УДК 539.3

Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках

С. В. Филипковский, К. В. Аврамов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Разработаны модель и методика исследования колебаний многодискового ротора на двух нелинейных опорах с шарикоподшипниками. В модели учитываются гироскопические моменты, действующие на диски, и упругие свойства вала. Колебания исследуются с помощью нелинейных нормальных форм Шоу–Пьерра. Анализируются скелетные кривые колебаний ротора.

Ключевые слова: ротор, шарикоподшипники, метод нелинейных нормальных форм, частоты колебаний, скелетные кривые.

Введение. Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов и специальных транспортных средств содержат вращающиеся роторы, которые часто совершают опасные резонансные колебания, в основном являющиеся нелинейными. Например, ротор турбохолодильника системы кондиционирования воздуха самолета установлен в блоке, закрепленном посредством амортизаторов. Блок совершает пространственные колебания в разных диапазонах частот, которые зависят от режима полета самолета. Для правильного проектирования подвески блока важно изучить возможные режимы колебаний ротора в широком диапазоне частот и амплитуд.

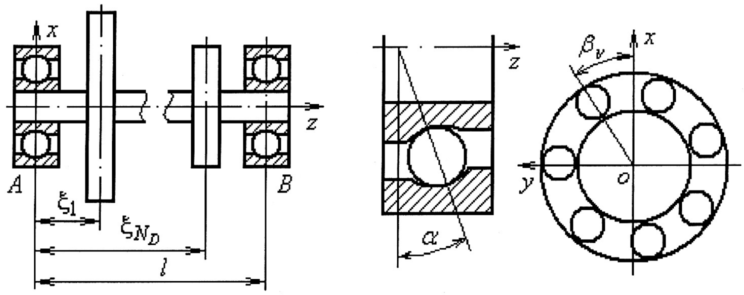
Изгибные колебания валов с дисками, в моделях которых учитываются действующие на диски гироскопические моменты, внешнее и внутреннее трение, исследованы в работе [1]. Нестационарные линейные изгибные колебания с учетом гироскопических моментов дисков и распределенной массы вала изучены в [2]. Ранее [3, 4] получены нелинейные модели и исследованы вынужденные колебания и автоколебания однодисковых роторов. Нелинейные нормальные формы (ННФ) колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в [5]. В [6] метод ННФ развивается для исследования колебаний в системах с гироскопическими силами. В [7] исследованы колебания упругого ротора на нелинейных опорах с диском и с учетом его распределенной массы. Собственные частоты линейных колебаний жесткого ротора на упругих радиально-упорных шарикоподшипниках исследованы в [8]. Там же получены формулы для нелинейных радиальных и осевых сил реакции шарикоподшипников и предложен способ их линеаризации.

Целью настоящей работы является исследование свободных нелинейных колебаний упругого ротора с несколькими дисками, которые расположены несимметрично относительно опор вала. Ротор вращается в радиально-упорных шарикоподшипниках. В модели ротора учитываются нелинейные характеристики шарикоподшипников. Для исследования колебаний применяется метод ННФ.

1. **Уравнения движения системы**. Исследуемая система с N_D дисками показана на рис. 1,*а*. Начало координат находится на опоре *А*. Длину вала обозначим через l, перемещения срединной линии вала по направлениям координатных осей – u_x, u_y, u_z. Колебания вала разложим по собственным формам линейной системы [5]:

$$u_x(\xi, t) = \sum_{n=1}^{N} x_n(t) \sin\frac{n\pi\xi}{l} + x_{N+1}(t)\frac{\xi}{l} + x_{N+2}(t)\frac{l-\xi}{l};$$
$$u_y(\xi, t) = \sum_{n=1}^{N} y_n(t) \sin\frac{n\pi\xi}{l} + y_{N+1}(t)\frac{\xi}{l} + y_{N+2}(t)\frac{l-\xi}{l}, \qquad (1)$$

где $x_n(t)$, $y_n(t)$ – обобщенные координаты; ξ – координата сечения вала по оси z; N – число базисных функций в разложении (1); $x_{N+1}(t)$, $x_{N+2}(t)$, $y_{N+1}(t)$, $y_{N+2}(t)$ – обобщенные координаты, описывающие перемещения цапф.



а *б*

Рис. 1. Схемы ротора и шарикоподшипника: *А*, *В* – опоры.

