigma - N$ для углеродистых сталей.

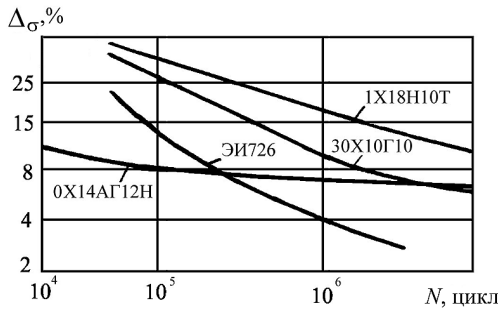


Рис. 3. Зависимость $\Delta\sigma - N$ для аустенитных сталей.

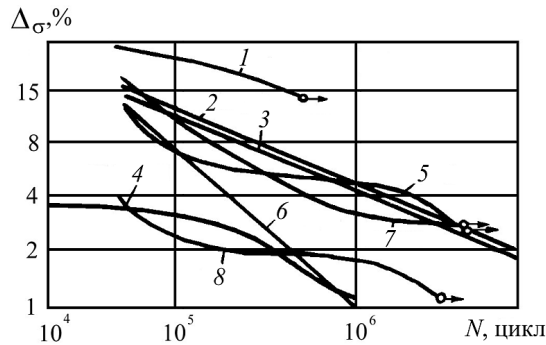


Рис. 4. Зависимость $\Delta\sigma - N$ для легированных сталей: 1 – 15Г2АФДпс; 2 – 40Х(II); 3 – 1Х13(II); 4 – 1Х17Н2Ш; 5 – 20Х; 6 – 1Х13(I); 7 – 12ХН3; 8 – 40Х(I).

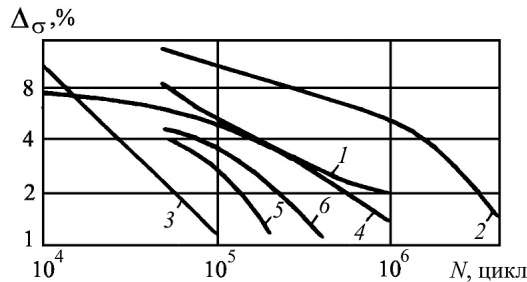


Рис. 5. Зависимость $\Delta\sigma - N$ для жаропрочных сталей и сплавов: 1 – сталь ЭИ612, $T = 293$ К; 2 – сталь ЭИ612, $T = 873$ К; 3 – сплав ЭИ437 Б, $T = 293$ К; 4 – сплав ЭИ437 Б, $T = 973$ К; 5 – сталь ЭИ826, $T = 293$ К; 6 – сплав ЭИ826, $T = 1153$ К.

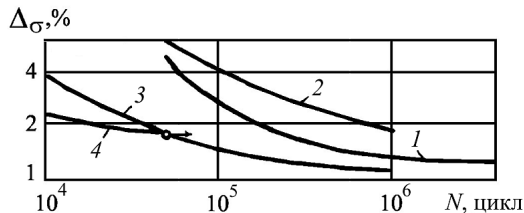


Рис. 6. Зависимость $\Delta\sigma - N$ для легких сплавов и чугуна: 1 – сплав Д20, $T = 293$ К; 2 – сплав Д20, $T = 77$ К; 3 – сплав Д16Т; 4 – чугун С421-40.

Аналогичные результаты получены в работе [10], где рассматривалось различие между действительными и номинальными напряжениями при изгибе в диапазоне $N = 10 \dots 10^6$ цикл для материалов с разной твердостью HV при использовании нелинейной аппроксимации диаграммы циклического деформирования при осевом нагружении. Из этих результатов (рис. 7) следует, что при $N = 10^6$ цикл расхождение между номинальными и действительными напряжениями незначительно.

Различие между действительными и номинальными напряжениями в образцах с концентраторами напряжений исследовалось в работах [13–16 и др.].

В работе [16] проводилось сравнение пределов выносливости на базе 10^7 цикл при симметричном растяжении гладких образцов и плоских образцов с круговым отверстием ($K_t = 2,3$) из малоуглеродистых, среднеуглеродистых, легированных и аустенитных сталей, алюминиевых сплавов и чугунов.

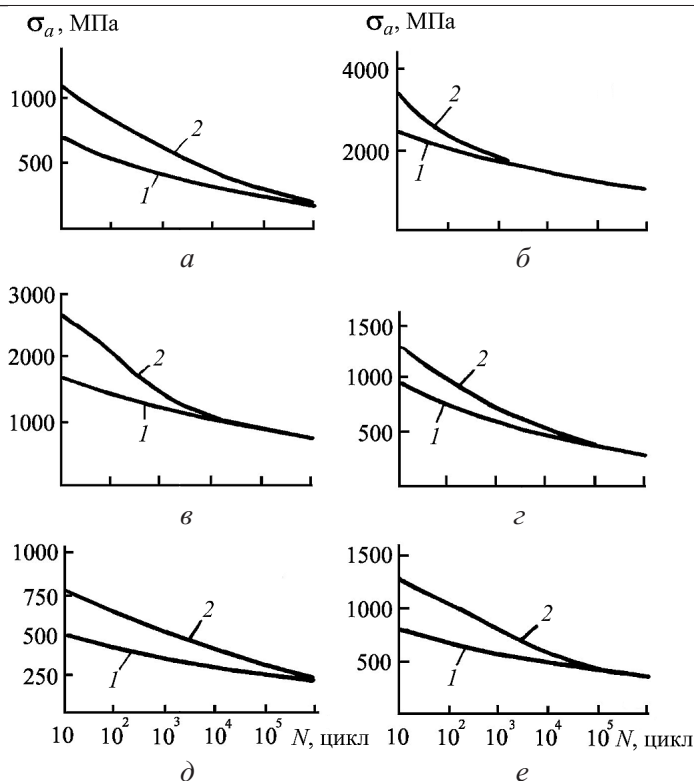


Рис. 7. Кривые усталости при растяжении (1) и изгибе (2), рассчитанные с учетом неупругости, для материалов с различной твердостью: а – $HB = 150$ МПа; б – $HB = 660$ МПа; в – $HB = 460$ МПа; г – $HB = 496$ МПа; д – $HB = 150$ МПа; е – $HB = 298$ МПа.

