УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

М.М. Копец

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Статья посвящена исследованию линейно-квадратической задачи оптимального управления процессом колебаний балки переменного поперечного сечения в случае свободных концов балки. Для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Анализ этих условий дал возможность вывести систему интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Решение этой системы использовано при построении явной формулы для вычисления оптимального управления.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, оптимальное управление, метод множителей Лагранжа, необходимые условия оптимальности, колебания балки, частные производные, система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

Статтю присвячено дослідженню лінійно-квадратичної задачі оптимального керування процесом коливань бруса змінного поперечного перерізу у випадку вільних кінців бруса. Для розглядуваної задачі оптимізації одержано необхідні умови оптимальності. Аналіз цих умов дав можливість вивести систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті з частинними похідними. Розв'язок цієї системи використано при побудові явної формули для обчислення оптимального керування.

Ключові слова: лінійно-квадратична задача, оптимальне керування, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності, коливання бруса, частинні похідні, система інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними.

ВВЕДЕНИЕ

Последнее пятидесятилетие характеризуется бурным развитием техники. Существенный прогресс наблюдается в ракетостроении, самолетостроении, судостроении, космической технике и т.п. В каждой из перечисленных отраслей имеют место быть колебательные процессы. В одних случаях их можно с пользой учитывать для повышения качества процесса, в других, наоборот, надо подавлять в силу их отрицательного влияния на окончательный процесс. Это означает, что колебательные процессы необходимо не только изучать, но и уметь эффективно ими управлять. Подобные задачи эффективного управления механическими процессами как раз и изучает теория оптимального управления. Одной из наиболее фундаментальных проблем в теории оптимального управления является линейно-квадратичная задача. Под этим термином подразумевается проблема нахождения минимума квадратичного функционала на множестве решений системы линейных дифференциальных уравнений, правые части которых включают в себя управляющие параметры (управления). Если рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, то в этом случае линейно-квадратичная задача исследована достаточно подробно [1, 2]. В практических приложениях часто встречаются математические модели, которые включают в себя линейные дифференциальные уравнения с частными производными или же системы таких уравнений. Понятно, что такие задачи более сложны и поэтому менее исследованы. В монографии [3, с. 56] предложена идея трактовать движение летательного аппарата подобно колебаниям упругой балки переменного поперечного сечения со свободными концами.

В данной статье эта идея получила дальнейшее развитие в форме задачи оптимального гашения колебательных процессов рассматриваемого процесса.

Цель работы — для решения задачи оптимального управления процессом колебаний балки переменного поперечного сечения в случае свободных концов балки определить необходимые условия оптимальности и вывести решение системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными для вычисления оптимального управления.

Постановка задачи

Вынужденные колебания балки переменного поперечного сечения можно описать следующим линейным дифференциальным уравнением с частными производными:

$$m(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)=u(t,x), \tag{1}$$

где $0\le x\le l$, $t_0\le t\le t_1$, действительные числа $l\succ 0$, $t_0\ge 0$, $t_1\succ t_0$ известны, $EJ(x)$ — жесткость балки, $m(x)$ — закон распределения массы вдоль продольной оси балки, функция $z(t,x)$ описывает прогиб балки в точке x в момент времени t. Начальные условия для уравнения (1) имеют вид:

$$z(t_0,x)=h(x),\ \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=j(x), \tag{2}$$

где функции $h(x)\in W_2^{1,0}(0,l)$ $j(x)\in L_2(0,l)$ предполагаются известными. Краевые условия для уравнения (1) заданы следующим образом:

$$
\begin{cases}
EJ(0)\dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}\right)=0,\\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}\right)=0.
\end{cases} \tag{3}
$$

Условия (3) означают, что концы балки свободны. Такая ситуация возникает, например, при исследовании динамики полета самолета. Если через Ω обозначить множество $\Omega=\{(t,x):t\in[t_0,t_1],x\in[0,l]\}$, то функция $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Для фиксированного допустимого управления $u(t,x)$ под решением $z(t,x)$ уравнения (1) подразумеваем ее обобщенное решение $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. Качество управляемого процесса оценивается с помощью следующего функционала:

$$
I(u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)z^2(t_1,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+
$$
$$
+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [m(x)z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt\,. \tag{4}
$$

Требуется найти допустимое управление $u(t,x)$ и соответствующее ему решение $z(t,x)$ задачи (1)–(3), на которых реализуется минимальное значение функционала (4). Такое управление называется оптимальным.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Решение сформулированной выше задачи оптимального управления (1)–(4) может быть найдено с помощью метода множителей Лагранжа [4]. Для этого следует рассмотреть функционал

$$
\Psi(p,u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)z^2(t_1,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+
$$
$$
+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [m(x)z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)[u(t,x)- \tag{5}
$$
$$
-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)-m(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\Bigg]dxdt\,.
$$