Внутренние кольца шарикоподшипников колеблются как в радиальном, так и осевом направлении относительно наружных колец. Отметим, что перемещения малы по сравнению с длиной вала. Тогда продольные колебания ротора вдоль координатной оси z можно описать обобщенной координатой $z(t)$.

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Кинетическую энергию вала $T_в$ представим так:

$$T_в = \frac{\rho I}{2}\left(\int_0^l \dot\theta_1^2 dz + \int_0^l \dot\theta_2^2 dz\right) + \rho I\omega^2 l - 2\rho I\omega \int_0^l \dot\theta_2 \theta_1 dz +$$
$$+ \frac{\rho S}{2}\int_0^l (\dot u_x^2 + \dot u_y^2 + \dot u_z^2) dz, \qquad (2)$$

где ρ – плотность материала вала; I – момент инерции сечения вала; S – площадь сечения вала; ω – угловая скорость вращения ротора; θ_1, θ_2 – углы поворота сечений вала, $\theta_1 = -(\partial u_y/\partial z)$, $\theta_2 = \partial u_x/\partial z$.

Кинетическую энергию n-го диска $T_{D,n}$ представим так:

$$T_{D,n} = \frac{I_{1,n}}{2}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2)_{z=\xi_n} + \frac{I_{0,n}}{2}\omega^2 - I_{0,n}\omega(\dot{\theta}_2\theta_1)_{z=\xi_n} +$$

$$+\frac{m_{0,n}}{2}(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2)_{z=\xi_n}, \qquad (3)$$

где $I_{1,n}$ – экваториальный момент инерции; $I_{0,n}$ – полярный момент инерции; $m_{0,n}$ – масса диска; ξ_n – координата n-го диска.

С учетом (1) кинетическую энергию системы можно выразить через обобщенные скорости:

$$T = T_{\text{в}} + \sum_{n=1}^{N_D} T_{D,n} = T(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{N+2}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{N+2}, \dot{z}).$$

Потенциальную энергию вала $\Pi_{\text{в}}$ запишем в следующем виде:

$$\Pi_{\text{в}} = \frac{EI}{2}\int_0^l [(u_x'')^2 + (u_y'')^2]dz, \qquad (4)$$

где E – модуль упругости материала вала.

Компоненты упругих реакций подшипника вдоль осей x, y, z [8] имеют вид

$$P_{x\mu} = K\sum_{\nu=1}^{N_{\text{в}}}[x_\mu \cos\alpha\cos\beta_\nu + y_\mu \cos\alpha\sin\beta_\nu + (z + z_0)\sin\alpha]^{3/2}\cos\alpha\cos\beta_\nu;$$

$$P_{y\mu} = K\sum_{\nu=1}^{N_{\text{в}}}[x_\mu \cos\alpha\cos\beta_\nu + y_\mu \cos\alpha\sin\beta_\nu + (z + z_0)\sin\alpha]^{3/2}\cos\alpha\sin\beta_\nu; \qquad (5)$$

$$P_{z\mu} = K\sum_{\nu=1}^{N_{\text{в}}}[x_\mu \cos\alpha\cos\beta_\nu + y_\mu \cos\alpha\sin\beta_\nu + (z + z_0)\sin\alpha]^{3/2}\sin\alpha;$$

$$K = \frac{3P_0}{2N_{\text{в}}} z_0^{-3/2}\sin^{-5/2}\alpha.$$

Здесь x_μ, y_μ, z – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного; μ – номер обобщенной координаты цапфы; углы α и β_ν показаны на рис. 1,*б*; ν и $N_{\text{в}}$ – номер и количество шариков; P_0 – сила предварительного осевого натяга, z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего от действия силы P_0, определяемое из геометрических соотношений в зонах контакта:

$$z_0 = (2R_{\text{к}} + w_1 + w_2 - d_{\text{в}})\sin\alpha,$$

где $R_к$ – радиусы канавок качения в кольцах подшипника; w_1 и w_2 – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта вследствие предварительного осевого поджатия; $d_в$ – диаметр шарика.

Сближения вычисляем по формуле Герца [9]

$$w_i = b_i P_к^{3/2}, \qquad i = 1, 2,$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты формулы Герца; $P_к$ – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта,

$$P_к = P_0 / (N_в \sin\alpha).$$

Угол α определяем из уравнения

$$(2R_к + w_1 + w_2 - d_в)\cos\alpha = R_1 + 2R_к - R_2,$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середины канавок качения.

