

Пространственное напряженно-деформированное состояние трибофатической системы в зоне контакта ролик–вал

С. С. Щербаков¹

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

¹ sherbakovss@mail.ru

Рассматривается механико-математическая модель напряженно-деформированного состояния системы, подверженной действию контактных и неконтактных нагрузок. Напряженное состояние получено путем суперпозиции полей напряжений, обусловленных действием нормальных и касательных эллиптически распределенных контактных усилий, а также неконтактным изгибом. Показано значительное изменение напряженно-деформированного состояния в системе по сравнению с таковым при решении задачи для чисто контактного взаимодействия.

Ключевые слова: трибофатическая система, пространственное напряженно-деформированное состояние, контактное взаимодействие, неконтактные нагрузки.

Трибофатическая система: совмещенное напряженно-деформированное состояние. При построении механико-математической модели напряженного состояния трибофатических систем в рамках теории упругости в общем случае учитывается действие как распределенных нормальных $p(x, y)$ и касательных $q(x, y)$ контактных усилий, так и неконтактных M_i, N_i, Q_i нагрузок, а также перепад температуры ΔT_Σ от всех источников тепла (рис. 1) [1, 2].

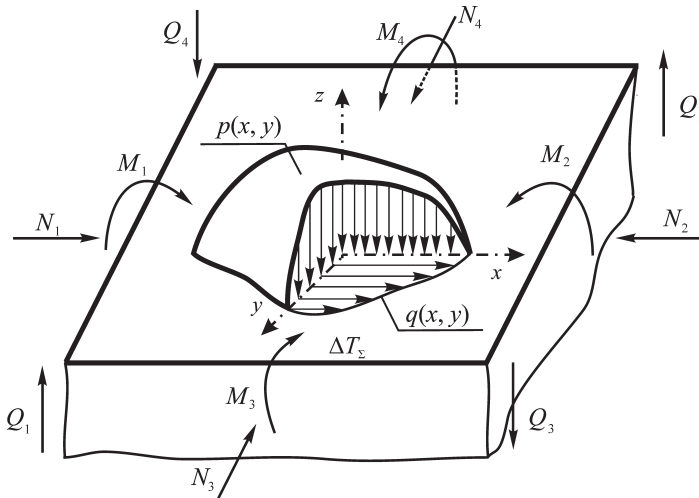


Рис. 1. Общая схема нагружения трибофатической системы.

При исследовании трибофатической системы будем исходить из следующих основных положений.

1. По крайней мере, одна из нагрузок, приложенных к системе, вызывает в ней как локальные контактные деформации, так и объемное деформирование хотя бы одного элемента системы.

2. Напряжения, обусловленные контактной и неконтактной нагрузками, действуют одновременно и в единой области.

3. Форма и площадь контакта дополнительно определяются изменением кривизны поверхности того ее элемента, который подвергается объемному деформированию.

4. Сила и коэффициент трения зависят от дополнительных граничных условий в области контакта, налагаемых действием неконтактной нагрузки.

Таким образом, применительно к трибофатической системе будем решать две граничные задачи. Контактную для взаимодействия элементов системы:

$$\sigma_{nn}^{(c)}|_S = p(F_c, S), \quad \sigma_{nt}^{(c)}|_S = fp(F_c, S), \quad \sigma_{ij}^{(c)}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1)$$

и задачу теории упругости:

$$\begin{aligned} Q|_{S_Q} = Q(F_b), \quad N|_{S_N} = N(F_b), \quad M|_{S_M} = M(F_b), \\ u_i|_{S_u} = u_b, \quad T_\Sigma|_{S_T} = T_\Sigma^*, \end{aligned} \quad (2)$$

где $S(x, y)$ – площадка контакта; F_c и F_b – контактная и изгибающая силы; f – коэффициент трения; ρ – расстояние от центра контакта; $\sigma_{ij}^{(c)}$ – напряженное состояние при контакте; $n \perp S$; $t \parallel S$; Q, N, M – внутренние поперечное и продольное усилия, а также внутренний момент; u – перемещения; T_Σ – температура от всех источников тепла; T_Σ^* – температура на поверхности тела; S_Q, S_N, S_M, S_u, S_T – множества точек твердого тела, к которым приложены внешние нагрузки, соответствующие внутренним усилиям, перемещениям и температуре.

Следует отметить, что определение напряжений и деформаций для граничного условия типа $T_\Sigma|_{S_T} = T_\Sigma^*$ требует предварительного решения соответствующей задачи теплопроводности.

