

# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

*Наводяться результати розрахунків оптимальної тришарової оптичної структури для просвітлення підкладки при падінні світла під кутом. Алгоритм розрахунків заснований на використанні методу негладкою оптимізації (r-алгоритму).*

© О.В. Міца, В.І. Пецко,  
М.Г. Журбенко, 2014

УДК 519.8

О.В. МІЦА, В.І. ПЕЦКО, М.Г. ЖУРБЕНКО

## ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ТРИШАРОВИХ ОПТИЧНИХ СТРУКТУР ПРИ ПАДІННІ СВІТЛА ПІД КУТОМ

**Вступ.** Інтерференційні просвітлюючі багат шарові покриття широко використовуються при створенні об'єктів, окулярів, антиблікових покриттів та інших оптичних приладів. Мета даної роботи – дослідити оптимальні параметри тришарових однорідних структур для просвітлення низькозаломлюючої підкладки, динаміку їх зміни із збільшенням спектрального інтервалу при падінні світла під кутом. Оптимізація параметрів здійснюється за допомогою  $r$ -алгоритму. Як підкладку вибрано найбільш поширену низькозаломлюючу підкладку з показником заломлення  $n_s = 1.51$  (скло).

**Математична модель.** Для багат шарових покриттів кожна плівка характеризується показником заломлення  $n$  та геометричною товщиною  $d$ . Характеристична матриця одного шару задається у вигляді [1, 2]:

$$M_j(N_j, d_j, \lambda) = \begin{vmatrix} \cos(\delta_j) & -\frac{i}{P_j} \sin(\delta_j) \\ -ip_j \sin(\delta_j) & \cos(\delta_j) \end{vmatrix},$$

де  $\delta_j = \delta_j(N_j, d_j, \lambda) = 2\pi N_j d_j \cos \theta_j / \lambda$ ,

$N_j = n_j(1 + ic_j)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $n_j, c_j, d_j, \theta_j, \lambda$  – показник заломлення, показник поглинання, геометрична товщина, кут між променем, що падає на  $(j+1)$ -ий шар, і нормаллю до площини розділу  $j$ -го та  $(j+1)$ -го шарів, довжина хвилі відповідно. Для зменшення світлових

втратах в оптичних елементах при просвітленні їх поверхонь використовуються матеріали незначним поглинанням, тому будемо вважати, що  $c_j = 0$  і, відповідно,  $N_j = n_j$ . При цьому значення  $p_j = N_j \cos \theta_j$  для ТЕ-хвилі ( $s$ -поляризація) і  $p_j = N_j / \cos \theta_j$  для ТМ-хвилі ( $p$ -поляризація).

Характеристична матриця однорідної  $k$ -шарової структури буде рівною:

$$M(\bar{n}, \bar{d}, \lambda) = M_k(n_k, d_k, \lambda) \cdot M_{k-1}(n_{k-1}, d_{k-1}, \lambda) \cdots M_2(n_2, d_2, \lambda) \cdot M_1(n_1, d_1, \lambda),$$

де  $M_j$  – характеристична матриця  $j$ -го шару;  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k)$  – вектор значень показників заломлення;  $\bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_k)$  – вектор значень геометричної товщини;  $\lambda$  – довжина хвилі.

Звідси, легко знайти коефіцієнт пропускання даної  $k$ -шарової структури при заданих значеннях  $\bar{n}, \bar{d}$  та  $\lambda$ :

$$T = 4 / \left( 2 + \frac{p_0}{p_s} m_{11}^2 + \frac{p_s}{p_0} m_{22}^2 + p_0 p_s m_{12}^2 + \frac{1}{p_0 p_s} m_{21}^2 \right),$$

де  $p_0 = N_0 \cos \theta_0$  і  $p_s = N_s \cos \theta_s$  для ТЕ-хвилі ( $s$ -поляризація);  $p_0 = N_0 / \cos \theta_0$  і  $p_s = N_s / \cos \theta_s$  для ТМ-хвилі ( $p$ -поляризація);  $\theta_0$  – кут під яким промінь попадає на шарувату структуру;  $\theta_s$  – кут під яким промінь виходить із шаруватої структури (кут заломлення);  $N_0, N_s$  – показники заломлення зовнішнього середовища і підкладинки відповідно;  $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$  – елементи характеристичної матриці  $M$ .

