УДК 533.9

ЗАТУХАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Б. Красовицкий

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: krasovit@mail.ru

Исследованы электромагнитные свойства релятивистской плазмы в условиях, когда электромагнитная волна распространяется вдоль сильного внешнего магнитного поля. Выполнено разделение реальной и мнимой частей общей формулы [1], позволяющее проанализировать дисперсию и бесстолкновительное затухание электромагнитного возмущения в широкой области параметров, включающей как слабонагретую, так и релятивистскую плазму. Полученные результаты могут найти применение в экспериментах по нагреву и ускорению плазмы мощным лазерным импульсом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистское рассмотрение электромагнитных волн в плазме необходимо при очень высокой температуре ($T \approx mc^2$), когда тепловая скорость электронов сравнима со скоростью света, или при исследовании волн, фазовая скорость которых близка к скорости света ($v_{ph} \approx c$). В магнитоактивной плазме учет релятивистских эффектов также необходим, если частота волны близка к гирочастоте электронов [1].

Показатели преломления двух электромагнитных волн с круговой поляризацией, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля B_0, равны

$$N_{1,2}^2 = \varepsilon_{11} \pm i\varepsilon_{12}\,, \qquad (1)$$

а компоненты тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij}, найденные в монографии [1], определяются функцией распределения релятивистских электронов:

$$f(p) = C_e \exp(-\mu\gamma),$$
$$C_e = \frac{\mu}{4\pi m^3 c^3 K_2(\mu)},\ \mu = \frac{mc^2}{T},\ \gamma = \sqrt{1 + p^2/m^2c^2}, \qquad (2)$$

где $K_2(\mu)$ – функция Макдональда.

Для резонансной волны, когда направление вращения вектора электрического поля совпадает с направлением вращения электронов в магнитном поле, дисперсионное уравнение (1) имеет вид:

$$N^2 = 1 + i\frac{\omega_p^2}{c^2k^2 z}\frac{\mu^2}{K_2(\mu)}\int_0^\infty \frac{K_2(w)}{w^2} e^{-ix\xi} d\xi\,, \qquad (3)$$

где

$$w^2 = \mu^2 + \left(1 - z^2\right)\xi^2 - 2i\mu z\xi\,, \qquad (4)$$

ω и k – частота и волновое число, $z = \omega/ck$, $x = \omega_c/ck$, $\omega_c = eB_0/mc$ и $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_p/m}$ – циклотронная и ленгмюровская частоты, n_p – плотность плазмы.

Предельный переход к нерелятивистской плазме $\mu \gg 1$ и $\gamma \approx 1 + p^2/2m^2c^2$ реализуется в области малых фазовых скоростей $\omega/k \ll c$. Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням $z \ll 1$ и $x \ll 1$, получаем:

$$N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2\sqrt{2\mu}}{c^2k^2 z} e^{-\mu(z-x)^2/2}\left(\frac{i\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\sqrt{\mu/2}(z-x)} e^{\xi^2} d\xi\right). \qquad (5)$$

Медленная электромагнитная волна существует при $\omega_c > \omega$, где показатель преломления холодной (гидродинамической) плазмы $N^2 > 0$.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Рассмотрим электромагнитную волну с фазовой скоростью, меньшей скорости света $z < 1$. Перейдем к новой переменной

$$\xi = \frac{\mu}{1 - z^2}\left(\zeta + iz\right) \qquad (6)$$

и используем формулы $w = \mu\sqrt{b\left(1 + \zeta^2\right)}$ и $\zeta = \left(\xi/\mu b\right) - iz$ для преобразования дисперсионного уравнения (3) к виду:

$$N^2 = 1 + i\frac{\omega_p^2}{c^2k^2}\frac{\mu}{K_2(\mu)}\frac{D}{z}\,, \qquad (7)$$