Такой подход позволяет вместо задачи на условный экстремум (1)–(4) исследовать задачу минимизации функционала (5) с учетом условий (2) и (3). Следующий шаг состоит в нахождении приращения $\Delta\Psi$ функционала (5). С учетом соотношения (5) выражение для $\Delta\Psi$ примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\Delta\Psi &= \frac{1}{2}\int_0^l m(x)[z(t_1,x)+\varepsilon\delta z(t_1,x)]^2\,dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [m(x)[z(t,x)+\varepsilon\delta z(t,x)]^2+[u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)]^2]dxdt + \\
&+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [p(t,x)+\varepsilon\delta p(t,x)][u(t,x)+\varepsilon u(t,x)- \\
&-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\left(\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial x^2}\right)\right)- \\
&-m(x)\left(\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right)\Bigg]dxdt - \\
&-\frac{1}{2}\int_0^l m(x)z^2(t_1,x)dx-\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx - \\
&-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)[u(t,x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)-m(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\Bigg]dxdt\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Если предположить выполнение краевых условий

$$
\begin{cases}
EJ(0)\dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}=0, \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}\right)=0, \\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0, \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}\right)=0,
\end{cases}
\tag{7}
$$

то после преобразований, подобных использованным в [4], приходим к такому соотношению:

$$
\begin{aligned}
\Delta\Psi &= \varepsilon\int_0^l m(x)\left(z(t_1,x)+\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\right)\delta z(t_1,x)dx + \\
&+\varepsilon\int_0^l m(x)\left(\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}-p(t_1,x)\right)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx + \\
&+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\left(m(x)z(t,x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)-\right.\right.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ISSN 0452-9910. **Кибернетика и вычисл. техника. 2015. Вып. 182**

$$-m(x)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\Bigg)+[u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\Bigg]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[u(t,x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)-\right.$$

$$\left.-m(x)\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l m(x)[\delta z(t_1,x)]^2\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial \delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [m(x)[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]dxdt\,.$$

Соотношения (7) и (8) позволяют сделать следующий вывод.

Теорема 1. Для нахождения единственного оптимального управления $u(t,x)$ имеем систему соотношений

$$\begin{cases}
m(x)\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)-u(t,x),\\
z(t_0,x)=f(x),\ \dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x),\\
EJ(0)\dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}\right)=0,\\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}\right)=0,\\
m(x)\dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)=m(x)z(t,x),\\
p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x),\\
EJ(0)\dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}\right)=0,\\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}\right)=0,\\
u(t,x)+p(t,x)=0.
\end{cases}\tag{9}$$

Доказательство. В случае выполнения системы соотношений (9) первая вариация функционала (5) равна нулю, что является необходимым условием экстремума этого функционала. Если имеют место соотношения (9), то выражение (8) станет следующим:

$$\Delta\Psi = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l m(x)[\delta z(t_1,x)]^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l m(x)\left[\frac{\partial \delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [m(x)[\delta z(t,x)]^2 + [\delta u(t,x)]^2] dxdt\,. \qquad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что: во-первых, при управлении $u(t,x)$ реализуется минимум функционала (4); во-вторых, оптимальное управление $u(t,x)$ единственно. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Система интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Далее все равенства, связанные с дельта-функцией Дирака, следует понимать как равенства в смысле теории обобщенных функций. Поскольку система соотношений (9) линейна относительно неизвестных функций $z(t,x)$, $p(t,x)$ и $u(t,x)$, то с учетом условий трансверсальности $p(t_1,x) = \frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$ и $\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t} = -z(t_1,x)$ рассмотрим такие два выражения

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\int_0^l m(y)\left[R_{11}(t,x,y)z(t,y) + R_{12}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy\,,$$

$$p(t,x) = \int_0^l m(y)\left[R_{21}(t,x,y)z(t,y) + R_{22}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy\,.$$

Подобно тому, как это было сделано в статье [4], для нахождения функций $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$ получим такую систему уравнений с частными производными:

$$m(x)m(y)\frac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t} - m(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(EJ(y)\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^2}\right) -$$
$$- m(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^2}\right) + m(y)\delta(x-y) - \qquad (11)$$
$$- m(x)m(y)\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)ds = 0\,,$$

$$m(x)\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^2}\right) +$$
$$+ m(x)R_{11}(t,x,y) - m(x)\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds = 0\,, \qquad (12)$$

$$
\begin{gathered}
m(y)\frac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(EJ(y)\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+ \\
+m(y)R_{11}(t,x,y)-m(y)\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)ds=0,
\end{gathered} \tag{13}
$$

$$
\frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t}+R_{12}(t,x,y)+R_{21}(t,x,y)-\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds=0, \tag{14}
$$

где символом $\delta(x)$ обозначена дельта–функция Дирака. При этом должны выполняться условия трансверсальности

$$
\begin{cases} m(y)R_{11}(t_1,x,0)=\delta(x-y),\ m(y)R_{12}(t_1,x,0)=0, \\ m(y)R_{21}(t_1,x,0)=0,\ m(y)R_{22}(t_1,x,0)=\delta(x-y). \end{cases}, \tag{15}
$$

и краевые условия

$$
\begin{cases}
EJ(0)\dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,0)}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,0)}{\partial y^2}\right)=0, \\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^2}\right)=0, \\
EJ(0)\dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,0)}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(EJ(0)\dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,0)}{\partial y^2}\right)=0, \\
EJ(l)\dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(EJ(l)\dfrac{\partial^2 R_{212}(t,x,l)}{\partial y^2}\right)=0
\end{cases}. \tag{16}
$$

Принимая во внимание вышеизложенные рассуждения, приходим к следующему выводу.