Цільовою функцією візьмемо середньоквадратичне значення показника пропускання на досліджуваному спектральному діапазоні [3, 4]:

$$\Omega(\lambda_2, \lambda_1) = \max_{\bar{n}, \bar{d}} F(\bar{n}, \bar{d}) = \max_{\bar{n}, \bar{d}} \left( \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L T^2(\bar{n}, \bar{d}, \lambda_{(i)}) \right)^{1/2}, \quad (1)$$

де  $L$  – число точок сітки спектрального інтервалу від  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ . При рівномірному його поділі з кроком  $\Delta\lambda$ :  $\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1) / L$ .

При дослідженні вибирались значення  $1.35 \leq n_j \leq 2.6$ ,  $50 \text{ нм} \leq d_j \leq 750 \text{ нм}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ),  $\lambda_1 = 200 \text{ нм}$ ,  $\lambda_2 = 1200 \text{ нм}$ .

**Обчислювальний експеримент.** Досліджувана цільова функція має багато локальних максимумів. Тому при дослідженні тришарових структур вибиралось 324 початкових (нульових) наближень роботи алгоритму. Вони вибирались за такою схемою: вся область можливих значень параметрів розбивається на 324 підобласті, із яких і вибирається стартова точка алгоритму. Для пошуку

оптимальних параметрів використано  $r$ -алгоритм [5, 6]. Програмне забезпечення написано на мові програмування Delphi.

**Тришарові однорідні плівки.** Шукаємо оптимальні значення функціоналу (1) для тришарової ( $k = 3$ ) структури при падінні світла під різними кутами.

Спочатку розглянемо, коли промінь падає перпендикулярно до шаруватої структури, тобто  $\theta_0 = 0^\circ$  (рис. 1, а). Відомо, що для тришарових покриттів, так як і для двошарових, оптимальне значення показника заломлення верхнього шару для всіх спектральних діапазонів є сталим і рівним нижній межі для показника заломлення 1.35 [1]. Значення функціоналу  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 600  $\text{нм}$  спадає від 0.996328 до 0.988119, а при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 600 до 1200  $\text{нм}$  значення функціоналу спадає повільніше від 0.988119 до 0.984155.

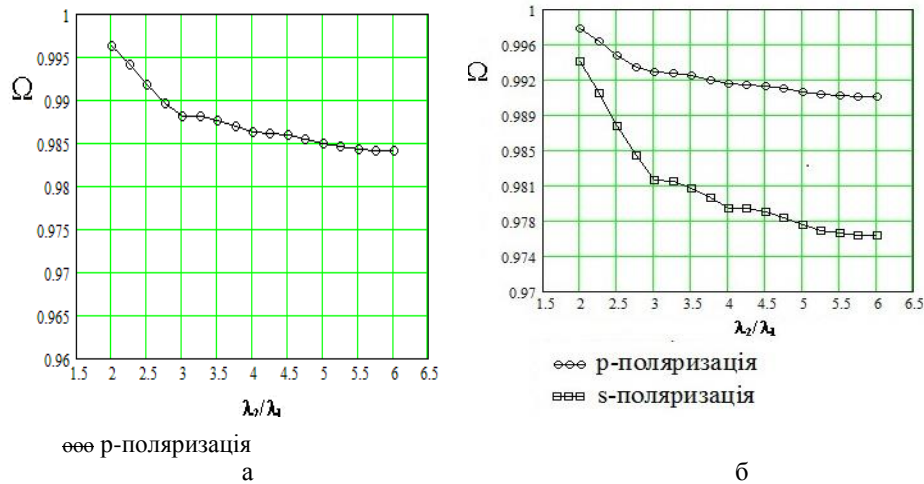
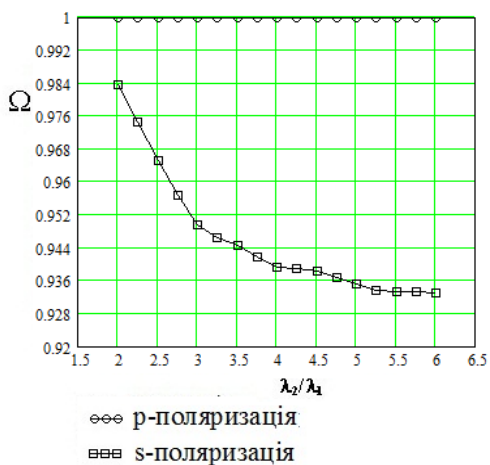