Также с использованием диаграмм циклического деформирования при осевом нагружении рассчитывались максимальные напряжения в концентраторе напряжений. По результатам исследования определялись эффективный коэффициент концентрации напряжений K_f и неупругий эффективный коэффициент концентрации напряжений K'_f :

$$K'_f = \frac{\sigma_{\max}^H}{(\sigma_{-1})_{\text{ном}}}, \tag{6}$$

где σ_{\max}^H – максимальные напряжения в концентраторе, рассчитанные с учетом неупругости; $(\sigma_{-1})_{\text{ном}}$ – номинальные напряжения в сечении концентратора.

Данные исследования различных материалов приведены на рис. 8 в координатах $K_f - K'_f$, где указаны точки, соответствующие базам испытания 10^7 , 10^6 и 10^5 цикл. Видно, что, несмотря на существенное рассеяние результатов испытания, величины $K'_f > K_f$.

С учетом структуры зависимостей для K_f и K'_f можно утверждать, что действительные напряжения в вершине концентратора напряжений, отвечающие пределу выносливости при соответствующих базах, в большинстве случаев больше, чем пределы выносливости гладких образцов.

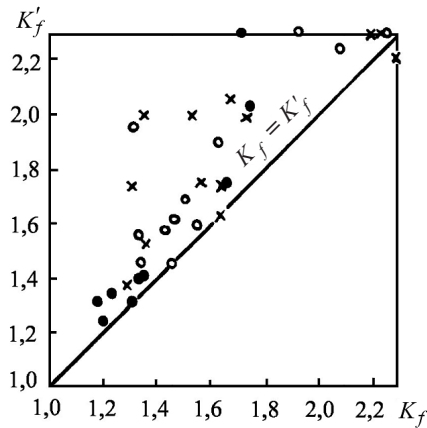


Рис. 8. Сравнение K_f с K'_f для различных металлов и сплавов: \times – $N = 10^7$ цикл; \circ – $N = 10^6$ цикл; \bullet – $N = 10^5$ цикл.

В работах [13, 14] выполнено сравнение номинальных напряжений, соответствующих пределам выносливости при различных базах испытания образцов с концентраторами напряжений при изгибе, полученных экспериментально $(\sigma_{-1})_{\text{НОМ}}$ и рассчитанных с использованием диаграмм циклического деформирования при растяжении $(\sigma_{-1})_{\text{НОМ}}^p$.

Расчет проводился в предположении, что при разрушении величины амплитуд деформаций в направлении действия максимального нормального напряжения на поверхности наиболее напряженных участков образцов при осевом нагружении и изгибе с концентратором напряжений равны:

$$\varepsilon_N \approx \left| \varepsilon_{\text{и max}} \right|_N,$$

где ε_N – деформация на базе N циклов при одноосном напряженном состоянии; $\left| \varepsilon_{\text{и max}} \right|_N$ – максимальная деформация в вершине концентратора на базе N циклов.

Исследовались гладкие цилиндрические образцы при симметричном растяжении и цилиндрические образцы с круговой выточкой при круговом изгибе с различными концентраторами напряжений, изготовленные из легированных сталей 40Х(П), 1Х17Н2Ш, ЭИ612, алюминиевого сплава Д16Т, никелевых сплавов ЭИ437Б, ЭИ826 после механической и электролитической обработок.

В соответствии с полученными результатами рассчитывались величины δ_1 , δ_2 и δ_3 (табл. 1):

$$\delta_1 = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{НОМ}} K_t - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}; \quad (7)$$

$$\delta_2 = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{НОМ}}^p K_t - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}; \quad (8)$$

Численные значения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$

Материал	Вид полировки поверхности образца	T, К	N, цикл	$K_t = 1,3$			$K_t = 2,7$		
				δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Сталь 40X(II)	Механическая	293	10^5	0,50	0,23	0,27	0,92	0,33	0,59
			10^6	0,25	0,10	0,15	0,40	0,12	0,28
			10^7	0,23	0,07	0,16	0,23	0,12	0,11
	Электролитическая	293	10^5	0,42	0,21	0,21	0,91	0,25	0,66
			10^6	0,27	0,10	0,17	0,27	0,10	0,17
			10^7	0,36	0,07	0,29	0,32	0,13	0,19
Сталь 1X17H2Ш	Механическая	293	10^5	0,68	0,08	0,60	0,67	0,21	0,46
			10^6	0,33	0,07	0,24	0,17	0,09	0,08
			10^7	0,19	0,60	0,11	0,18	0,10	0,08
Сталь ЭИ612	»	293	10^5	–	–	–	1,35	0,25	1,10
			10^6	–	–	–	0,67	0,14	0,53
			10^7	–	–	–	0,55	0,10	0,45
	»	873	10^5	–	–	–	1,35	0,27	1,08
			10^6	–	–	–	0,42	0,20	0,22
			10^7	–	–	–	0,57	0,10	0,47
Сплав Д16Т	»	293	10^5	1,14	0,10	1,04	1,40	0,28	1,12
			10^6	0,81	0,08	0,73	1,00	0,12	0,88
			10^7	0,56	0,07	0,49	0,91	0,12	0,79
Сплав ЭИ437Б	Электролитическая	943	10^5	0,71	0,21	0,50	0,97	0,33	0,64
			10^6	0,53	0,14	0,39	0,93	0,27	0,70
			10^7	0,34	0,10	0,24	0,88	0,12	0,76
Сплав ЭИ826	Механическая	293	10^5	–	–	–	1,13	0,18	0,95
			10^6	–	–	–	1,37	0,12	1,25
			10^7	–	–	–	1,15	0,12	1,13

$$\delta_3 = \frac{(\sigma_{-1})_{\text{НОМ}} K_t - (\sigma_{-1})_{\text{НОМ}}^p K_t}{\sigma_{-1}}, \quad (9)$$

где δ_1 характеризует относительную разницу между экспериментально найденными пределами выносливости (номинальные напряжения) образцов с концентраторами при соответствующем числе циклов нагружения до разрушения и пределами выносливости гладких образцов при симметричном

растяжении при том же числе циклов до разрушения, δ_2 – относительную разницу, которая обусловлена наличием неупругих деформаций, δ_3 – относительную разницу, связанную с влиянием других факторов, в первую очередь градиента напряжений.