Коэффициенты формулы Герца определяются выражением

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2 / (3E_1)},$$

где F_1, E_1 – эллиптические интегралы первого и второго рода; K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей; k – корень трансцендентного уравнения

$$(F_1 - E_1)/(F_1 - E_1/k^2) = (K_{11} - K_{21})/(K_{12} - K_{22}).$$

Величины Θ_1 и Θ_2 зависят от свойств материалов контактирующих тел и определяются так:

$$\Theta_i = (1 - \bar{\mu}_i^2)/(\pi \bar{E}_i), \qquad i = 1, 2,$$

где $\bar{\mu}_i$ и $\bar{E}_i$ – коэффициенты Пуассона и модули упругости материалов подшипниковых колец и шариков.

Выражения (5) можно представить в виде степенных рядов по обобщенным координатам цапф, ограничившись третьим порядком малости по x_μ / z_0, y_μ / z_0, z / z_0:

$$\begin{aligned} P_{x\mu} &= c_r x_\mu + \frac{c_r x_\mu z}{2z_0} - \frac{c_r x_\mu^3}{32 z_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{c_r x_\mu y_\mu^2}{32 z_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{c_r x_\mu z^2}{8 z_0^2}; \\ P_{y\mu} &= c_r y_\mu + \frac{c_r y_\mu z}{2z_0} - \frac{c_r y_\mu^3}{32 z_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{c_r y_\mu x_\mu^2}{32 z_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{c_r y_\mu z_\mu^2}{8 z_0^2}; \\ P_{z\mu} &= \frac{c_a 2 z_0}{3} + c_a z + \frac{c_r x_\mu^2}{4 z_0} + \frac{c_r y_\mu^2}{4 z_0} + \frac{c_a z^2}{4 z_0} - \frac{c_r z x_\mu^2}{8 z_0^2} - \frac{c_r z y_\mu^2}{8 z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24 z_0^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$c_r = \frac{3}{4} N_{\text{в}} K z_0^{1/2} \sin^{1/2}\alpha \cos^2\alpha; \qquad c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Из соотношений (6) следует, что перемещение опорного сечения вала по любому направлению вызывает реакцию подшипника по всем трем координатным направлениям. С учетом (6) потенциальную энергию представим как функцию обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi_{\text{в}} + \Pi_{\text{п}} = \Pi(x_1, \ldots, x_{N+2}, y_1, \ldots, y_{N+2}, z).$$

Демпфирование, обусловленное смазкой опор, обычно определяется на основе экспериментов и описывается моделью вязкого трения [10, 11] с помощью введенной функции Рэлея Φ:

$$\Phi = \frac{C}{2}(\dot{x}_{N+1}^2 + \dot{y}_{N+1}^2 + \dot{x}_{N+2}^2 + \dot{y}_{N+2}^2 + \dot{z}^2), \tag{7}$$

где C – коэффициент сопротивления.

С использованием представленных выше результатов анализа запишем уравнения движения ротора в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\overline{K}]\{U^2\} +$$

$$+ [\widehat{K}]\{UU_\lambda\} + [\breve{K}]\{U^3\} + [\widetilde{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0, \tag{8}$$

где $[K]$ – матрица жесткости; $[C]$ – матрица демпфирования; $[M]$ – матрица масс; $\{U\}$ – вектор обобщенных координат. Компоненты вектора $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ представляют собой произведения обобщенных координат в третьей степени. Шесть разных слагаемых с такими произведениями содержатся в уравнениях (6), описывающих движение цапф. Вектор $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ имеет размерность $(2N+12)$, при этом $2N$ строк содержат нули. Аналогично $\{UU_\lambda\}$, $\{U^2\}$ и $\{U^3\}$ содержат квадраты и кубы обобщенных координат цапф, их размерность, как и размерность вектора $\{U\}$, равна $(2N+5)$.

