

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ В ПОЛЕВОМ ТРАНЗИСТОРЕ

А.М. Булах, Е.А. Вострикова, Г.В. Поволоцкая, В.И. Рыжий¹

РНИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия;

¹ Университет Айзу, Япония

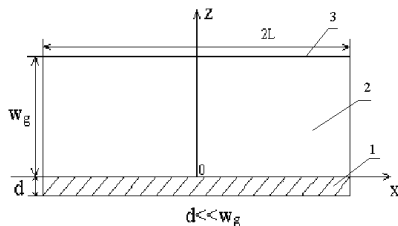
E-mail: vostr@ard.kiae.ru

Рассматриваются процессы образования ударных волн и солитонов в твердотельной плазме в канале полевого транзистора на основе гидродинамической модели, включающей уравнение Навье-Стокса, уравнение непрерывности и двумерное уравнение Пуассона. Показано, что рассматриваемая система уравнений для случая волн «мелкой воды» сводится к уравнению Кортевега-де-Вриза-Бюргера, которое имеет решение в виде ударной волны с осциллирующим фронтом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Плазменные волны, т.е. самосогласованные пространственно-временные процессы изменения плотности электронов и электрического поля в двумерном электронном газе (2D-газ), могут возбуждаться в канале полевого транзистора. Использование плазменных эффектов позволяет повысить рабочую частоту полевых транзисторов вплоть до терагерцового диапазона частот, поскольку характерные скорости плазменных волн в полевом транзисторе составляют 10^8 см/с на расстоянии порядка 1 мкм.

Рассмотрим так же, как и в работах [1-3], произвольную модель полевого транзистора на основе системы *AlGaAs* (см. рисунок).



Принципиальная схема полевого транзистора.

1 - канал, 2 - диэлектрический слой между затвором и каналом, 3 - затвор

Будем считать, что расстояние от затвора до канала транзистора $W_g \approx 0,2$ мкм и характерная поверхностная плотность электронов в канале $\Sigma_0 = 10^{12}$ см⁻². Характерная толщина канала, содержащего двумерный электронный газ, $d \sim 0,01$ мкм. Поскольку толщина канала транзистора очень мала, то зависимость плотности электронов от координаты z определяется как $\Sigma_0 \delta(z)$, где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака. Длина канала $L \sim 10$ мкм значительно превосходит длину свободного пробега электронов. В этих условиях электроны находятся в потенциальной, квантово-механической яме по оси Z , а вдоль оси X поведение электронов описывается с помощью уравнений гидродинамики, дополненных двумерным уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Vv + V \frac{\partial V}{\partial x} - K \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{e}{m^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=0}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Sigma V) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi e}{\kappa} (\Sigma - \Sigma_d) \delta(z). \quad (3)$$

Здесь $V = V(t, x)$ и $\Sigma = \Sigma(t, x)$ – скорость электронов вдоль канала и поверхностная плотность электронов соответственно, $\varphi = \varphi(t, x, z)$ – электрический потенциал, приложенный к затвору относительно канала, Σ_d – концентрация доноров, ν – частота столкновений электронов с фононами или примесями, K – коэффициент вязкости, связанный с электрон-электронными столкновениями, $e = |e|$ и m^* – заряд электрона и эффективная масса электрона соответственно, κ – диэлектрическая проницаемость. Плотность легирующих примесей связана с плотностью электронов в канале в отсутствие возмущений Σ_0 как

$$\Sigma_0 = \Sigma_d + \frac{\kappa V_g}{4\pi e W_g}, \quad (4)$$

где V_g – потенциал на затворе относительно канала. При $V_g = const$ с помощью линеаризации уравнений (1)-(3), пренебрегая диссипативными процессами, можно получить линейное дисперсионное уравнение для собственных колебаний двумерного электронного газа с частотой ω и волновым числом q [1-3]:

$$\omega = \frac{s_0^2 q}{W_g (\coth|q|W_g + 1)}. \quad (5)$$

Здесь $s_0^2 = \frac{4\pi e^2 \Sigma_0 W_g}{m^* \kappa}$ – фазовая скорость плазменных волн в линейном приближении. Полученное дисперсионное уравнение соответствует уравнению для гравитационных волн, распространяющихся на неограниченной поверхности жидкости [4]. В зависимости от величины W_g в двумерном электронном газе возможно возбуждение длинных ($qW_g \ll 1$) и коротких ($qW_g \gg 1$) волн, дисперсионные уравнения для которых соответствуют гравитационным волнам с длиной намного больше глубины водоема (волны на «мелкой» воде)