РИС. 1. Динаміка зміни функціоналу  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  для тришарової структури при:

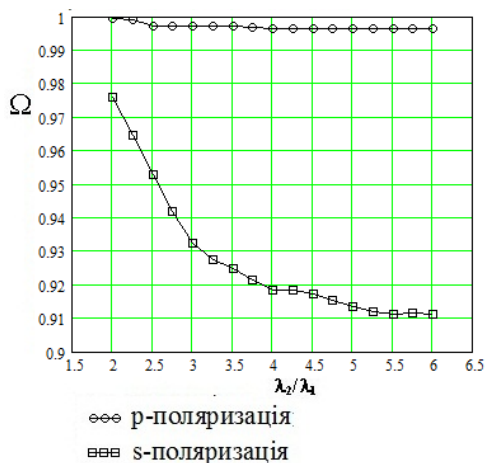
а –  $\theta_0 = 0^\circ$  та б –  $\theta_0 = 30^\circ$

При куті відмінному від  $\theta_0 = 0^\circ$  промінь розкладається на ТЕ-хвилю ( $s$ -поляризація) і ТМ-хвилю ( $p$ -поляризація). Досліджувалися два випадки:  $s$ -поляризація,  $p$ -поляризація, відповідно пропускався  $s$ -поляризований промінь,  $p$ -поляризований промінь. Шукаємо оптимальні значення функціоналу (1) для тришарової ( $k = 3$ ) структури при падінні світла під іншими кутами. З рис. 1, б видно, що при падінні світла під кутом  $\theta_0 = 30^\circ$  і збільшенні правої границі від 400 до 1200  $\text{нм}$  функціонал  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  при  $s$ -поляризації спадає від 0.994465 до 0.975986, а при  $p$ -поляризації спадає від 0.997878 до 0.990719.

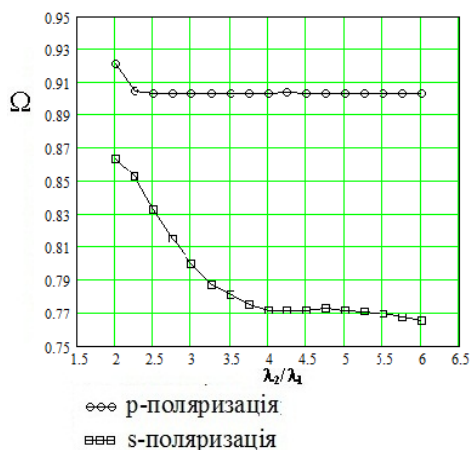
Розглянемо оптимальні значення функціоналу для тришарової структури при падінні світла під кутом  $\theta_0 = 55^\circ$  (рис. 2, а). Для *s*-поляризації функціонал при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 600 нм стрімко спадає від 0.983685 до 0.949459, а при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 600 до 1200 нм значення функціоналу спадає повільніше від 0.949459 до 0.933074. Для *p*-поляризації графік функціоналу спадає повільніше, ніж для кута  $\theta_0 = 50^\circ$ , хоча можна простежити спадання при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 600 нм з 0.999895 до 0.999771, а при подальшому збільшенні правої границі  $\lambda_2$  до 1200 нм функціонал дуже повільно спадає до значення 0.999746.