Умножив (8) на $[M]^{-1}$, перепишем уравнения движения в следующем виде:

$$\{\ddot{U}\} + [G_1]\{\dot{U}\} + [C_1]\{\dot{U}\} + [K_1]\{U\} + [\overline{K}_1]\{U^2\} +$$

$$+ [\widehat{K}_1]\{UU_\lambda\} + [\breve{K}_1]\{U^3\} + [\widetilde{K}_1]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0. \tag{9}$$

2. **Нелинейные нормальные формы колебаний**. Нелинейные нормальные формы позволяют свести нелинейные колебания систем с конечным числом степеней свободы к динамике нелинейного осциллятора с одной

степенью свободы. Этот метод эффективно применяют к решению задач механики деформируемого твердого тела [5–7, 12].

При движении по ННФ все фазовые координаты выражаются через одну пару обобщенной координаты p и соответствующей ей обобщенной скорости q [12]:

$$\begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P(p, q)\} \\ \{Q(p, q)\} \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

где $\{V\} = \{\dot{U}\}$ – вектор обобщенных скоростей.

Для определения ННФ компоненты векторных функций $\{P(p, q)\} = [p_1, \ldots, p_{2N+5}]^{\mathrm{T}}$ и $\{Q(p, q)\} = [q_1, \ldots, q_{2N+5}]^{\mathrm{T}}$ представляются в виде рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} p_n(p, q) &= \gamma_{n,1} p + \gamma_{n,2} q + \gamma_{n,3} p^2 + \gamma_{n,4} pq + \gamma_{n,5} q^2 + \gamma_{n,6} p^3 + \\ &\quad + \gamma_{n,7} p^2 q + \gamma_{n,8} pq^2 + \gamma_{n,9} q^3; \\ q_n(p, q) &= \gamma_{2N+5+n,1} p + \gamma_{2N+5+n,2} q + \gamma_{2N+5+n,3} p^2 + \gamma_{2N+5+n,4} pq + \\ &\quad + \gamma_{2N+5+n,5} q^2 + \gamma_{2N+5+n,6} p^3 + \gamma_{2N+5+n,7} p^2 q + \\ &\quad + \gamma_{2N+5+n,8} pq^2 + \gamma_{2N+5+n,9} q^3, \quad n = \overline{1, \ldots, J-1, J+1, \ldots, 2N+5}, \end{aligned} \tag{11}$$

где J – номер выбранной независимой обобщенной координаты; $p \equiv p_J$; $q \equiv q_J$.

Согласно данным работы [6] коэффициенты линейной части (11) определяем из простых соотношений:

$$\gamma_{n,1} = \frac{s_n \delta_{2N+5+J} - s_{2N+5+J} \delta_n}{s_J \delta_{2N+5+J} - s_{2N+5+J} \delta_J}; \qquad \gamma_{n,2} = \frac{s_J \delta_n - s_n \delta_J}{s_J \delta_{2N+5+J} - s_{2N+5+J} \delta_J},$$

где s_n, δ_n – действительная и мнимая части собственных векторов системы (8) с отброшенными нелинейными слагаемыми.

Для определения нелинейной части разложений (11) строятся уравнения в частных производных относительно ННФ (10):

$$\begin{aligned} \dot{p}_n(p, q) &= \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}; \\ \dot{q}_n(p, q) &= \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}. \end{aligned} \tag{12}$$

Компоненту n-й строки вектора $\{\ddot{U}\}$ с учетом (11) запишем следующим образом:

$$\dot{q}_{j,n} = W_{j,n}(p_{j,J}, q_{j,J}) = -\sum_{m=1}^{2N+5} G_{1,n,m} q_{j,m} - \sum_{m=1}^{2N+5} C_{1,n,m} q_{j,m} -$$

$$- \sum_{m=1}^{2N+5} \overline{K}_{1,n,m} p_{j,m} - \sum_{m=1}^{2N+5} \overline{K}_{1,n,m} p_{j,m}^2 - \sum_{m=1}^{2N+5} \widehat{K}_{1,n,m} (pp_\lambda)_{j,m} -$$

$$- \sum_{m=1}^{2N+5} \breve{K}_{1,n,m} p_{j,m}^3 - \sum_{m=1}^{2N+12} \widetilde{K}_{1,n,m} (p_\nu p_\mu^2)_{j,m}, \qquad (13)$$

где j – номер формы.