Поскольку при упругой постановке задачи зависимость между напряжениями и деформациями является линейной, для определения напряженно-деформированного состояния элементов трибофатической системы удобно совмещенное напряженное состояние представить в виде суперпозиции напряженных состояний, обусловленных отдельными граничными условиями:

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad (3)$$

где k может принимать значения c, b, T_Σ , обозначая соответственно контактные, неконтактные и температурные граничные условия.

Под объемным деформированием будем понимать действие нагрузки в соответствии с принципом Сен-Венана, т.е. в отличие от контактного взаимодействия, без учета особенностей в точках ее приложения.

Напряженное состояние в любой точке $M(x, y, z)$ трибофатической системы определяется из общего соотношения [1–5]

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)}, \quad i, j = x, y, z, \quad (4)$$

где $\sigma_{ij}^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, $\sigma_{ij}^{(b)}$ – напряжения, вызванные соответственно нормальной и касательной контактными нагрузками, неконтактными силами.

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонент напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [6–8]. Определение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно из-за большой сложности интегрируемых функций.

В трибофатических системах, где реализуется процесс трения, имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами, в общем случае которого по площадке контакта распределены нормальные $p(x, y)$ и касательные $q(x, y)$ к поверхности контакта усилия. Соответственно напряженное состояние при контакте описывается суперпозицией напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (5)$$

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $M(x, y, z)$ при $z < 0$ полупространства при действии на поверхность нормальных усилий $p(x, y)$ проводится численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(B)}$ из фундаментального решения задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [7]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \quad (6)$$

где

$$G_{xx}^{(B, \sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\};$$

$$G_{yy}^{(B, \sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\};$$

$$G_{zz}^{(B, \sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5};$$

$$G_{xy}^{(B,\sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\};$$

$$G_{xz}^{(B,\sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}; \quad G_{yz}^{(B,\sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5};$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Необходимо учитывать, что на поверхности полупространства расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ путем прямого интегрирования в соответствии с (6) является весьма затруднительным. Это обусловлено тем, что для точек $z=0$ поверхности полупространства в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки результаты расчетов по методам численного интегрирования сходятся довольно медленно. Кроме того, они плохо соответствуют известным решениям в некоторых подобластях поверхности полупространства.

Расчет напряжений в любой точке $M(x, y, 0)$ поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий $p(x, y)$ проводится в соответствии со следующей формулой [1, 9, 10]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (7)$$

где $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$ – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области $S(x, y)$.

В явном виде выражения (7) на основании [1, 2, 5] таковы:

$$\frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\frac{b+2\nu a}{a+b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \quad (8a)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\frac{a+2\nu b}{a+b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \quad (8б)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1; \end{cases} \quad (8в)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -(1-2\nu)\frac{b}{ae^2} \left[\frac{y}{ae} \operatorname{arcth}\left(\frac{ex}{a}\right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg}\left(\frac{aey}{b^2}\right) \right] = \\ = H(x, y) \quad \text{при } H(x, y) < 0, \\ 0 \quad \quad \quad \text{при } H(x, y) > 0; \end{cases} \quad (8г)$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{p_0} = 0, \quad \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{p_0} = 0. \quad (8д)$$

Таким образом, $\sigma_{ij}^{(n)}$ в формуле (5) с учетом (6)–(8) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0; \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Расчет напряженного состояния $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий $q(x, y)$, также выполняется численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(C)}$ из решения задачи Черрути при действии на полупространство сосредоточенной касательной силы [7]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \quad (10)$$

где

$$G_{xx}^{(C, \sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\};$$

$$G_{yy}^{(C, \sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\};$$

$$G_{zz}^{(C, \sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5};$$

$$G_{xy}^{(C, \sigma)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\};$$

$$G_{xz}^{(C, \sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{x^2z}{\rho^5}; \quad G_{yz}^{(C, \sigma)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{xyz}{\rho^5}.$$

Формула (5) с учетом (8) примет вид

$$\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}^{(hs)} \vee \sigma_{ij}^{(surf)}] + \sigma_{ij}^{(\tau)}. \quad (11)$$

На рис. 2 и 3 в соответствии с (11) представлены распределения нормальных и касательных напряжений при действии эллиптически распределенных нормальных $p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ и касательных $q(x, y) = fp_0(x, y)$ контактных усилий. Параметрами такого распределения являются a , b и p_0 – большая и малая полуоси контактной площадки и давление в центре контакта (коэффициент трения $f = 0,5$, $b/a = 0,5$) [7]. Из рис. 2 и 3 видно, что распределения $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)} + \sigma_{xz}^{(\tau)}$ значительно отличаются от распределений $\sigma_{xx}^{(n)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)}$ из-за действия силы трения, вызывающей появление напряжений $\sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(\tau)}$.