$$\omega = s_0 q \left(1 - \frac{W_g q}{2}\right)$$

и волнам, длина которых намного меньше глубины водоема (волны на «глубокой» воде),

$$\omega = s_0 \sqrt{\frac{q}{2W_g}}.$$

Рассмотрим простейший вид движения – волны на «мелкой» воде ($qW_g \ll 1$). В этом случае система уравнений (1)-(3) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{s_0^2}{\Sigma_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial x} = -V \frac{\partial \Sigma}{\partial x}. \quad (7)$$

При выводе уравнений (6) и (7) использована зависимость между потенциалом $\varphi(x, t)|_{z=0}$ и поверхностной плотностью электронов $\Sigma(x, t)$ в канале, имеющая место в общем, в том числе нелинейном случае [5]:

$$\frac{\varphi(x, t)|_{z=0} - V_g}{W_g} = \frac{4\pi e}{k} (\Sigma_d - \Sigma(x, t)). \quad (8)$$

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ В КАНАЛЕ ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

2.1. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ. РЕШЕНИЕ РИМАНА

В 2006 и 2007 годах совместно с сотрудниками Университета Айзу (Япония) с целью изучения и моделирования эффектов возникновения цунами в океане под руководством профессора А. А. Иванова проводились исследования нелинейных процессов в двумерной электронной плазме в баллистическом полевом транзисторе. В процессе работы было найдено аналитическое решение нелинейных уравнений, описывающих двумерную электронную плазму в виде ударных волн, и показано, что механизм возникновения таких волн является основным для создания генератора терагерцового излучения на основе полевого транзистора [5].

Как доказано в теории «мелкой» воды, уравнения, описывающие движение несжимаемой жидкости в канале, глубина которого достаточно мала, формально совпадают с видом уравнений адиабатического течения политропного газа с показателем $\gamma = 2$. Это обстоятельство позволяет переносить в теорию «мелкой» воды все газодинамические соотношения, относящиеся к течению без образования ударных волн. Ударная волна в текущей по каналу жидкости представляет собой резкий скачок высоты жидкости и ее скорости, так называемый «прыжок воды». Нетрудно показать, что это утверждение также справедливо и для двумерного электронного газа в канале полевого транзистора. В нелинейном случае длинноволновые возмущения распространяются в канале полевого транзистора относительно газа с конечной скоростью, зависящей от поверхностной плотности электронов [5]:

$$s(\Sigma) = s_0 \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma_0}}. \quad (9)$$

С учетом выражения (9) уравнение (6) можно переписать в виде уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad (10)$$

где $p^* = \frac{s_0 \Sigma^2}{2\Sigma_0}$ является величиной, аналогичной

давлению политропного газа. Так же, как и для волн на «мелкой воде» [4], мы получили связь $p^* \sim \Sigma^2$, т.е. $\gamma = 2$. Следовательно, в двумерном электронном газе при неизменном расстоянии между затвором и каналом полевого транзистора W_g ударная волна будет представлять собой скачок плотности электронов $\Sigma_2 > \Sigma_1$. Здесь индекс (1) относится к среде перед фронтом, а индекс (2) к среде после фронта. Так же, как и для политропного газа, при этом будет справедливо следующее предельное соотношение для ударных волн большой интенсивности, удовлетворяющее адиабате Гюгонио [4]:

$$\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 3. \quad (11)$$

Для понимания процесса образования ударной волны в двумерном электронном газе полевого транзистора, так же, как и при решении задачи сжатия вещества излучением лазера [6], в работе [5] было найдено непрерывное решение уравнений (6) – (7), которое описывает начальную стадию движения в виде простой волны сжатия (волны Римана) [4]. В политропном газе такие волны возникают при сжатии неподвижного газа поршнем,двигающимся с постоянным ускорением в начальный момент времени [4]. Рассмотрим ситуацию, когда в центральной части канала транзистора создается и поддерживается с течением времени неоднородное распределение плотности электронов, что приводит к распространению возмущений в виде волн Римана в двумерном электронном газе. Полученная в работе [5] волна Римана представляет собой характеристику, вдоль которой возмущения, распространяющиеся от созданного таким образом «поршня», двигаются с постоянной скоростью. Характеристики ведут себя так, что на некотором расстоянии от быстро созданного и поддерживаемого возмущения плотности электронов они сходятся в одну точку, где происходит образование ударной волны. Скорость профиля простой волны при начальных условиях $V = 0$ и $\Sigma = \Sigma_0$ будет определяться как