Подставив (13) в (12), запишем

$$\begin{aligned} \dot{p}_{j,n} &= q_{j,n} = \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,J}} q_{j,J} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}); \\ \dot{q}_{j,n} &= W_{j,n}(p_{j,J}, q_{j,J}) = \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,J}} q_{j,J} + \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}). \end{aligned} \qquad (14)$$

Приравняв в (14) коэффициенты при одинаковых степенях $p^\mu q^\nu$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\gamma_{k,j}$. Вычисленные коэффициенты ННФ (11) подставляем в J-е уравнение системы (9). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение по ННФ:

$$\ddot{p} + B_1 \dot{p} + B_2 p + B_3 p^2 + B_4 p\dot{p} + B_5 \dot{p}^2 + B_6 p^3 +$$

$$+ B_7 p^2 \dot{p} + B_8 p\dot{p}^2 + B_9 \dot{p}^3 = 0, \qquad (15)$$

где $B_1, \ldots, B_9$ – коэффициенты, полученные при группировке слагаемых.

3. **Численный анализ колебаний**. Рассмотрим колебания недеформируемого ротора с параметрами: длина вала $l = 0{,}5$ м, $l_D = 0{,}125$ м, диаметр вала $d = 0{,}025$ м, $m_0 = 10$ кг, $I_1 = 0{,}1$ кг $\cdot$ м^2, $I_0 = 0{,}2$ кг $\cdot$ м^2, который вращается с угловой скоростью $\omega = 628{,}3$ рад/с на радиально-упорных подшипниках средней серии по ГОСТ 831-75. Такой расчетной схемой можно представить ротор, у которого прогиб вала мал по сравнению с упругими деформациями шарикоподшипников. Перейдем к безразмерным параметрам $p_1 = x_1/z_0$, $p_2 = y_1/z_0, \ldots$; $q_1 = dp_1/d\tau$, $q_2 = dp_2/d\tau, \ldots$; $\tau = t\omega$; $\overline{\omega} = f/\omega$, где f – частота колебаний. В данном примере имеем $z_0 = 0{,}20177 \cdot 10^{-3}$ м. На рис. 2 представлена ННФ зависимости безразмерного перемещения опоры A вала по направлению оси x от независимых фазовых координат p и q, определенная по первой формуле (11). Здесь p – перемещение опоры B вала по направлению оси x. Эта поверхность двойной кривизны наглядно отображает степень нелинейности системы.

Для исследования скелетных кривых колебаний ротора одно из уравнений (15), которое описывает движение по ННФ, решается по методу гармонического баланса [13]. На рис. 3 показаны скелетные кривые для всех форм колебаний недеформируемого ротора. При колебаниях по первой форме ротор совершает преимущественно продольные перемещения. Поскольку осевая жесткость шарикоподшипника меньше радиальной, частота продольных колебаний наинизшая. Вторая и третья частоты кратные, они соответствуют колебаниям ротора в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, при этом оба подшипника деформируются в одном направлении. Четвертая и пятая частоты соответствуют колебаниям ротора, при которых опорные сечения перемещаются в противоположных направлениях. Различие между частотами обусловлено влиянием гироскопического момента.

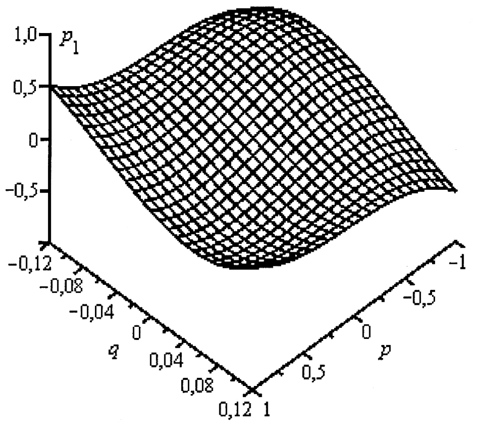


Рис. 2

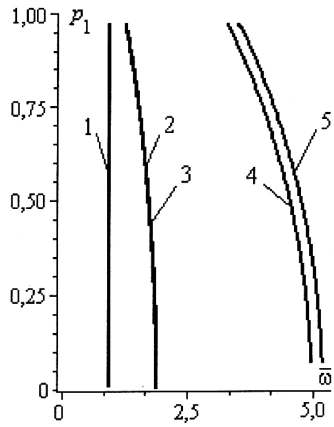


Рис. 3

Рис. 2. Нелинейные нормальные формы недеформируемого ротора.
Рис. 3. Скелетные кривые колебаний недеформируемого ротора. (Номер линии соответствует номеру ННФ.)