Результаты, приведенные в табл. 1, показывают, что роль неупругих деформаций уменьшается с увеличением числа циклов до разрушения, и при $N = 10^7$ цикл неупругие деформации несущественно влияют на расхождение между пределами выносливости гладких образцов при осевом нагружении и образцов с концентраторами напряжений.

Соотношение напряжений (деформаций) в гладких образцах при осевом нагружении и действительных максимальных напряжений (деформаций) в неоднородно напряженных образцах, в том числе в концентраторах, соответствующих одному и тому же числу циклов до разрушения (зарождения усталостной трещины), анализировалось в работах [1, 17–21 и др.]. Полученные при этом результаты не позволяют сделать вывод о равенстве напряжений (деформаций) при осевом нагружении и действительных напряжений (деформаций) при неоднородном напряженном состоянии при одном и том же числе циклов до разрушения.

Вероятностные (статистические) методы. Вероятностный подход к оценке характеристик сопротивления усталости дает возможность учитывать неоднородность свойств локальных объемов материала и рассматривается в литературе прежде всего как подход, позволяющий учитывать объем образца или конструктивного элемента и характер распределения напряжения по объему (или сечению) образца.

В литературных источниках наиболее широко представлены статистические теории прочности, основанные на концепции “слабого звена”, которая предполагает, что разрушение материала происходит аналогично разрушению цепи, когда ее прочность определяется прочностью наиболее слабого звена.

Математической основой этих теорий является статистика экстремальных (минимальных) значений [22–24 и др.].

Основополагающей теорией в соответствии с этой концепцией является теория Вейбулла [25, 26]. В большинстве работ, как правило, используются предложенные Вейбуллом формальные построения, наполненные характеристиками прочности с конкретным физическим смыслом.

Вейбуллом было предложено следующее выражение для распределения характеристик прочности [26]:

$$\Omega(\sigma) = 1 - e^{-B}, \quad (10)$$

где B – риск разрушения, $B = \int_V n(\sigma) d\sigma$.

Риск разрушения предложено записывать в виде

$$B = \frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (11)$$

или

$$B = \frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_0} \right)^m dV, \quad (12)$$

где σ_1 – минимально возможное значение прочности; m , σ_0 , V_0 – параметры материала. Обычно величина V_0 , как не имеющая самостоятельного значения, считается составной частью параметра σ_0 .

Из всех параметров, входящих в зависимости (11) и (12), наиболее важным является коэффициент однородности материала m . С уменьшением m более существенно проявляются закономерности, следующие из концепции “слабого звена”. Величина m может быть найдена путем обработки данных испытания образцов разных размеров или путем анализа рассеяния результатов [27].

Неоднородность напряженного состояния учитывается при интегрировании по объему зависимостей (11) и (12).

В табл. 2 приведены распределения характеристик прочности, в том числе характеристик сопротивления усталости, в соответствии с концепцией “слабого звена”.

В работе [28] выполнен анализ величины $H_m = \frac{1}{V\sigma_{\max}^m} \int_V (\sigma_i)^m dV$, вхо-

дящей в зависимость (15) и характеризующей неоднородность напряженного состояния в соответствии с теорией Вейбулла (табл. 2).

На рис. 9 приведена зависимость H_m от коэффициента однородности материала m для разных видов нагружения. Видно, что при малых значениях m различие в величине H_m наиболее существенное.

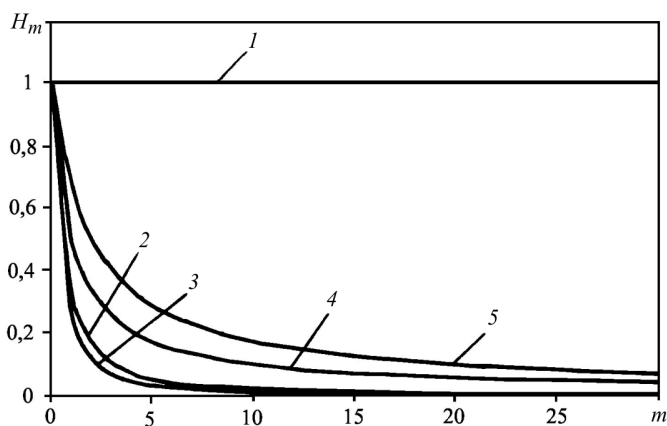


Рис. 9. Изменение величины H_m в зависимости от коэффициента однородности материала m : 1 – растяжение; 2 – трехточечный круговой изгиб; 3 – трехточечный плоский изгиб; 4 – четырехточечный плоский изгиб; 5 – четырехточечный круговой изгиб.

Основным недостатком теории Вейбулла при описании закономерностей усталостного разрушения металлов и сплавов является то, что она предполагает зависимость пределов выносливости при растяжении от объема образцов, хотя, как показывают экспериментальные данные, эта зависимость несущественна.

Т а б л и ц а 2
Распределение характеристик прочности в соответствии с концепцией “слабого звена”

Распределение	Величины, входящие в распределение	Автор
1	2	3
$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right]. \quad (13)$	Двухпараметрическое распределение Вейбулла, V – объем образца; m и σ_0 – постоянные материала	В. Вейбулл [25, 26]
$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0 M} \right)^m \right]. \quad (14)$	<p>Модификация зависимости (13),</p> $\bar{\sigma} = L \frac{I_m \sigma_0}{V^{1/m}}; \quad I_m = \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) - \gamma\text{-функции};$ <p>M и L – параметры, учитывающие неоднородное напряженное состояние.</p> <p>При растяжении имеем $M = 1$ и $L = 1$, при чистом изгибе образца прямоугольного сечения –</p> $M = \left[\frac{V}{2m+2} \right]^{-1/m}, \quad L = (2m+2)^{-1/m},$ <p>при одногочечном изгибе балки прямоугольного поперечного сечения –</p> $M = \left[\frac{V}{2(m+1)^2} \right]^{-1/m}, \quad L = 2^{1/m} (m+1)^{2/m},$ <p>при кручении круглого стержня –</p> $M = \left[\frac{2V}{m+2} \right]^{-1/m}, \quad L = \left[\frac{m+2}{2} \right]^{1/m}.$	В. Вейбулл [25-27]