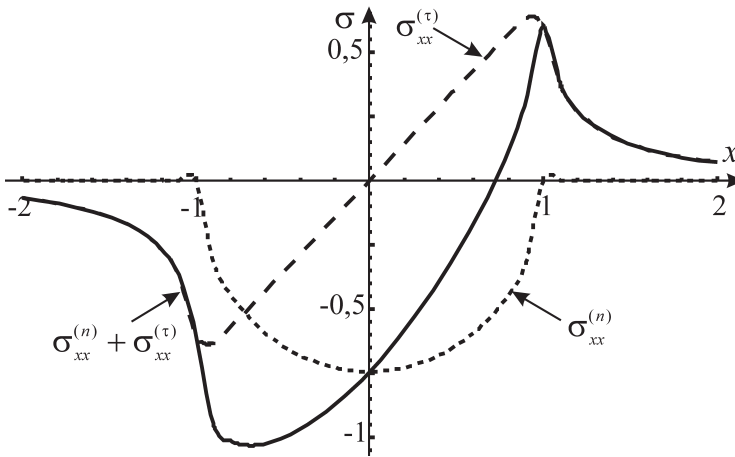


Рис. 2. Распределение отнесенных к p_0 напряжений σ_{xx} на поверхности контакта при $z = 0$, $y = 0$.

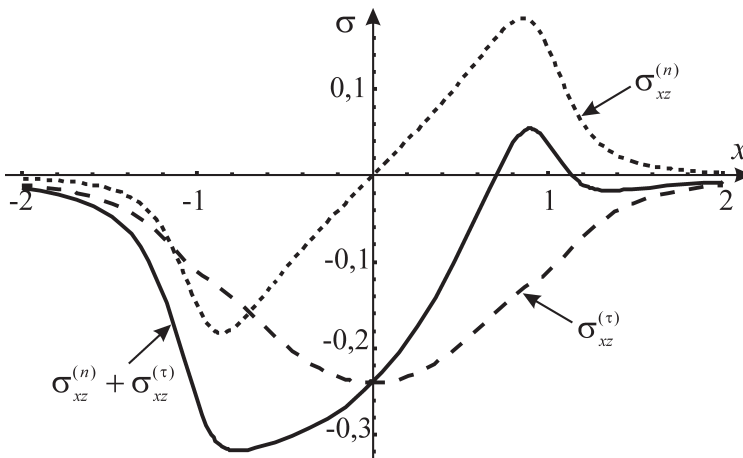


Рис. 3. Распределение отнесенных к p_0 напряжений σ_{xz} под поверхностью контакта при $z = -0,3a$, $y = 0$.

Напряжения от неконтактных нагрузок будем определять с использованием теории, подходящей для конкретной геометрии и граничных условий взаимодействующих тел [11]:

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(M)} + \sigma_{ij}^{(N)} + \sigma_{ij}^{(Q)}, \quad (12)$$

где M , N и Q – внутренний момент, продольное и поперечное усилия.

Совмещенное напряженное состояние, определяемое выражением (4), с учетом (6)–(12) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = [\sigma_{ij}^{(hs)} \vee \sigma_{ij}^{(surf)}] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[\iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \vee \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x, y, z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x, y, z). \end{aligned} \quad (13)$$

Система ролик–вал. Рассмотрим реализацию модели (13) применительно к трибофатической системе ролик–вал, которая является моделью таких практически важных объектов, как зубчатое зацепление, колесо–рельс и др. В ней реализуются как контактное взаимодействие ролика и вала, так и неконтактный изгиб вала (рис. 4) [11, 12].