Расчетная схема с упругим валом соответствует роторам, у которых прогиб вала больше упругих деформаций подшипников. Рассмотрены колебания ротора с такими же параметрами, за исключением длины вала $l = 1{,}0$ м. При колебаниях с низкой частотой преобладает изгиб вала по первой координатной функции. На рис. 4,*а* линия *1* является скелетной кривой для ротора с одним диском, колеблющегося по этой форме. Как отмечалось выше, силы осевой и радиальной реакций шарикоподшипника взаимосвязаны. Эта связь должна проявляться, если ротор несимметричен относительно подшипников. Поэтому представляет интерес зависимость форм колебаний как от количества закрепленных на валу дисков, так и от их расположения. На рис. 4,*а* линия *2* является скелетной кривой для ротора с двумя дисками, которые расположены несимметрично относительно опор, колеблющегося по первой форме, линии *3* и *4* – для ротора с тремя и четырьмя дисками, расположенными симметрично относительно опор. Поскольку изгибная жесткость вала линейна и меньше радиальной жесткости подшипников, все кривые близки к прямым линиям, параллельным оси ординат.

Для остальных ННФ не наблюдается заметное преобладание какого-либо из перемещений системы. На рис. 4,*б* представлены скелетные кривые для тех же роторов, колеблющихся по второй форме. При симметричном располо-

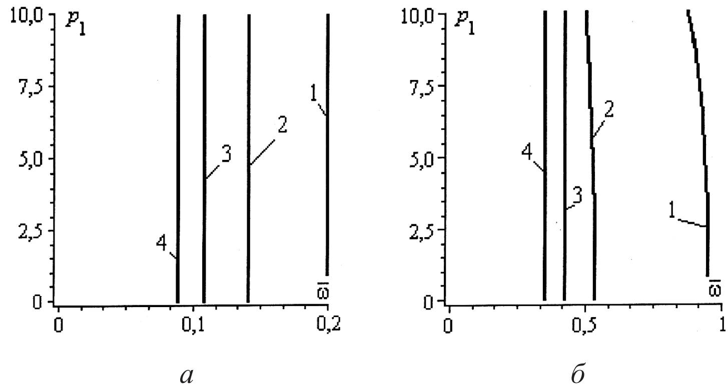


Рис. 4. Влияние инерции дисков на положение и форму скелетных кривых колебаний упругого ротора.

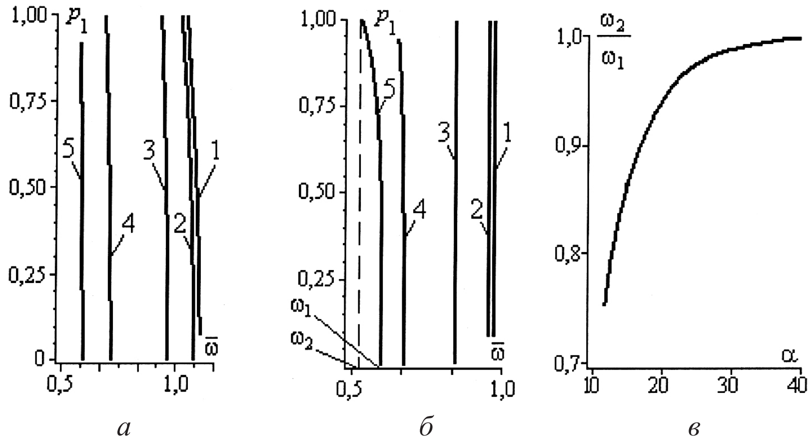


Рис. 5. Влияние угла контакта на положение и форму скелетных кривых колебаний ротора. (Кривые пронумерованы в порядке возрастания угла α.)

жении дисков на валу в колеблющейся системе преобладает деформация вала, т.е. потенциальная энергия деформации подшипника вносит малый вклад в потенциальную энергию системы, поэтому скелетные кривые для ротора с тремя и четырьмя дисками близки к прямым линиям, параллельным оси ординат. При расположении дисков несимметрично относительно опор подшипники деформируются неодинаково и возникают нелинейные продольные колебания, что следует из уравнений (2). С ростом амплитуды частоты колебаний уменьшаются, так как кривизна канавок качения в шарикоподшипниках переменная, а шарики перемещаются в область большей кривизны контактирующей поверхности, т.е. в область меньшей жесткости зоны контакта.