$$V(\Sigma) = 2(s(\Sigma) - s_0), \quad (12)$$

решение Римана будет иметь вид:

$$x = [V(\Sigma) + s(\Sigma)]t + C(\Sigma), \quad (13)$$

где функция $C(\Sigma)$ зависит от начальных условий [5]. Точка пересечения характеристик (время и место образования ударной волны) может быть там, где скорость волны равна нулю (ударная волна возникнет на границе между простой волной и неподвижным газом). Как следует из работы [4], время опрокидывания волны определяется в этом случае как

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \Sigma} \right|_{t=t_{br}} = 0, \quad t_{br} = -\frac{2 \Sigma_0}{3 s_0} \frac{dC}{d\Sigma} \Big|_{\Sigma=\Sigma_0}. \quad (14)$$

Опрокидывание волны Римана может произойти и

раньше. Тогда момент и место опрокидывания волны определяются из условия образования точки перегиба на кривой $\Sigma(x)$:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \Sigma} \right|_{t=t_{br}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \Sigma^2} \right|_{t=t_{br}} = 0.$$

Для определения времени опрокидывания волны Римана получаем два уравнения:

$$t_{br} = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\Sigma_0 \Sigma}}{s_0} \frac{dC}{d\Sigma}, \quad \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \Sigma^2} \right|_{t=t_{br}} = 0, \quad (15)$$

Из уравнений (15) следует, что ударная волна образуется или на границе с неподвижным газом, или в точке перегиба функции $C(\Sigma)$.

2.2. ШИРИНА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для определения толщины внутренней структуры фронта ударной волны необходимо учитывать в уравнениях (6) и (7) дисперсионные и диссипативные эффекты (вязкость и трение). Диссипация (как и дисперсия) приводит к расплыванию профиля волны и может уравновесить нелинейное увеличение крутизны профиля. При этом скачок плотности можно считать стационарным: он распространяется с постоянной скоростью, почти не меняя формы. Рассмотрим случай, когда коэффициент вязкости достаточно велик, так что ширина фронта скачка будет определяться фазовой скоростью движения волны и коэффициентом вязкости. Поскольку коэффициент вязкости K имеет размерность коэффициента диффузии, то при скорости фронта порядка s_0 ширина фронта определяется как $\delta \approx K/s_0$. При небольшой ширине волнового фронта δ выражение, включающее коэффициент вязкости в уравнении (1) $-Kq^2v$, значительно превосходит выражение, связанное со столкновениями vV . Действительно, полагая $q \approx \delta^{-1}$ и сравнивая эти выражения, находим, что вязкость является доминирующим процессом, если $\delta < \sqrt{K/v}$. Подставляя выражение для δ в неравенство, записанное выше, можно получить следующее условие, при котором вязкость влияет на формирование фронта ударной волны: $K \ll s_0^2/v = K_c$. Полагая $s_0 = 10^8$ см/с и $v = 10^{12}$ с⁻¹, получаем $K_c \approx 10^4$ см²/с. Для канала *GaAs* имеем $K \approx 15$ см²/с [5]. Следовательно, получаем, что $K \ll K_c$. Влияние дисперсии на форму волнового фронта скажется гораздо раньше, если $K < s_0 W_g = K_d$ при $K_d \approx K_c$. Таким образом, если $\delta > W_g$, то скачок плотности произойдет еще до вступления в игру дисперсионных эффектов. В противном случае влияние дисперсии проявится раньше, и система будет недиссипативной, что приведет к образованию солитонов.