1	2	3
$P(\sigma) = 1 - \exp \left[-V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m H_m \right]. \quad (15)$	<p>Модификация зависимости (13), H_m – параметр, учитывающий неоднородность напряженного состояния. При растяжении имеем $H_m = 1$, при чистом изгибе образца квадратного поперечного сечения – $H_m = \frac{1}{m+1}$, при чистом круговом изгибе образца круглого сечения – $H_m = \frac{2}{m+2}$, при трехточечном плоском изгибе образца квадратного сечения – $H_m = \frac{1}{(m+1)^2}$, при трехточечном круговом изгибе образца круглого поперечного сечения – $H_m = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$. При определении параметра H_m учитывались только объемы, подвергающиеся растяжению.</p>	<p>П. Фласселье, Ф. Морел [28]</p>
$P(\sigma) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_0} \right)^m dV \right] & \text{при } \sigma > \sigma_1; \\ 0 & \text{при } \sigma < \sigma_1. \end{cases} \quad (16)$	<p>Трехпараметрическое распределение Вейбулла, σ_1 – постоянная.</p>	<p>В. Вейбулл [26]</p>
$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_0 M} \right)^m \right]. \quad (17)$	<p>Модификации зависимости (16), $\bar{\sigma} = \sigma_1 + L \frac{I_m \sigma_0}{V^{1/m}}$.</p>	<p>В. Вейбулл [25-27]</p>
$P(\sigma_{\max}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_1}{B/(d/\eta)^\beta} \right)^m \right]. \quad (18)$	<p>Распределение пределов выносливости (максимальные напряжения), σ_{\max} – максимальное напряжение; σ_1 – минимально возможное значение предела выносливости; η – относительный градиент напряжений; d – диаметр образца; B, m, β – экспериментально определяемые параметры; $\bar{\sigma}_{\max} = \sigma_1 + B(\eta/d)^\beta (-\ln 0,5)^{1/m}$.</p>	<p>С. В. Серенсен, В. П. Когаев [29, 30]</p>

Продолжение табл. 2

1	2	3
$P(\sigma_{-1}) = 1 - \exp \left[\frac{V}{\sigma_0^m} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p}{3} \right)^m \sigma_{-1}^m \right]. \quad (19)$	<p>Распределение пределов выносливости σ_{-1} при осевом нагружении с учетом объема образца; p – коэффициент, учитывающий чувствительность к гидростатическому напряжению.</p>	<p>Л. Флаसेлье, Ф. Морел [28]</p>
$P(\sigma_{-1}) = 1 - \exp \left[-\frac{S}{\sigma_0^m} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p}{3} \right)^m \sigma_{-1}^m \right]. \quad (20)$	<p>Распределение пределов выносливости при осевом нагружении с учетом поверхности образца S.</p>	<p>То же</p>
$P(\sigma) = 1 - \exp \left[\frac{1}{V_0 V} \int \left(\frac{W - W^*}{W_n} \right)^m dV \right]. \quad (21)$	<p>Распределение энергий зарождения усталостных трещин в соответствии с критериями, развитыми в работах [34, 43], W – удельная работа деформации за период нагружения; W^* – безопасная энергия деформации; W_n – параметр.</p>	<p>Т. Делахей, Т. Палин-Лука [31]</p>
$P(\sigma_{\max}) = 1 - \exp \left[\frac{1}{A_0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right)^m \left(\sum_{i=1}^m \theta_i^m A_i \right) \right]. \quad (22)$	<p>Распределение пределов выносливости надрезанных образцов σ_{\max}. Предполагается, чем больше в зоне концентратора высоконапряженных элементов, тем больше вероятность разрушения, σ_{\max} – напряжения в вершине концентратора; $\theta = \sigma_i / \sigma_{\max}$; A_i – локальная площадь поверхности i-й группы элементов при напряжении σ_i; A_0 – общая площадь модели; m и σ_0 – параметры Вейбулла.</p>	<p>Д. Ланнинг, Т. Николае, А. Папазотто [32]</p>
$P(N) = \begin{cases} 1 - \exp \left[-\int_V \left(\frac{N - N_0}{N_c} \right)^m dF \right] & \text{при } N > N_0; \\ 0 & \text{при } N < N_0. \end{cases} \quad (23)$	<p>Распределение числа циклов до разрушения при напряжении σ_a, N_0 – минимально возможное число циклов до разрушения, $N_0 = \frac{C - \sigma}{K}$ (C и K – постоянные); $N_c = \frac{A}{(\sigma_{\max} - \sigma_1)^r}$ (σ_{\max} – максимальное напряжение цикла, A, r – постоянные, σ_1 – минимальная величина предела выносливости); F – площадь сечения.</p>	<p>В. П. Кобаев [33]</p>

Примечание. Значения напряжений с черточками соответствуют средним значениям этих напряжений.

В литературных источниках предложены модификации формулы Вейбулла, позволяющие учитывать вышеизложенное [30, 33].

Так, Серенсен и Когаев, используя формализм теории Вейбулла, предложили распределение пределов выносливости (максимальные напряжения) с учетом градиента напряжений по сечению и диаметра образцов в виде (18), соответствующем экспериментальным данным.

В последнее время большое внимание уделяется развитию вероятностных критериев усталостного разрушения с учетом многоосности напряженного состояния и с использованием критериев усталостного разрушения, которые базируются на концепции критической плоскости. Под этой плоскостью обычно понимается плоскость с максимальными касательными напряжениями при циклическом нагружении [28, 31, 34]. Часто формулирование подобных критериев сопровождается сложными обоснованиями и выкладками, что затрудняет упрощенное табличное представление результатов. Некоторые примеры таких распределений приведены в табл. 2.

Так, вероятностная модель усталостного разрушения (21) [31] построена в предположении взаимосвязи между распределением напряжений и энергией деформации и имеет преимущества, вытекающие из модели Вейбулла, учитывающей объем образца и неоднородность распределения напряжений по объему, а также энергетических критериев, учитывающих многоосность нагружения. Модель проверялась по результатам исследований металлических материалов при растяжении–сжатии, плоском и круговом изгибе и кручении.

Сопоставление расчетных результатов исследования стали 30NiCrMo16 с экспериментальными иллюстрирует рис. 10. Видно, что полученные данные удовлетворительно совпадают.

