Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 97 – 112

Необхідні і достатні умови існування єдиного розв'язку однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над полем $GF(3)$

Володимир І. Масол, Л. О. Ромашова

(*Представлена С. Я. Махном*)

Анотація. Для однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над полем $GF(3)$ доведено дві теореми щодо умов існування єдиного розв'язку в залежності від інтервалів для розподілів коефіцієнтів системи.

2000 MSC. 34K06, 60H10.

Ключові слова та фрази. Лінійні випадкові рівняння, поле $GF(3)$, єдиний розв'язок.

1. Основні результати

Нехай над полем $GF(3)$ задана система

$$\sum_{j=1}^{n}{}_{3}\, a_j^{(\mu)} x_j = 0, \quad \mu \in J, \tag{1.1}$$

де $J = \{1, 2, \ldots, T\}$, $T \geq 1$ та $\sum_3$ — символ додавання у полі $GF(3)$, яка задовольняє умову (A).

Умова (A): Коефіцієнти $a_j^{(\mu)}$, $1 \leq j \leq n$, $\mu \in J$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких приймає значення a з ймовірністю $P\{a_j^{(\mu)} = a\} = p_\mu$, $a \in GF(3)$, $a \neq 0$ та значення $0 \in GF(3)$ з ймовірністю $P\{a_j^{(\mu)} = 0\} = 1 - 2p_\mu$.

Покладемо ν_n кількість розв'язків $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, системи (1.1) з числом $|\bar{x}|$ ненульових компонент більшим нуля, $|\bar{x}| > 0$ (V_n — сукупність усіх n-вимірних векторів над полем $GF(3)$) .

Стаття надійшла в редакцію 1.02.2009

ISSN 1810 – 3200.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (A) *та*

$$\frac{\ln n + z}{n} \le p_\mu \le \frac{1}{2} - \frac{\ln n + z}{n}, \quad \mu \in J, \tag{1.2}$$

де $z = o(\ln n)$, $n \to \infty$.

Тоді умова

$$\frac{T}{n} \ge 1 + \gamma_n, \tag{1.3}$$

де $n^\varepsilon \gamma_n \to \infty$, $\gamma_n \to 0$, $n \to \infty$, *де* $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, *є достатньою, а умова*

$$\frac{T}{n} \ge \frac{\ln 1,8}{\ln 3}, \tag{1.4}$$

є необхідною для того, щоб

$$P\{\nu_n > 0\} = o(1), \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови* (A) *та*

$$\frac{E_n \ln n}{n} \le p_\mu \le \frac{1}{2} - \frac{E_n \ln n}{n}, \quad \mu \in J, \tag{1.6}$$

де $E_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Тоді умова

$$T = n + A_n, \tag{1.7}$$

де $A_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *є достатньою, а умова* (1.4), *є необхідною для того, щоб мало місце співвідношення* (1.5).

2. Допоміжні твердження

Лема 2.1. *Нехай* ξ *— випадкова величина, яка має представлення* $\xi = \xi_1 +_3 \cdots +_3 \xi_k$, *де* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *— незалежні однаково розподілені випадкові величини;* $P\{\xi_s = 0\} = 1 - 2p^*$, $P\{\xi_s = a\} = p^*$, $a \in GF(3), a \ne 0$, $s = 1, \ldots, k$, $1 \le k < \infty$, $+_3$ *— операція сумування в полі* $GF(3)$. *Тоді*

$$P\{\xi = a\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3p^*)^k, \quad a \in GF(3),\ a \ne 0.$$

Доведення. Доведення леми 2.1 можна виконати методом математичної індукції за параметром $k \ge 1$. $\square$

Лема 2.2. *Якщо виконується умова* (A)*, то математичне сподівання* $E\nu_n$ *випадкової величини* ν_n *дорівнює*

$$E\nu_n = 3^{-T}\sum_{t=1}^{n}\binom{n}{t}2^t Q, \tag{2.1}$$

$$Q = \prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2(1-3p_\mu)^t\right). \tag{2.2}$$

Доведення. Нехай $\xi(\bar{x})$ — індикатор події, яка полягає у тому, що вектор $\bar{x}$, $\bar{x}\in V_n$, є розв'язком системи (1.1). З урахуванням умови (A) маємо

$$E\nu_n = \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|\ge 1} E\xi(\bar{x}) = \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|\ge 1}\prod_{\mu=1}^{T} P\Biggl(\sum_{j=1}^{n}{}_3\, a_j^{(\mu)}x_j = 0\Biggr). \tag{2.3}$$