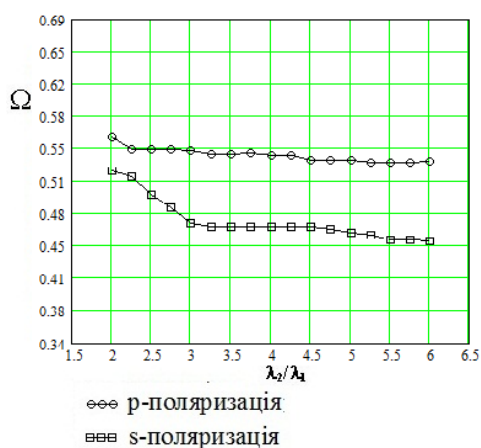
а



б



в



г

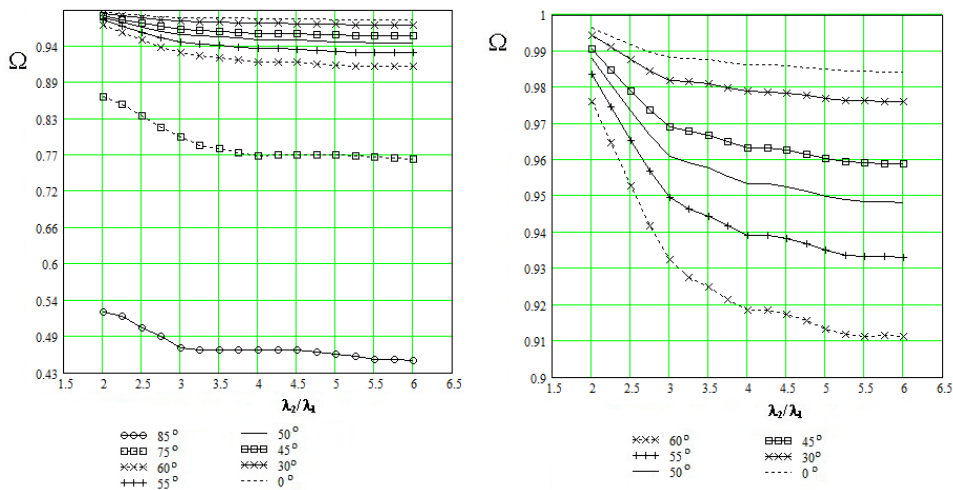
РИС. 2. Динаміка зміни функціоналу  $\Omega(\lambda_2/\lambda_1)$  для тришарової структури при:

а –  $\theta_0 = 55^\circ$ ; б –  $\theta_0 = 60^\circ$ ; в –  $\theta_0 = 75^\circ$ ; г –  $\theta_0 = 85^\circ$

З рис. 2, б видно, що при падінні світла під кутом  $\theta_0 = 60^\circ$  для  $s$ -поляризації функціонал при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 600 нм спадає від 0.976119 до 0.932437, а при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 600 до 1200 нм значення функціоналу спадає повільніше до 0.911165. Для  $p$ -поляризації простежується спадання функціоналу при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 500 нм від 0.999456 до 0.997293, а при подальшому збільшенні правої границі  $\lambda_2$  до 1200 нм його значення спадає до 0.996369.

При падінні світла під кутом  $\theta_0 = 75^\circ$  (рис. 2, в) функціонал для  $s$ -поляризації при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 800 нм спадає від 0.863755 до 0.771337, при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 800 до 1200 нм значення функціоналу повільно спадає до 0.765089. Для  $p$ -поляризації значення функціоналу при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 450 нм спадає від 0.920708 до 0.904735, а при подальшому збільшенні правої границі  $\lambda_2$  до 1200 нм його значення дуже повільно спадає до 0.903456.

З рис. 2, г можна простежити, що для кута  $\theta_0 = 85^\circ$  функціонал для  $s$ -поляризації при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 600 нм спадає від 0.526071 до 0.469449, при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 600 до 1200 нм значення функціоналу зменшується до 0.449437. Для  $p$ -поляризації можна простежити стрімке спадання функціоналу при збільшенні правої границі  $\lambda_2$  від 400 до 450 нм від 0.562499 до 0.549696, при подальшому збільшенні правої границі  $\lambda_2$  до 1200 нм його значення спадає до 0.535630.



а

б

РИС. 3. Динаміка зміни функціоналу  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  для тришарової однорідної структури для  $s$ -поляризації

Динаміку зміни функціоналу  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  для тришарової однорідної структури при  $s$ -поляризації в залежності від кута падіння можна простежити з рис. 3, а та 3, б. Для всіх кутів при збільшенні правої границі від 400 до 1200 нм функціонал спадає, причому при збільшенні правої границі від 400 до 600 нм це спадання стрімкіше, ніж на іншій частині проміжку. На рис. 3 видно, що із збільшенням кута значення функціоналу зменшується.

При зростанні кута до  $\theta_0 = 55^\circ$  значення функціоналу зростає, а потім зменшується. Дана закономірність пояснюється законом Брюстера [7 – 9]. Для  $p$ -поляризації, так як і для  $s$ -поляризації, при збільшенні правої границі від 400 нм до 1200 нм функціонал спадає для всіх кутів, хоча тут менш помітні коливання цільової функції, ніж для  $s$ -поляризації, а значення функціоналу на цьому проміжку практично не змінюється. Значення функціоналу при куті  $\theta_0 = 55^\circ$  має менші коливання, ніж при інших кутах, при подальшому збільшенні кута значення функціоналу зменшується.