Теорема 2. Для нахождения функций $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$ требуется решить систему уравнений (11)–(14) с учетом краевых условий (16) и условий трансверсальности (15).

Зная функции $R_{21}(t,x,y)$ и $R_{22}(t,x,y)$, можно найти оптимальное управление $u(t,x)$.

Теорема 3. Для оптимального управления $u(t,x)$ справедлива формула

$$
u(t,x)=-\int_0^l m(y)\left[R_{21}(t,x,y)z(t,y)+R_{22}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy.
$$

Дальнейшее развитие полученных в статье результатов состоит в исследовании случая, когда время регулирования стремится к бесконечности. В теории оптимального управления эта проблема именуется задачей аналитического конструирования регулятора. Перспективным исследованием также является игровая постановка задачи, чтобы воспользоваться методом разрешающих функций.

Выводы.

Проведено исследование линейно-квадратической задачи оптимального управления процессом колебаний балки переменного поперечного сечения в случае свободных концов балки. Для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Анализ этих условий дал возможность вывести систему интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Решение этой системы использовано при построении формулы для вычисления оптимального управления.

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. — К.: Вища школа. — 1975. — 328 с.
2. Naidu D.S. Optimal control systems//Electrical engineering textbook series. — CRC PRESS — Boka Raton London — New York — Washington, D. C. — 2003. — 433 p.
3. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом. — М.: Наука. — 1964. — 700 с.
4. Копец М.М. Оптимальное управление колебаниями прямоугольной мембраны//Кибернетика и вычисл. техника. — 2014. — Вып. 177. — С. 28–42.

UDC 517.977

OPTIMAL CONTROL BY VIBRATIONS OF THE BEAM WITH VARIABLE CROSS-SECTION

M.M. Kopets

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute» (Kiev)

Introduction. The last half-century is characterized by the rapid development of technology. Significant progress has been made in the rocket, aircraft, shipbuilding and space technology, etc. All sectors have oscillatory processes. In some cases, they can usefully be taken into account to improve the quality of the process, while others, on the contrary, it is necessary to suppress because of their negative impact on the final process. This means that the oscillatory processes must not only be learned, but also be able to manage them effectively. Similar problems effectively manage mechanical processes just studying optimal control theory. The purpose of this article is to study the linear-quadratic problem of optimal control by oscillations of the beam with variable cross-section in the case of the free ends of the beam.

Statement of the Problem. The state equation is linear partial differential equation of the fourth order of hyperbolic type with given initial conditions and homogeneous boundary conditions. Quality of the process is estimated by quadratic functional. The admissible control is such a function which belongs to the class of square Lebesgue integrable functions. Optimal control is admissible control which is implemented at least the cost functional.

The purpose of the paper is to determine the necessary conditions for optimal control of process vibrations of a beam of variable cross-section in the case of the free ends of the beam and to give solution of integral-differential Riccati equations for the optimal control.

The main results. Necessary optimality conditions for the considered optimization problem are obtained. Analysis of these conditions made it possible to bring the system of integro-differential Riccati equations with partial derivatives. The solution of this system is used in the construction of an explicit formula for the calculation of optimal control.

Conclusions. The article investigates the linear-quadratic optimal control process vibrations of a beam of variable cross-section in the case of the free ends of the beam. Necessary optimality conditions for the considered optimization problem are obtained. Analysis of these conditions made it possible to bring the system of integro-differential Riccati equations with partial derivatives. The solution of this system is used in the construction of an explicit formula for the calculation of optimal control. Further development of the obtained results is to study the case where the control time tends to infinity. In the theory of optimal control, this problem is called the problem of analytical construction of the regulator.

Keywords: linear quadratic optimal control problem, method of Lagrange multipliers, necessary optimality conditions, oscillations of the beam, partial derivatives, system of integro-differential equations.

1. Bublik B.N., Kirichenko N.F. Fundamentals of control theory. — K .: Higher School — 1975. — 328 p.
2. Naidu D.S. Optimal control systems // *Electrical engineering textbook series*. — CRC PRESS — Boka Raton London — New York — Washington, D. C. — 2003. — 433 p.
3. Bodner V.A. Theory of automatic flight control. — M .: Nauka — 1964. — 700 p.
4. Kopets M.M. Optimal control of vibrations of a rectangular membrane // *Cybernetics and computer engineering*. — 2014. — Vol. 177. — P. 28–42.

Получено 10.07.2015