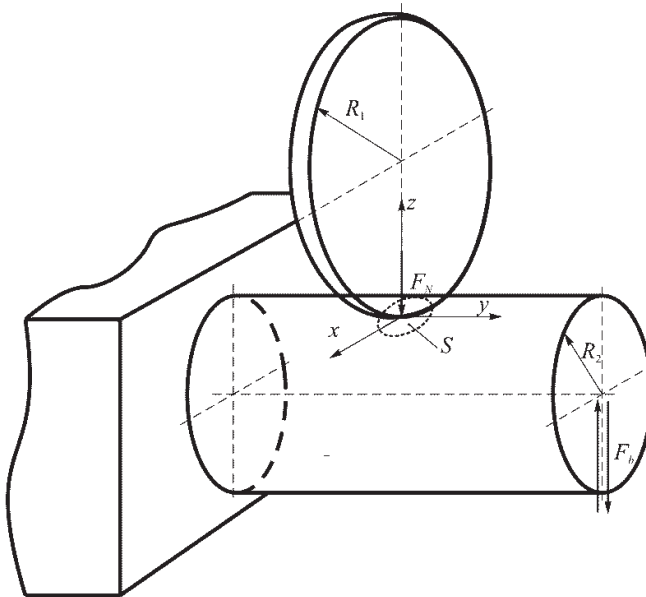


Рис. 4. Схема трибофатической системы ролик–вал.

Напряженное состояние в любой точке $M(x, y, z)$ этой системы определяется из общего соотношения (4). Если напряженное состояние ролика является чисто контактным, в вале кроме контактных напряжений действуют напряжения, обусловленные изгибающей неконтактной силой.

Поскольку ролик и вал ограничены поверхностями второго порядка, в соответствии с теорией несогласованного контакта Герца [7, 13], взаимодействие между роликом и валом может быть сведено к эллиптическому распределению нормальных и касательных усилий по полупространству.

Распределения всех независимых компонент контактных напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, а также главных напряжений приведены в [2]. При анализе системы ролик–вал будем рассматривать напряжения $\sigma_{xx}^{(n)}$, $\sigma_{yy}^{(n)}$, $\sigma_{zz}^{(n)}$, $\sigma_{xz}^{(n)}$, поскольку именно они в наибольшей степени определяют особенности совмещенного напряженно-деформированного состояния системы по сравнению с контактной парой.

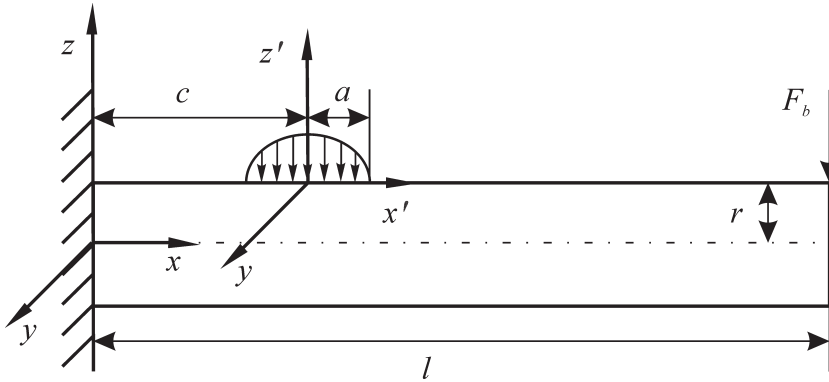


Рис. 5. Схема нагружения вала в системе ролик–вал.

Напряженное состояние, вызванное действием силы F_b в плоскости $y = 0$ (рис. 5), определяется в соответствии с известными [11] соотношениями:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(l-x)z}{4(1+\nu)J}; \quad \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}(r^2 - z^2); \tag{14}$$

$$\sigma_{yy}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = 0,$$

где

$$J = \frac{\pi r^4}{64}; \quad F_b = 0,22 p_0 \frac{4(1+\nu)J}{lr}.$$

В качестве примера сравним одно из решений традиционной контактной задачи (11) для пары ролик–ролик при эллиптическом распределении контактного давления с аналогичным решением (13) для трибофатической системы, в которой консольно закрепленный вал также нагружен неконтактной изгибающей силой F_b . Изгибающая сила приложена таким образом, что в окрестности контакта формируется область растягивающих напряжений.

При исследовании напряженного состояния расчет проводился в области $z \in [0; 1,5a]$, $x \in [-1,5a; 1,5a]$, $y \in [-1,5a; 1,5a]$ для $20 \times 39 \times 39$ точек при неконтактной нагрузке $F_b = 2,7 p_0 \frac{(1+\nu)J}{12r^2}$, где r – радиус вала, $r = 1,5a$; J – момент инерции вала, и длине вала $12r$. Приняты следующие значения для свойств материалов и геометрических характеристик: модули Юнга $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; коэффициент трения $f = 0,2$; соотношение полуосей эллипса контакта $b/a = 0,574$. Результаты расчетов приведены на рис. 6, 7.