Для более точного определения ширины фронта ударной волны учтем в уравнении (6) пока только влияние вязкости. Тогда система уравнений (6)-(7) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} = -\frac{s_0^2}{\Sigma_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + K \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\Sigma V)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Будем искать решение в виде стационарной бегущей волны с постоянной скоростью u , зависящее от координаты x и времени t следующим образом: $V = V(\xi)$, $\xi = x - ut$. Тогда уравнения (16), (17) можно переписать как

$$(V - u) \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{s_0^2}{\Sigma_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} + K \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\Sigma (V - u)) = 0. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19), получаем:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\Sigma_1 (V_1 - u)}{V(\xi) - u}. \quad (20)$$

Учитывая соотношение (20) и интегрируя уравнение (18) с использованием следующего граничного условия:

$$\left. \frac{dV}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow +\infty} = 0, \quad V(\xi \rightarrow +\infty) = V_1,$$

получаем уравнение, определяющее профиль ударной волны:

$$K \frac{\partial (V - u)}{\partial \xi} = \frac{(V - u)^2}{2} + \frac{s_0^2 \Sigma_1 (V_1 - u)}{\Sigma_0 (V - u)} - \left(\frac{(V_1 - u)^2}{2} + \frac{s_0^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} \right). \quad (21)$$

Решение уравнения (21) может быть получено с использованием численных методов в пределах, даваемых адиабатой Гюгонио для политропного газа [4]. При этом необходимо использовать второе граничное условие:

$$V(\xi \rightarrow -\infty) = V_2, \quad \Sigma(\xi \rightarrow -\infty) = \Sigma_2.$$

При достаточно малых, но конечных амплитудах волн $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma'$, $\Sigma' \ll \Sigma_0$ и малых диссипативных коэффициентах уравнения (16) и (17) можно привести к уравнению Бюргерса [7,8]. Для этого необходимо ограничиться нелинейными членами второго порядка и считать диссипативные коэффициенты малыми первого порядка. Тогда линейные диссипативные члены будут малыми второго порядка, а нелинейными диссипативными членами можно пренебречь. Будем искать решения уравнений (16) и (17) в виде $\Sigma(x, t) = \Sigma(V) + \varphi(x, t)$, где $\Sigma(V)$ определяется теми же соотношениями, что и в простой волне [5]:

$$\frac{dV(\Sigma)}{d\Sigma} = \frac{s_0}{\sqrt{\Sigma_0 \Sigma}}, \quad \text{а } \varphi(x, t) \text{ будем искать в таком виде,}$$

чтобы полученное решение было наиболее близко к простой волне. С точностью до членов второго порядка будем считать, что $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + s_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. В этих приближениях из уравнений (16) и (17) достаточно легко получить уравнение типа уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (s_0 + \frac{3}{2}V) \frac{\partial V}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (22)$$

где $\mu = \frac{K}{2}$.

Как показано в работе [9], в этом приближении

также легко учитывать только влияние дисперсионных эффектов на распространение нелинейной волны в двумерном электронном газе в полевом транзисторе. Для этого в указанном приближении уравнения (6), (7), дополненные дисперсионным членом, имеющие следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} = - \frac{s_0^2}{\Sigma_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{s_0^2}{\Sigma_0} \frac{W_g^2}{6} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial x^3}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma V)}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

приводятся к уравнению:

$$\frac{\partial \Sigma'}{\partial t} + \left(\frac{3}{2} s_0 \frac{\Sigma'}{\Sigma_0} + s_0 \right) \frac{\partial \Sigma'}{\partial x} + \frac{s_0 W_g^2}{6} \frac{d^3 \Sigma'}{dx^3} = 0. \quad (25)$$

Как и положено для случая «мелкой» воды, уравнение (25) имеет решение типа солитона [10].

Учет как диссипативных, так и дисперсионных эффектов позволяет наиболее корректно исследовать структуру скачка плотности электронов в рамках приближения стационарной волны. Поскольку вне ударного фронта все переменные в среде меняются очень медленно, можно считать, что они остаются постоянными. Этим значениям соответствуют состояния равновесия на фазовой плоскости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей стационарные волны. Тогда задача исследования структуры фронта ударной волны сводится к нахождению единственной фазовой траектории, которая соединяет эти состояния равновесия.