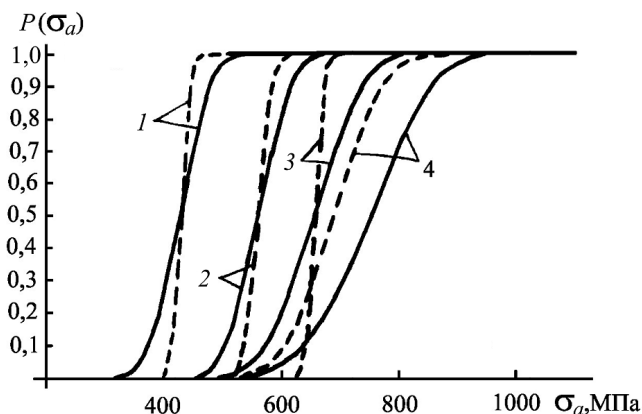


Рис. 10. Вероятность усталостного разрушения при различных амплитудах напряжений для гладких образцов из стали 30NiCrMo16: 1 – кручение; 2 – растяжение; 3 – круговой изгиб; 4 – плоский изгиб. (Сплошные линии – расчет, штриховые – эксперимент.)

Модификации теории Вейбулла и их практические приложения рассматриваются в работах [33, 35–40 и др.]. В некоторых работах [27, 41] построение статистических теорий базируется на статистике максимальных значений.

Из других теорий отметим статистическую теорию усталости Афанасьева [42]. За критерий разрушения принимается наличие трещин, возникших в

процессе циклического нагружения в ν соседних зернах из суммарного числа зерен ν_c :

$$P \frac{\nu_c}{\nu} \geq 1, \quad (24)$$

где P – вероятность нахождения рядом ν зерен из ν_p зерен, в которых напряжения превышают предел текучести; ν_c/ν – количество агрегатов по ν зерен в образце.

Учет напряженного объема при формулировании критериев предельного состояния при усталости кроме использования вероятностных методов проводится на основе анализа эквивалентных напряжений в неоднородно напряженном объеме, в котором напряжения превышают некоторую величину [43–45].

Осреднение напряжений в поверхностном слое (теории критических расстояний). Во многих работах предполагается, что ответственными за усталостное разрушение являются не максимальные напряжения на поверхности образца (концентратора), а напряжения на некотором расстоянии от поверхности или напряжения, осредненные в поверхностном слое определенной глубины [46–50 и др.].

Основополагающими в этом направлении есть работы Петерсона [46, 51], Нейбера [46, 47] и Хэйвуда [46, 48], которые основываются соответственно на предположениях, что ответственными за усталостное разрушение являются напряжения на некотором критическом расстоянии от поверхности или напряжения, осредненные по некоторому критическому объему в поверхностном слое.

В этих работах были получены соответственно следующие зависимости, связывающие теоретические и эффективные коэффициенты концентрации напряжений:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{1 + c_P/\rho}; \quad (25)$$

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{c_N/\rho}}; \quad (26)$$

$$\frac{K_f}{K_t} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{c_H/\rho}}, \quad (27)$$

где ρ – радиус надреза; c_P , c_N , c_H – постоянные материала, имеющие размерность длины.

Некоторые модификации этих зависимостей приведены в табл. 2 в работе [1].

В последнее время большое внимание уделяется разработке зависимостей, определяющих величину K_f , на основе подходов Петерсона, Нейбера и Хэйвуда с использованием критериев линейной механики разрушения [52–57 и др.].

Рассмотрим примеры таких подходов.

В соответствии с критериями линейной механики разрушения величина коэффициента интенсивности напряжений K_I будет

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}, \quad (28)$$

где σ – напряжение; l – размер трещины.

Если предположить в соответствии с работой [58], что $K_I = \Delta K_{th}$, $\sigma = \Delta\sigma_R$, $l = a_0$, из зависимости (28) следует

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_R} \right)^2, \quad (29)$$

где a_0 – величина трещины (надреза), соответствующая пределу выносливости; ΔK_{th} – размах порогового коэффициента интенсивности напряжений.

В ряде работ при анализе характеристик сопротивления усталости материалов с учетом концентрации напряжений используется зависимость (28) в виде [56]

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(a + a_0)}, \quad (30)$$

где a – глубина надреза.

У некоторых авторов есть сомнения относительно возможности использования выражения (30) для надразов, не являющихся трещинами [59].

В работе [58] в предположении, что теоретический коэффициент концентрации напряжений для острых концентраторов можно представить в виде [60]

$$K_t = 1 + 2\sqrt{a/\rho} \quad (31)$$

и что величина c_P в формуле (25) равна a_0 , показано, что формула Петерсона может быть записана следующим образом (табл. 2 в работе [1]):

$$K_f = \frac{K_t - 1}{1 + \frac{(K_t - 1)^2}{4a/a_0}}. \quad (32)$$

Аналогично показано [53], что формула Нейбера (26) имеет такой вид (табл. 2 в работе [1]):

$$K_f = \frac{K_t - 1}{1 + \frac{K_t - 1}{\sqrt{a/a_0}}}. \quad (33)$$

В работе [59] принималось, что ответственными за усталостное разрушение являются нормальные напряжения $\Delta\sigma_{eff}$, осредненные по глубине слоя d в вершине концентратора:

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{d} \int_0^d \Delta\sigma(\theta) dx. \quad (34)$$

При дальнейших выкладках предполагалось, что $d = 2a_0$, аппроксимация напряжений в зоне надреза принималась в виде [57]

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{max}}{2} \left(\frac{\rho}{2x + \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{2x + \rho} + 1 \right), \quad (35)$$

где $\Delta\sigma_{max}$ – упругие напряжения в вершине концентратора.

С учетом (35) зависимость (34) будет иметь вид

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{\Delta\sigma_{max}}{\sqrt{1 + 4a_0/\rho}}. \quad (36)$$

Предположив, что $\Delta\sigma_{eff}$, как это следует из теорий критического расстояния, которые будут рассмотрены ниже, равна пределу выносливости гладкого образца, и разделив обе части зависимости (36) на номинальные напряжения $\sigma_{ном}$, получим следующее выражение (табл. 2 в [1]):

$$K_f = \frac{K_t}{\sqrt{1 + 4a_0/\rho}}. \quad (37)$$

Зависимости, полученные на основании критериев линейной механики разрушения, требуют в каждом конкретном случае обоснования возможности их использования применительно к концентраторам конечных размеров [53, 59].