Кількість доданків у сумі $\sum_3$ з правої частини (2.3), які відмінні від 0, дорівнює t, де t — загальна кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}$, $|\bar{x}|\ge 1$. Тоді, скориставшись (2.3) та лемою 2.1, приходимо до (2.1). □

Для довільних векторів $\bar{x}^{(q)}\in V_n$, $\bar{x}^{(q)} = (x_1^{(q)},\dots,x_n^{(q)})$, $q=1,2$, позначимо через $i_{c_1c_2}$ кількість компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, які дорівнюють c_1, а у векторі $\bar{x}^{(2)}$ їм відповідають компоненти, що дорівнюють c_2, де $c_1,c_2\in GF(3)$, $0\le i_{c_1c_2}\le n$.

Нехай $I = \{\, i_{\mathbf{01}}, i_{\mathbf{02}}, i_{\mathbf{10}}, i_{\mathbf{20}}, i_{\mathbf{11}}, i_{\mathbf{22}}, i_{\mathbf{12}}, i_{\mathbf{21}}\,\}$, $i = i_{\mathbf{01}} + i_{\mathbf{02}}$, $l = i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$, $t = \sum\limits_{j\in I} j$, $E\nu_n^{[2]} = E\nu_n(\nu_n-1)$.

Лема 2.3. *Якщо виконується умова* (A)*, то*

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T}\sum_{t=1}^{n}\binom{n}{t}\sum\frac{t!}{\prod\limits_{j\in I} j!}Q^*, \tag{2.4}$$

де

$$Q^* = \prod_{\mu=1}^{T}\left(1+2\left(\sum_{r=1}^{4}(1-3p_\mu)^{\Gamma^{(r)}}\right)\right), \tag{2.5}$$

сумування $\sum$ *відбувається за всіма* $j\in I$ *так, що* $\sum_{j\in I} j = t$*; в рівності* (2.4) *елементи множини* I *задовольняють співвідношенням*

$$t - i \ge 1, \tag{2.6}$$

$$t - l \geq 1, \tag{2.7}$$

$$i + l + i_{\mathbf{12}} + i_{\mathbf{21}} \geq 1; \tag{2.8}$$

параметри $\Gamma^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ *визначаються відповідно рівностями*

$$\Gamma^{(1)} = i + l, \tag{2.9}$$

$$\Gamma^{(2)} = t - l, \tag{2.10}$$

$$\Gamma^{(3)} = t - i, \tag{2.11}$$

$$\Gamma^{(4)} = t. \tag{2.12}$$

Доведення. Користуючись умовою (A) та співвідношенням

$$E\nu_n^{[2]} = \sum\nolimits^{*} E\xi(\bar{x}^{(1)})\xi(\bar{x}^{(2)}),$$

де сумування $\sum^*$ виконується за всіма парами $\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)}\right)$ векторів $\bar{x}^{(q)} \in V_n$ таким, що $|\bar{x}^{(q)}| \geq 1$, $q = 1, 2$, $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, отримуємо

$$\begin{aligned} &E\nu_n^{[2]} \\ &= \sum\nolimits^{*} \prod_{\mu=1}^{T} P\big\{ \cup \big\{ A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(k)}\big) = y_k,\ A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\big) = y_{12},\ k = 1, 2 \big\}\big\} \\ &= \sum\nolimits^{*} \prod_{\mu=1}^{T} \sum\nolimits^{**} P\big\{A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(1)},\ \bar{x}^{(2)}\big) = y_{12}\big\} \prod_{k=1,2} P\big\{A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(k)}\big) = y_k\big\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

де символ $\cup$ / $\sum^{**}$ / об'єднання /сумування/ розповсюджується на всі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1 +_3 y_{12} = 0, \\ y_2 +_3 y_{12} = 0 \end{cases}$$

над полем $GF(3)$; для $\mu \in J$

$$A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\big) = \sum\nolimits_{\omega \in E^{(12)}}^{3} a_\omega^{(\mu)}, \qquad A^{(\mu)}\big(\bar{x}^{(q)}\big) = \sum\nolimits_{\omega \in E^{(q)}}^{3} a_\omega^{(\mu)}, \quad q = 1, 2,$$

де

$$E^{(12)} = \big\{j,\ 1 \leq j \leq n : x_j^{(q)} \neq 0,\ q = 1, 2\big\},$$

$$E^{(q)} = \big\{j,\ 1 \leq j \leq n : x_j^{(q)} \neq 0,\ x_j^{(q^*)} = 0\big\},$$

$q \in \{1, 2\}$, $q^* \in \{1, 2\}$, $q^* \neq q$.