2.3. ОБРАЗОВАНИЕ СОЛИТОНОВ

Для выяснения влияния дисперсии на структуру фронта ударной волны учтем одновременно в уравнениях (6) и (7) влияние дисперсионных и диссипативных эффектов в описанном выше приближении. Тогда система уравнений (6) и (7) приводится к уравнению Кортевега-де-Вриза-Бюргерса [8]. В переменных $x' = x - s_0 t$, $t = \tau$, $V' = \frac{3}{2} V$ это уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial V'}{\partial \tau} + V' \frac{\partial V'}{\partial x'} = - \frac{s_0 W_g^2}{6} \frac{\partial^3 V'}{\partial x'^3} + \mu \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2}. \quad (26)$$

Найдем решение уравнения (26) в виде стационарной волны, двигающейся со скоростью u' $V' = V'(\xi)$, $\xi = x - u't$. Подставив эту функцию в уравнение (26) и проинтегрировав его один раз, получаем уравнение, имеющее вид уравнения нели-

нейного осциллятора с затуханием:

$$\frac{s_0 W_g^2}{6} \frac{\partial^2 V'}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial V'}{\partial \xi} = - \frac{\partial W}{\partial V'} = uV' - \frac{(V')^2}{2}. \quad (27)$$

Таким образом, амплитуда волны осциллирует в пространстве подобно тому, как меняется координата частицы в потенциальной яме W . В результате фронт ударной волны будет иметь осциллирующую структуру, имеющую форму солитона. Подобный эффект «распада» ударной волны на солитоны наблюдался при численном моделировании процессов формирования ударных волн в двумерном электронном газе в полевом транзисторе [5].

Авторы глубоко признательны и благодарны В.М. Четечкину за полезные обсуждения при выполнении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук и их научных руководителей № МК-4444.2008.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.I. Dyakonov, M.S. Shur. Shallow water analogy for ballistic field effect transistor: New mechanism of plasma wave generation by DC current // *Phys. Rev. Lett.* 1993, v.71, p.2465-2468.
2. M.I. Dyakonov, M.S. Shur. Plasma wave electronics: novel terahertz devices using two dimensional electron fluid // *IEEE Trans. Electron Devices.* 1996, v.43, №10, p.1640-1645.
3. V. Ryzhii, A. Satou, I. Khmyrova, A. Chaplik, M.S.Shur. Plasma oscillations in a slot diode structure with a two-dimensional electron channel // *J. Appl. Phys.* 2004, v.96, №12, p.7625-7628.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика*. М.: "Наука", 1986.
5. E. Vostrikova, A. Ivanov, I. Semenikhin, V. Ryzhii. Electrical excitation of shock and soliton-like waves in two-dimensional electron channels // *Phys. Rev. B.* 2007, v.76, №3, p.035401-1 – 035401-8.
6. А.А. Иванов. *Физика сильнонеравновесной плазмы*. М.: "Атомиздат", 1977.
7. В.И. Карпман. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. М.: "Наука", 1973.
8. Б.Б. Кадомцев. *Коллективные явления в плазме*. М.: "Наука", 1976.
9. А.О. Говоров, В.М. Ковалев, А.В. Чаплик. Солитоны в полупроводниковых микроструктурах с двумерным электронным газом // *Письма в ЖЭТФ*. 1999, т.70, с.479-481.

Статья поступила в редакцию 15.05.2008 г.

NON-LINEAR PROCESSES IN SOLID STATE PLASMAS IN FIELD-EFFECT TRANSISTOR

A.M. Bulakh, E.A. Vostrikova, G.V. Povolotskaya, V.I. Ryzhii

The paper deals with the formation of shock and soliton like waves in two dimensional electron channel of field-effect transistor within the framework of the model based on hydrodynamic electron transport equations coupled with two-dimensional Poisson equation. It is shown that the system of equations under consideration is reduced to the Korteweg-de Vries-Burgers equation for the case of "shallow" water waves. The possible solution of this equation is stationary shock wave with oscillating wave front.

НЕЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ У ТВЕРДОТІЛЬНІЙ ПЛАЗМІ В ПОЛЬОВОМУ ТРАНЗИСТОРІ

A.M. Булах, Є.А. Вострикова, Г.В. Поволоцька, В.І. Рижий

Розглядаються процеси утворення ударних хвиль і солітонів у твердотільній плазмі в каналі польового транзистора на основі гідродинамічної моделі, що включає рівняння Нав'є-Стокса, рівняння безперервності і двовимірне рівняння Пуассона. Показано, що система рівнянь для випадку хвиль "дрібноі" води зводиться до рівняння Кортевега-де-Вриза-Бюргерса, що має рішення у вигляді ударної хвилі з осцилюючим фронтом.