Сравнение эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_f^p , рассчитанных по формулам (32), (33) и (37), с экспериментально найденными величинами K_f по результатам анализа 64 кривых усталости для различных металлов и сплавов, испытанных с разными концентраторами напряжений, приведено на рис. 11 и 12 [53], где по оси ординат отложено отношение

$$e (\%) = \frac{K_f^p - K_f}{K_f} \cdot 100\%, \text{ по оси абсцисс – соответственно величины } a/\rho \text{ и } \rho$$

(a – глубина надреза). Как видно, имеет место существенное рассеяние величин приведенного выше отношения, диапазоны которого для различных критериев видны из рис. 11, 12.

Практическое использование зависимостей (32), (33), (37) и других подобных возможно лишь при детальной систематизации результатов для отдельных групп материалов.

В последнее время большое внимание уделяется обоснованию так называемых теорий критического расстояния [49, 50, 52, 61–65 и др.]. Эти теории предполагают, что число циклов до разрушения образца с концентратором и гладкого образца будет одинаковым, если:

а) напряжения в концентраторе на расстоянии d_c от поверхности будут равны напряжениям в гладком образце:

$$\Delta\sigma_H(x) = \Delta\sigma, \quad x = d_c, \quad (38)$$

где $\Delta\sigma_H(x)$ – изменение размаха напряжений по глубине концентратора; $\Delta\sigma$ – размах напряжений в гладком образце при заданном числе циклов до разрушения; d_c – критическое расстояние.

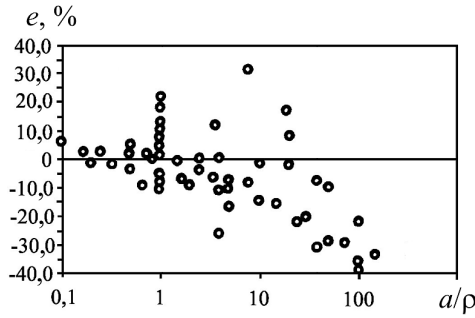


Рис. 11. Зависимость величины e от отношения a/ρ в соответствии с критерием (32).

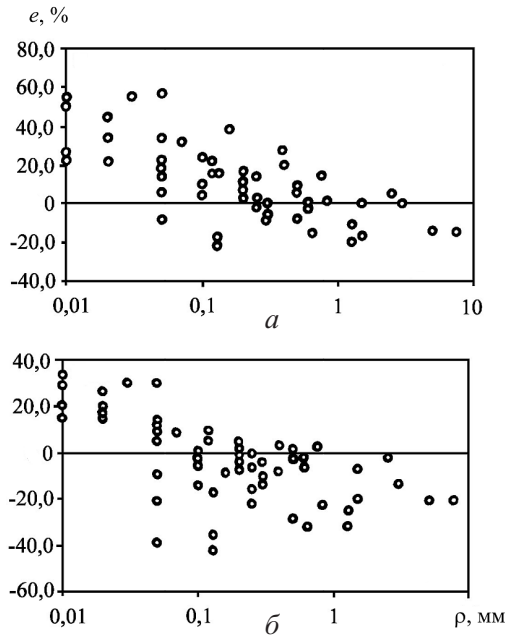


Рис. 12. Зависимость величины e от ρ в соответствии с критериями (33) – а и (37) – б.

В качестве рассматриваемых напряжений могут использоваться как максимальные нормальные или касательные напряжения, так и напряжения, подсчитанные с учетом многоосности напряженного состояния.

На рис. 13 приведена графическая интерпретация критерия (38);

б) среднее напряжение в слое глубиной d_c будет равно напряжениям в гладком образце:

$$\frac{1}{d_c} \int_0^{d_c} \Delta\sigma_H(x) dx = \Delta\sigma; \quad x = d_c. \quad (39)$$

(Обозначения те же, что и в предыдущем случае.)

Анализ выражений (38) и (39) показывает, что величина d_c будет больше при использовании критерия (39), а не (38).

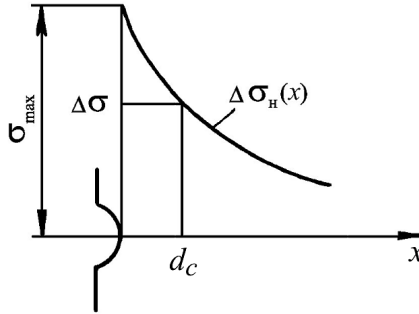


Рис. 13. Определение предела выносливости в соответствии с условием (38).

Так, в работе [50] при исследовании титанового сплава при различных асимметриях цикла при изменении K_t в пределах 1,97...4,07 и радиусов надрезов ρ в пределах 0,127...0,330 мм получено, что величина d_c , подсчитанная в соответствии с формулой (38) для пределов выносливости на базе 10^6 цикл, изменялась так: при использовании максимальных нормальных напряжений – в интервале 0,023...0,255 мм и при использовании напряжений в соответствии с критерием Мизеса – 0,012...0,114 мм.

Было установлено, что величина d_c , полученная по критерию (39), существенно больше, чем по критерию (38). Так, при $\rho = 0,127$ мм и $K_t = 2,85$ и высоких асимметриях цикла R величина d_c соответственно равна 0,06 и 0,024 мм.

Несмотря на значительное рассеяние величины d_c , в работе [50] сделан вывод, что при определенной систематизации результатов и использовании ее средних значений можно прогнозировать предел выносливости надрезанных образцов по данным испытания гладких образцов. Точность этого прогнозирования будет зависеть также от градиента напряжений в зоне концентратора.

Большое внимание в работах по этому направлению уделяется учету многоосности напряженного состояния в концентраторе с использованием критериев, базирующихся на концепции критической плоскости [49, 52 и др.].

Возможность применения теории критических расстояний при кручении анализировалась в работе [63].

Показано, что удовлетворительные результаты могут быть получены в случае, если критическое расстояние рассчитывать по зависимости

$$d_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{0,85 \Delta K_{th}}{\Delta \tau_0} \right)^2, \quad (40)$$

где ΔK_{th} – пороговый коэффициент интенсивности напряжений при растяжении; $\Delta \tau_0$ – предел выносливости при кручении.