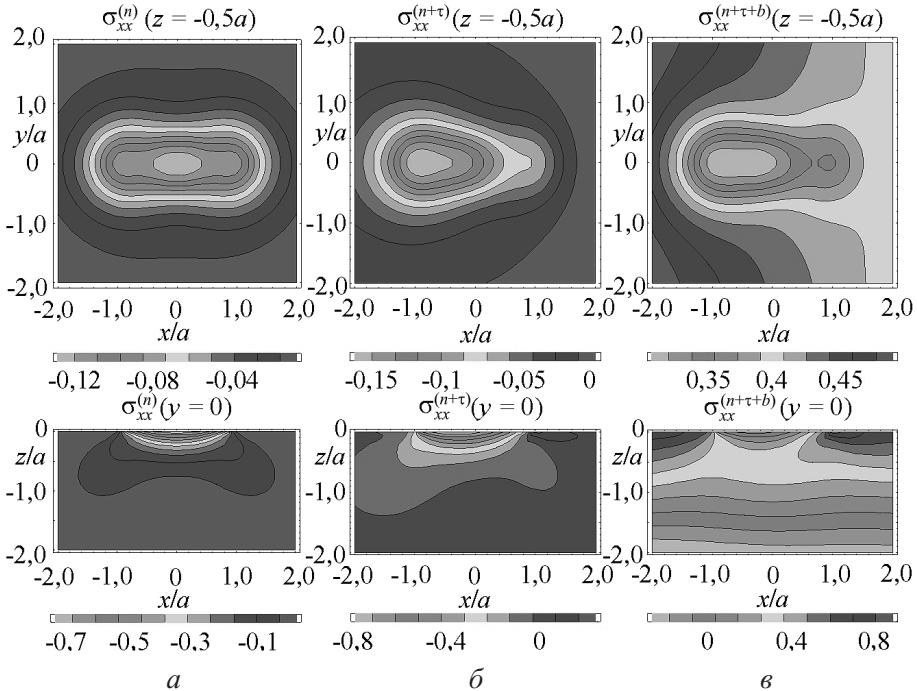


Рис. 6. Поля напряжений σ_{xx} , отнесенных к p_0 , в контактной задаче $\sigma_{xx}^{(n)}$ – а, паре трения $\sigma_{xx}^{(n+\tau)}$ – б и в трибофатической системе $\sigma_{xx}^{(n+\tau+b)}$ – в.

Из рис. 6 видно, что влияние неконтактных напряжений на изменение напряженного состояния в области контакта состоит в следующем:

а) распределение σ_{xx} смещается в плоскости $y = 0$ неравномерно, а именно: соответственно величине действующих изгибных напряжений, которые линейно изменяются по координате z ;

б) поле сжимающих напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$ частично трансформируется в поле растягивающих напряжений $\sigma_{xx}^{(n+\tau+b)}$;

в) максимальные по абсолютному значению сжимающие напряжения σ_{xx} уменьшаются примерно в два раза вследствие изгиба вала.

Из рис. 7 видно значительное изменение (по сравнению с $\sigma_{int}^{(n)}$) интенсивности напряжений в окрестности контакта в результате влияния силы трения $\sigma_{int}^{(n+\tau)}$ и неконтактного изгиба $\sigma_{int}^{(n+\tau+b)}$.