где

$$D = \int_{-iz}^{-iz+\infty} K_2\left(ab\sqrt{1+\zeta^2}\right) e^{qb(z - i\zeta)} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$
$$a = \mu/\sqrt{b}, \quad b = \left(1 - z^2\right)^{-1}, \quad q = \mu x. \qquad (8)$$

После интегрирования по замкнутому прямоугольному контуру интеграл (8) допускает простое разделение реальной и мнимой частей дисперсионного уравнения:

$$D = \int_0^\infty K_2\left(ab\sqrt{1+\zeta^2}\right) e^{-iqb\zeta}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2} + i\int_0^z K_2\left(ab\sqrt{1-\zeta^2}\right) e^{-qb\zeta}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}. \qquad (9)$$

Используем интегральное представление функции для Макдональда [2]:

$$K_\nu(XZ) = \frac{Z^\nu}{2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{X}{2}\left(t + \frac{Z^2}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^{\nu+1}} \qquad (10)$$

и, меняя порядок интегрирования, представим (9) в виде:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2ab}}\int_0^\infty e^{-(ab/2)\left[t\left(1+q^2/a^2\right)+t^{-1}\right]}\frac{dt}{t^{5/2}} \times \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\sqrt{ab/2t}(z - qt/a)} ie^{\zeta^2} d\zeta\right]. \qquad (11)$$

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2008. № 4.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (6), с.68-69.

Возвращаясь с помощью (10) к функциям Макдональда, находим:

$$D=\frac{\pi}{2a^2b^2}\left(1+b\sqrt{a^2+q^2}\right)e^{-b\sqrt{a^2+q^2}}+i\int_0^1 G(\zeta)\,d\zeta\,, \quad (12)$$

где

$$G(\zeta)=e^{-bzq\zeta^2}\frac{X}{Y}\left[z\frac{X}{Y}K_2(abY)-\frac{q}{a}K_1(abY)\right],$$
$$X=1+\frac{q^2}{a^2}\left(1-\zeta^2\right),\quad Y=\sqrt{X\left(1-z^2\zeta^2\right)}. \quad (13)$$

Из формул (7) и (12) следует дисперсионное уравнение в интегральной форме:

$$N^2=1+\frac{\omega_p^2}{c^2k^2z}\frac{\mu}{K_2(\mu)}e^{bzq}\times$$
$$\times\left[\frac{\pi i}{2a^2b^2}\left(1+b\sqrt{a^2+q^2}\right)e^{-b\sqrt{a^2+q^2}}-\int_0^1 G(\zeta)\,d\zeta\right], \quad (14)$$

определяющее затухание и дисперсию медленной ($z=\omega/ck<1$) электромагнитной волны в релятивистской магнитоактивной (q>0) плазме.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА

Альтернативным (14) является представление дисперсионного уравнения в виде ряда. Возвращаясь к формуле (9), положим

$$D=D_0+i\left(D_1+D_2\right), \quad (15)$$

где

$$D_0=\int_0^\infty K_2\left(ab\sqrt{1+\zeta^2}\right)\frac{\cos qb\zeta}{1+\zeta^2}d\zeta=$$
$$=\frac{\pi}{2a^2b^2}\left(1+b\sqrt{a^2+b^2}\right)\mathrm{e}^{-b\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (16)$$

а для вычисления интегралов

$$D_1=-\int_0^\infty K_2\left(ab\sqrt{1+\zeta^2}\right)\frac{\sin qb\zeta}{1+\zeta^2}d\zeta,$$
$$D_2=\int_0^z K_2\left(ab\sqrt{1-\zeta^2}\right)\frac{\exp(-qb\zeta)}{1-\zeta^2}d\zeta, \quad (17)$$

используем формулы теории функций Бесселя [2]:

$$\frac{K_2\left(ab\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{1-\zeta^2}=\sum_{n=0}^\infty\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!!}\frac{a^n}{b^n}K_{n+2}(ab),$$
$$\int_0^\infty K_2\left(ab\sqrt{1+\zeta^2}\right)\zeta^{2n+1}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}=\frac{b^n}{a^{n+1}}(2n)!!K_{n-1}(ab). \quad (18)$$