Величина d_c , определяемая по зависимости (40), существенно выше, чем это имеет место при осевом нагружении.

Заключение. Рассмотрены подходы, позволяющие объяснить различие между характеристиками сопротивления усталостному разрушению при однородном и неоднородном напряженных состояниях.

Проанализированы эмпирические методы, методы, основанные на учете различия между номинальными и действительными циклическими напряжениями в неоднородно напряженных конструктивных элементах, методы, базирующиеся на представлениях статистических теорий прочности, а также методы, предполагающие, что ответственными за разрушение являются осредненные в поверхностном слое напряжения.

Резюме

Проанализовано сучасні методи, що використовуються для пояснення різниці між характеристиками опору втомному руйнуванню металів і сплавів в умовах однорідного і неоднорідного напружених станів. Розглядаються емпіричні методи, методи, що базуються на урахуванні різниці між номінальними і дійсними циклічними напруженнями, методи, в основі яких лежать статистичні теорії міцності, а також ті, що припускають, що відповідальними за втомне руйнування є напруження, осереднені в поверхневому шарі. Наведено порівняння розрахункових даних з експериментальними.

1. Троценко В. Т. Усталость металлов при неоднородном напряженном состоянии. Сообщ. 1. Методы оценки напряженного состояния и результаты исследования // Пробл. прочности. – 2010. – № 2. – С. 5–24.
2. Papandopoulos I. V. and Panoskaltis V. P. Gradiene-dependent multiaxial high-cycle fatigue-criterion // Multiaxial Fatigue and Design. – ESIS Publication 21. – 1996. – P. 349 – 364.
3. Findley W. N. Fatigue of metals under combinations of stresses // Trans. ASME. – 1957. – 79. – P. 1337 – 1348.
4. Kogaev V. Statistical theory of fatigue failure similarity // Fatigue Eng. Mater. Struct. – 1979. – 2, No. 2. – P. 177 – 180.
5. Одинг И. А. Основы прочности металлов паровых котлов, турбин и турбогенераторов. – М.: ГЭИ, 1949. – 560 с.
6. Добровольский В. И. Влияние концентрации напряжений на сопротивление малоциклового разрушению // Пробл. прочности. – 1978. – № 9. – С. 24 – 27.
7. Daynys M. and Rimovskis S. Analysis of circular cross-section element, loaded by static and cyclic elastic-plastic pure bending // Int. J. Fatigue. – 2006. – 28, No. 3. – P. 211 – 222.
8. Троценко В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1981. – 343 с.

9. *Kawamoto M. and Nishioko K.* Researches on the fatigue under consideration of the phenomenon of elastic hysteresis // Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ. – 1965. – 27, No. 1.
10. *Manson S. S. and Muralidharam U.* Fatigue life prediction in bending from axial fatigue information // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1987. – 9, No. 5. – P. 357 – 372.
11. *Иванов Г. Т., Скорый И. А.* К вопросу об аппроксимации диаграмм деформирования // Вопросы сопротивления материалов. – М.: Оборонгиз, 1959. – С. 13 – 32.
12. *Троценко В. Т., Хамаза Л. А.* Исследование влияния циклических неупругих деформаций на предел выносливости металлов при изгибе // Пробл. прочности. – 1976. – № 4. – С. 3 – 9.
13. *Троценко В. Т., Гетман А. Ф.* Исследование влияния малых упруго-пластических деформаций на несущую способность образцов с концентраторами напряжений в условиях повторно-переменного нагружения. Сообщ. 1 и 2 // Там же. – 1972. – № 2. – С. 13 – 17; Сообщ. 2 // Там же. – С. 18 – 23.
14. *Троценко В. Т., Гетман А. Ф.* Исследование усталостной прочности некоторых сплавов при изгибе с учетом концентрации напряжений // Там же. – 1974. – № 7. – С. 14 – 20.
15. *Forrest P. G. and Tapsell H. J.* Some experiment on the alternating stress fatigue of a mild steel and an aluminium alloy at elevated temperatures // Proc. Inst. Mech. Eng. – 1954. – 168, No. 29. – P. 763 – 774.
16. *Forrest P. G.* Influence of plastic deformation on notch sensitivity in fatigue // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 171 – 183.
17. *Shatil G., Smith D., and Ellison E.* Elastic-plastic behaviour and uniaxial low cycle fatigue life of notched specimens // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1995. – 18, No. 2. – P. 235 – 245.
18. *Horwood G. P. and White D. J.* Strain localization in beams under cyclic plastic straining at room and elevated temperature // J. Strain Anal. – 1971. – 6, No. 2. – P. 108 – 120.
19. *Iida K.* Comparison of fatigue strengths of steel under deflection controlled bending and strain controlled axial load cycling // Proc. of the Second Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials. – Boston, 1976. – P. 759 – 764.
20. *Kotani S., Koibuchi K., and Kasai K.* The effect of notches on cyclic stress-strain behavior and fatigue crack initiation // Proc. of the Second Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials. – Boston, 1976. – P. 606 – 610.
21. *Eleiche A. M., Megahed M. M., and Abd-Allah N. M.* Low-cycle fatigue in rotating cantilever under bending. III. Experimental investigation on notched specimens // Int. J. Fatigue. – 2006. – 28, No. 3. – P. 271 – 280.
22. *Гумбель Э.* Статистика экстремальных значений / Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 450 с.
23. *Epstein B.* Statistical aspects of fracture problems // J. Appl. Phys. – 1948. – 19, No. 2. – P. 140 – 147.

24. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. – М.: Физматгиз, 1959.
25. Weibull W. The phenomenon of rupture in solid // Proc. Royal Swed. Inst. Eng. Res. – 1939. – **153**. – P. 1 – 55.
26. Weibull W. A statistical theory of strength of materials // Ibid. – 1939. – **151**. – P. 5 – 45.
27. Писаренко Г. С., Троценко В. Т. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів. – Київ: Наук. думка, 1961. – 105 с.
28. Flaceliere L. and Morel F. Probabilistic approach in high-cycle multiaxial fatigue: volume and surface effects // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2004. – **27**, No. 12. – P. 1123 – 1136.
29. Серенсен С. В., Козаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
30. Козаев В. П., Серенсен С. В. Статистическая методика оценки влияния концентрации напряжений на сопротивление усталости // Завод. лаб. – 1962. – № 1. – С. 79 – 87.
31. Delahay T. and Palin-Luc T. Estimation of the fatigue distribution in high-cycle multiaxial fatigue taking into account the stress-strain gradient effect // Int. J. Fatigue. – 2006. – **28**, No. 5-6. – P. 474 – 484.
32. Lanning D. B., Nicholas T., and Palazotto A. HCF notch prediction based on weakest-link failure modes // Ibid. – 2003. – **25**, No. 9-11. – P. 835 – 841.
33. Козаев В. П. Влияние концентрации напряжений и масштабного фактора на сопротивление усталости в статистическом аспекте // Вопросы механической усталости. – М.: Машиностроение, 1964. – С. 67 – 100.
34. Banvillet A., Palin-Luc T., and Lasseres S. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion // Int. J. Fatigue. – 2003. – **25**, No. 8. – P. 755 – 769.
35. Ваганов Р. Л. Статистические и детерминистические закономерности усталости и возможность их моделирования. – М.: Машиностроение, 1964. – С. 101 – 138.
36. Doudard C., Calloch S., Gagy P., et al. A probabilistic two-scale model for high-cycle fatigue life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2005. – **28**, No. 3. – P. 229 – 288.
37. Bomas H., Linkewitz T., and Mayr P. Application of a weakest-link concept to the fatigue limit of the bearing steel SAE 52100 in a bainitic condition // Ibid. – 1999. – **22**, No. 9. – P. 733 – 741.
38. Bomas H. and Schleicher M. Application of the weakest-link concept to the endurance limit of notched and multiaxially loaded specimens of carburized steel 16MnCrS5 // Ibid. – 2005. – **28**, No. 11. – P. 983 – 995.
39. Doudard C., Hild F., and Calloch S. A probabilistic model for multiaxial high cycle fatigue // Ibid. – 2007. – **30**, No. 2. – P. 107 – 114.

40. *Belmon H. M. S., Mulheron M., and Smith P.* Weibull analysis, extrapolations and implication for condition assessment of cast iron water mains // *Ibid.* – No. 10. – P. 964 – 990.
41. *Makkonen M.* Statistical size effect in the fatigue limit of steel // *Int. J. Fatigue.* – 2001. – **23**, No. 5. – P. 395 – 402.
42. *Афанасьев Н. Н.* Статистическая теория усталостной прочности стали. – Киев: Изд-во АН УССР, 1953. – 130 с.
43. *Morel F. and Palin-Luc T.* A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue // *Fatigue Fract. Eng. Mater.* – 2002. – **25**, No. 7. – P. 649 – 665.
44. *Kugel R.* A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume // *ASTM 61.* – 1961. – P. 732 – 748.
45. *Sonsino C. M.* Zur Bewertung des Schwingfestigkeit Verhalten von Bauteilen mit Hilfe örtlicher Beanspruchungen // *Konstruktion.* – 1993. – **45**. – S. 25 – 33.
46. *Хэйвуд Р. Б.* Проектирование с учетом усталости / Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
47. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений / Пер. с нем. под ред. А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
48. *Heywood R. B.* Stress concentration factors. Relating theoretical and practical factors in fatigue loading // *Engineering.* – 1959. – **179**. – P. 146 – 148.
49. *Naik R. A., Lanning D. B., Nicholas T., and Kalemeyer A. R.* A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life // *Int. J. Fatigue.* – 2005. – **27**, No. 1. – P. 481 – 492.
50. *Lanning D. B., Nicholas T., and Haritos G. K.* On the use of critical distance theories for the prediction of the high cycle fatigue limit stress in notched Ti-6Al-4V // *Ibid.* – P. 45 – 57.
51. *Peterson R. E.* Notch sensitivity // *Metal Fatigue* (Eds. G. Sines and J. L. Waisman). – New York: McGraw-Hill, 1959. – P. 293 – 306.
52. *Taylor D.* The Theory of Critical Distances: A New Perspective in Fracture Mechanics. – Oxford: Elsevier, 2006. – 357 p.
53. *Ciavarella M. and Meneghetti G.* On fatigue limit in the presense of notches: classical vs. recent unified formulations // *Int. J. Fatigue.* – 2004. – **26**, No. 3. – P. 284 – 298.
54. *Atzori B., Lazzarin P., and Meneghetti G.* Fracture mechanics and notch sensitivity // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2003. – **26**, No. 7. – P. 257 – 267.
55. *Tanaka K.* Engineering formulas for fatigue strength reduction due to crack-like notches // *Int. J. Fatigue.* – 1983. – **22**. – P. 39 – 45.
56. *El-Haddad M. H., Topper T. H., and Smith K. N.* Prediction of non-propagating cracks // *Eng. Fract. Mech.* – 1979. – **11**. – P. 573 – 584.

57. *Creager M. and Paris P. C.* Elastic field equation for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // *Int. J. Fatigue.* – 1967. – **3**. – P. 247 – 252.
58. *Kitagawa H. and Takahashi S.* Applicability of fracture mechanics to very small cracks, or the cracks in the early stage // *Proc. of the Second Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials.* – Boston, 1976. – P. 627 – 631.
59. *Lazzarin P., Tovo R., and Meneghetti G.* Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity // *Int. J. Fatigue.* – 1997. – **27**, No. 8-9. – P. 647 – 657.
60. *Inglis C. E.* Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // *Trans. Inst. Nav. Arch.* – 1913. – **60**. – P. 219 – 241.
61. *Taylor D. and Wang G.* The validation of some methods of notch fatigue analysis // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2000. – **23**. – P. 387 – 394.
62. *Lanning D. B., Nicholas T., and Palazotto A.* The effect of notch geometry on critical distance high cycle fatigue prediction // *Int. J. Fatigue.* – 2005. – **27**, No. 10-12. – P. 1623 – 1627.
63. *Susmel L. and Taylor D.* A simplified approach to apply the theory of critical distances to notched components under torsional fatigue loading // *Ibid.* – 2006. – **28**, No. 4. – P. 417 – 420.
64. *Susmel L. and Taylor D.* A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2007. – **30**, No. 7. – P. 567 – 581.
65. *Taylor D., Bologna P., and Knani K.* Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method // *Int. J. Fatigue.* – 2000. – **22**, No. 9. – P. 735 – 742.

Поступила 23. 02. 2009