При доводке опытных образцов авиационной техники часто возникает необходимость изменить некоторые параметры с сохранением общей компоновки и габаритов. Поэтому закономерен вопрос о варьировании жесткостью шарикоподшипников при заданных габаритах. ГОСТом 831-75 предусмотрены подшипники с углами α, равными 12, 15, 26, 36 и 40°. На рис. 5,*а* показаны скелетные кривые для недеформируемого ротора, колеблющегося по низшей форме. Чем больше угол α, тем больше кривизна поверхности канавок качения в зоне контакта и, следовательно, меньше жесткость зоны контакта и частота. На рис. 5,*б* показаны скелетные кривые колебаний ротора с учетом упругости вала по низшей форме. При увеличении угла α жесткость подшипников уменьшается до порядка, близкого к порядку изгибной жесткости вала, в результате чего начинает проявляться нелинейность системы. На рис. 5,*в* приведена зависимость безразмерного параметра ω_2/ω_1, характеризующего нелинейность, от угла α, где частоты ω_1 и ω_2 показаны для линии *5* на рис. 5,*б*. При малых углах α нелинейность больше, что обусловлено формой канавок качения шарикоподшипников: при движении точки контакта по поверхности канавки качения вблизи ее дна кривизна поверхности изменяется быстрее, чем вблизи боковой поверхности подшипника.

Заключение. Разработаны модель и методика исследования нелинейных колебаний многодисковых роторов на подшипниках качения, которая значительно упрощает вычисление нелинейных свободных колебаний. Анализ ННФ и скелетных кривых системы показывает, что наряду с жесткостью подшипников необходимо учитывать изгибную жесткость вала и нелинейную взаимную зависимость изгибных и продольных колебаний. При колебаниях многодисковых роторов нелинейность проявляется существеннее на формах с большими частотами и при закреплении дисков несимметрично относительно опор.

Р е з ю м е

Розроблено модель і методику дослідження коливань багатодискового ротора на двох нелінійних опорах із шарикопідшипниками. У моделі враховуються гіроскопічні моменти, що діють на диск, і пружні властивості вала. Коливання досліджуються за допомогою нелінійних нормальних форм Шоу–П’єрра. Аналізуються скелетні криві коливань ротора.

1. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
2. *Филипковский С. В*. Расчет динамического напряженно-деформированного состояния ротора при кратковременных поперечных нагружениях // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 1991. – № 1. – С. 66 – 70.
3. *Аврамов К. В*. Колебания однодискового ротора на нелинейных опорах // Прикл. механика. – 2009. – № 10. – С. 96 – 106.
4. *Аврамов К. В*. Модель автоколебаний однодискового несимметричного ротора // Пробл. прочности. – 2010. – № 4. – С. 130 – 144.
5. *Legrand M., Jiang D., Pierre C. E., and Shaw S. W.* Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the invariant manifold method // Int. J. Rotating Machinery. – 2004. – **10**, No. 4. – P. 319 – 335.
6. *Аврамов К. В., Пьерр К., Ширяева Н. С.* Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Доп. НАН України. – 2006. – № 1. – С. 7 – 10.

7. *Филипковский С. В.*, *Аврамов К. В.* Колебания роторов на нелинейных опорах // Вестн. двигателестроения. – 2009. – № 3. – С. 127 – 132.
8. *Новиков Л. З.* Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 6. – С. 84 – 91.
9. *Динник А. Н.* Удар и сжатие упругих тел. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т. 1. – С. 15 – 114.
10. *Бальмонт В. Б.*, *Дубовецкий Б. О.*, *Авдеев А. М.*, *Селезнев Г. В.* О колебаниях момента сопротивления вращению шарикоподшипника // Машиноведение. – 1988. – № 3. – С. 73 – 81.
11. *Позняк Э. Л.*, *Гладышева Т. Н.*, *Ковалев В. Б.* Маятниковые колебания несимметричного жесткого ротора в подшипниках с зазорами // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 1990. – № 4. – С. 33 – 40.
12. *Аврамов К. В.*, *Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
13. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 432 с.

Поступила 10. 06. 2012