Можна простежити наступну залежність цільової функції від кута падіння  $\theta_0$ : із збільшенням кута для  $s$ -поляризації значення цільової функції зменшується, а для  $p$ -поляризації значення цільової функції спочатку зростає, а потім зменшується (рис. 4, а, б), що також пояснюється законом Брюстера [7 – 9].

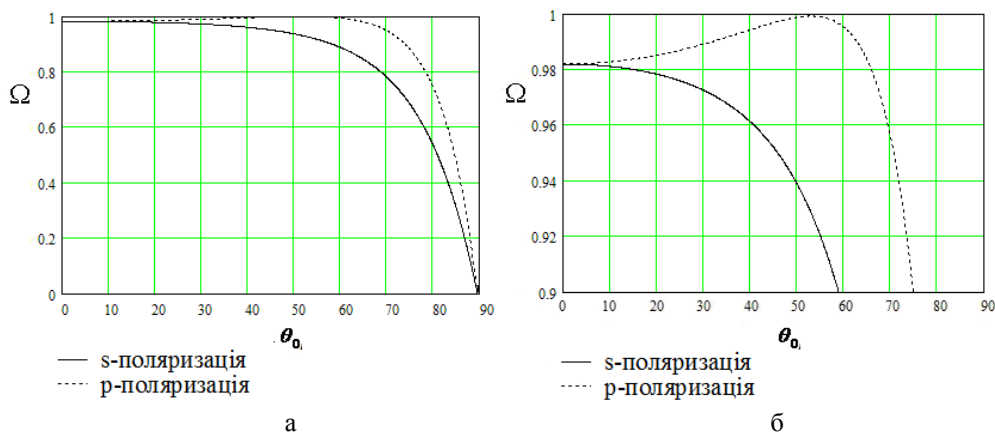


РИС. 4. Динаміка зміни функціоналу  $\Omega(\lambda_2, \lambda_1)$  для тришарової однорідної структури в залежності від  $\theta_0$

**Висновки.** Проведені розрахунки показали досить високу ефективність розробленого на основі використання  $r$ -алгоритму програмного забезпечення рішення завдань оптимізації багат шарових оптичних структур. Час рішення задачі на персональному комп'ютері середнього класу з процесором Intel(R) Core(TM) i3-3230 @ 3.30 ГГц та ОЗУ 2 ГГц займає декілька хвилин для кожного спектрального діапазону.

Отримано результати рішення реальних задач. Динаміка зміни функціоналу для тришарової однорідної структури в залежності від кута падіння узгоджується із законом Брюстера.

*A.V. Mița, V.I. Pețko, M.G. Zhurbenko*

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СТРУКТУР ПРИ ПАДЕНИИ СВЕТА ПОД УГЛОМ

Приводятся результаты расчетов оптимальной трехслойной оптической структуры для просветления подложки при падении света под углом. Алгоритм расчетов основан на использовании метода негладкой оптимизации ( $r$ -алгоритма).

*A.V. Mița, V.I. Pețko, N.G. Zhurbenko*

#### EXPLORE OPTIMAL PARAMETERS THREE-LAYER OPTICAL STRUCTURES AT AN ANGLE OF INCIDENCE OF THE LIGHT

The results of calculations of optimal three-layer structure for optical bleaching of the substrate at an angle of incidence of the light. Algorithm calculations based on the method of nonsmooth optimization ( $r$ -algorithm).

1. *Furman Sh., Tikhonravov A.V.* Basics of optics of multilayer systems // Editions Frontiers, Gif-sur Yvette. – 1992. – 242 p.
2. *Abeles F.* Matrix method // Ann.de Physique. – 1950. – Vol. 5. – P. 596 – 640.
3. *Стецюк П.И., Мица А.В.* О задачах оптимизации параметров для многослойных оптических покрытий // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – С. 107 – 115.
4. *Мица О.В., Стецюк П.И.* Задача знаходження оптимальних параметрів однорідного оптичного покриття // Теорія оптимальних рішень. – 2003. – № 2. – С. 127 – 134.
5. *Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51 – 59.
6. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979. – 199 с.
7. *Крылова Т.Н.* Интерференционные покрытия. – Л.: Машиностроение, 1973. – 224 с.
8. *Путинин Э.С.* Оптические покрытия. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 227 с.
9. *Риттер Э.* Пленочные диэлектрические материалы для оптических применений // Физика тонких пленок. – М.: Мир, 1978. – 8. – С. 7 – 27.

Одержано 07.04.2014