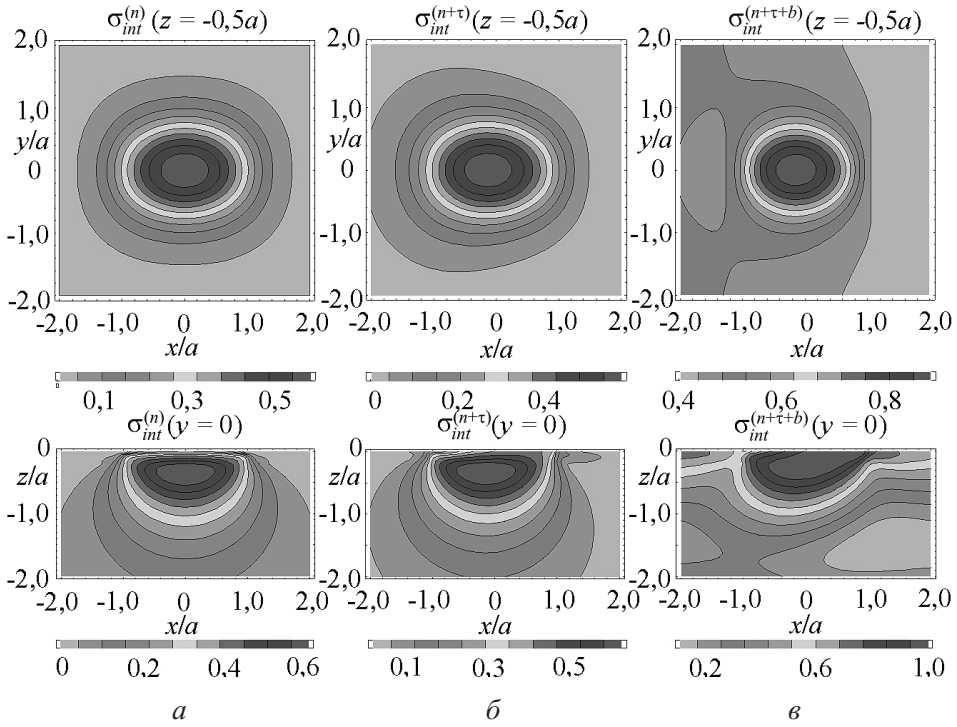


Рис. 7. Поля интенсивности напряжений σ_{int} , отнесенных к p_0 , в контактной задаче $\sigma_{int}^{(n)}$ – а, паре трения $\sigma_{int}^{(n+\tau)}$ – б и в трибофатической системе $\sigma_{int}^{(n+\tau+b)}$ – в.

Заключение. Совмещенное напряженное состояние, определяемое граничными условиями (1), (2), описывается в (3), (4), (13) суперпозицией напряжений, обусловленных как контактными, так и неконтактными нагрузками. Поэтому с точки зрения трибофатики анализ (13) возможен, поскольку, с одной стороны, можно исследовать, как поле напряжений вследствие объемного деформирования возмущается в локальной области, в которой одновременно возбуждается поле контактных напряжений. Такой анализ используется, когда в трибофатической системе реализуется прямой эффект. С другой стороны, можно исследовать, как изменяется локальное поле контактных напряжений, когда на него накладывается поле напряжений, обусловленных объемным деформированием. Анализ полезен, когда в трибофатической системе реализуется обратный эффект. С помощью уравнения (13) можно проводить подобные исследования как в количественном, так и в качественном отношении практически при любых условиях нагружения.

Резюме

Розглядається механіко-математична модель напружено-деформованого стану системи, що зазнає дії контактних і неконтактних навантажень. Напружений стан отримано шляхом суперпозиції полів напружень, що зумовлені дією нормальних і дотичних еліптично розподілених контактних зусиль, а також неконтактним згином. Показано значну зміну напружено-деформованого стану

в системі порівняно з таким при розв'язанні задачі для чисто контактної взаємодії.

1. Журавков М. А., Щербаков С. С. Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования // Вест. НАНБ. – 2008. – № 1. – С. 48 – 57.
2. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Сосновский Л. А., Щербаков С. С. О нетрадиционном подходе к решению контактных задач // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Тез. докл. XII Междунар. симп. – М.: Изд-во МАИ, 2006. – С. 283 – 286.
4. Сосновский Л. А. Основы трибофатики. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.
5. Щербаков С. С. Напряженное состояние одной модели системы колесо/рельс // Проблемы безопасности на транспорте: Тр. III Междунар. науч.-практ. конф. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 137.
6. Макушин В. М. Упругие перемещения и напряженное состояние деталей в местах контакта деталей // Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. С. Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – Т. 2. – С. 387 – 486.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
8. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
9. Щербаков С. С. Исследование напряженного состояния силовой системы для испытаний на контактно-механическую усталость // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин. – Тернопіль: Терн. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2004. – С. 400 – 407.
10. Сосновский Л. А., Сенько В. И., Щербаков С. С., Залесский Н. А. Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс // Вест. БелГУТ. – 2005. – № 2. – С. 18 – 41.
11. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
12. Сосновский Л. А., Махутов Н. А., Шуринов В. А. Фрикционно-механическая усталость: основные закономерности // Завод. лаб. – 1992. – № 9. – С. 46 – 63.
13. *Modern Tribology Handbook* / В. Bhushan (Ed), in 2 volumes. – Vol. 1. – CRC Press, 2000. – 765 p.

Поступила 11. 06. 2012