Представляя $\sin qb\zeta$ в виде ряда и выполняя интегрирование, находим:

$$D_1=-\sum_{n=0}^\infty\frac{(-ab)^n}{(2n+1)!!}\left(\frac{q}{a}\right)^{2n+1}K_{n-1}(ab). \quad (19)$$

Второй интеграл (17) выражается через неполную гамма-функцию

$$D_2=z\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(abz^2\right)^n}{(2n)!!}K_{n+2}(ab)\int_0^1\zeta^{2n}e^{-zbq\zeta}d\zeta,$$
$$\gamma(2n+1,zbq)=(qzb)^{2n+1}\int_0^1\zeta^{2n}e^{-zbq\zeta}d\zeta. \quad (20)$$

4. АСИМПТОТИКИ

В области параметров

$$K_\nu(abY)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2abY}}\,e^{-abY},\quad ab=\frac{\mu}{\sqrt{1-z^2}}\gg 1 \quad (21)$$

интеграл (12) упрощается к виду:

$$\approx\int_{-1}^1\frac{X}{Y^{3/2}}\left(\frac{zX}{Y}-\frac{q}{a}\right)\exp\left[f(\zeta)\right]d\zeta, \quad (22)$$

где

$$f(\zeta)=-ab\left(Y+zq\zeta^2/a\right).$$

Величина интеграла (22) определяется производной

$$f'(1)=\frac{ab}{\sqrt{1-z^2}}(z-x)^2,$$

а асимптотика дисперсионного уравнения (14) совпадает с гидродинамической

$$N^2=1-\frac{\omega_p^2}{c^2k^2}\frac{1}{z(z-x)}. \quad (23)$$

В ультрарелятивистской плазме

$$ab=\frac{\mu}{\sqrt{1-z^2}}\ll 1, \quad (24)$$

полагая в (14) $K_1\approx z^{-1}$ и $K_2\approx 2z^{-2}$ и выполняя интегрирование, получаем

$$N^2-1=\frac{\omega_p^2\mu}{2c^2k^2z}\left\{\frac{i\pi}{2}\left(1-z^2\right)-\left[z^2+\left(z-z^3-\mu x\right)\ln\frac{1+z}{1-z}\right]\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Силин, А.А. Рухадзе. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.* М.: «Госатомиздат», 1961, с.147.
2. И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: «Физматгиз», 1962, 895 с.

Статья поступила в редакцию 31.05.2008 г.

DAMPING AND DISPERSION OF RELATIVISTIC PLASMA IN THE STRONG LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

V.B. Krasovitsky

Electromagnetic properties of relativistic plasma in conditions when the electromagnetic wave is distributed along a strong external magnetic field are investigated. Division of real and imaginary parts of the general formula [1] is executed, allowing to analyse a dispersion and collisionless damping of electromagnetic indignation in the wide area of parameters including as weak-heat, and relativistic plasma. The received results can find application in experiments on heating and acceleration of plasma by a powerful laser pulse.

ЗАТУХАННЯ І ДИСПЕРСІЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ПЛАЗМИ В СИЛЬНОМУ ПОВЗДОВЖНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

В.Б. Красовицький

Досліджено електромагнітні властивості релятивістської плазми в умовах, коли електромагнітна хвиля поширюється вздовж сильного зовнішнього магнітного поля. Виконано розділення реальної та уявної частин загальної формули [1], що дозволяє проаналізувати дисперсію та беззіткненеве затухання електромагнітного збурення в широкій області параметрів, яка включає як слабонагріту, так і релятивістську плазму. Отримані результати можуть знайти застосування в експериментах з нагріву та прискорення плазми потужним лазерним імпульсом.