Нехай $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ та $\gamma^{(3)}$ — кількість елементів відповідно множин $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ та $E^{(12)}$.

Покладемо

$$\Gamma^{(1)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}, \qquad \Gamma^{(2)} = \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)},$$

$$\Gamma^{(3)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(3)}, \qquad \Gamma^{(4)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}.$$

За допомогою умови (A) та леми 2.1 співвідношення (2.13) можна переписати у вигляді

$$E\nu_n^{[2]} = 9^{-T} \sum\nolimits^* \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2\left(\sum_{k=1}^{4} (1 - 3p_\mu)^{\Gamma^{(k)}}\right)\right). \tag{2.14}$$

Сумування $\sum^*$ у правій частині (2.14) за всіма парами $\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)}\right)$ такими, що $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $|\bar{x}^{(q)}| \geq 1$, $q = 1, 2$, еквівалентно сумуванню за всіма параметрами $j \in I$, наведеного у правій частині (2.4). Нерівності (2.6), (2.7), (2.8) гарантують виконання відповідно співвідношень $|\bar{x}^{(1)}| \geq 1$, $|\bar{x}^{(2)}| \geq 1$ та $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$.

Далі перевіримо рівність (2.9). Дійсно, користуючись тим, що сума $i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$ — це кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, яким відповідають нульові компоненти вектора $\bar{x}^{(2)}$, знаходимо $|E^{(1)}| = \gamma^{(1)} = i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$. Аналогічно отримуємо $|E^{(2)}| = \gamma^{(2)} = i_{\mathbf{01}} + i_{\mathbf{02}}$. Отже, $\Gamma^{(1)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = i + l$, що доводить (2.9). Таким же чином перевіряються рівності (2.10)–(2.12). □

Лема 2.4. *Якщо виконується умова* (A) *та*

$$p_\mu \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \tag{2.15}$$

де $0 < \upsilon \leq \dfrac{1}{2}$, $\mu \in J$, *то*

$$E\nu_n > 0. \tag{2.16}$$

Доведення. З урахуванням (2.1) та (2.2) для доведення співвідношення (2.16) достатньо показати, що для $n \geq 1$

$$Q > 0. \tag{2.17}$$

З цією метою представимо добуток Q, визначений рівністю (2.2), у вигляді

$$Q = \prod_{r=1}^{3} Q_r, \tag{2.18}$$

де Q_r позначає добуток усіх множників з правої частини (2.2), для яких параметр μ належить множині W_r, $r = 1, 2, 3$. Тут

$$W_1 = \left\{\mu,\ 1 \le \mu \le T:\ p_\mu \le \frac{1}{3}\right\},$$
$$W_2 = \left\{\mu,\ 1 \le \mu \le T:\ \frac{1}{3} < p_\mu \le \frac{1}{2} - \upsilon, \quad t \text{ — парне}\right\},$$
$$W_3 = \left\{\mu,\ 1 \le \mu \le T:\ \frac{1}{3} < p_\mu \le \frac{1}{2} - \upsilon, \quad t \text{ — непарне}\right\},$$

де $t \ge 1$, t — параметр з правої частини рівності (2.2).

Покладемо η_r — кількість елементів множини W_r, $\eta_r = |W_r|$, $r = 1, 2, 3$. Тоді

$$\sum_{r=1}^{3} \eta_r = T. \tag{2.19}$$

З означень добутків Q_1 та Q_2 отримуємо, очевидно

$$Q_1 \ge 1, \qquad Q_2 \ge 1. \tag{2.20}$$

За допомогою умови (2.15) знаходимо

$$Q_3 \ge (6\upsilon)^{\eta_3}. \tag{2.21}$$

Із (2.18)–(2.21) випливає

$$Q \ \ge (6\upsilon)^{\eta_3},$$

звідки маємо (2.17), а отже й (2.16). □

Позначимо

$$p_{\max} = \max_{1 \le \mu \le T} p_\mu, \qquad p_{\min} = \min_{1 \le \mu \le T} p_\mu.$$

Лема 2.5. *Нехай виконуються умови* (A), (1.2) *та*

$$\frac{T}{n} < \frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma, \tag{2.22}$$

де γ — фіксоване додатне число.

Тоді для довільного $t \in F$, де $F = [[\frac{2}{3}n] - [\frac{n}{\ln n}];\ n]$ має місце співвідношення

$$Q \ge a_1, \tag{2.23}$$

при $n \to \infty$, де $[d]$ — знак цілої частини числа d. Тут і далі a_z — фіксоване додатне число, $a_z < \infty$, $z = 1, 2, \ldots$

Доведення. В силу (2.18) для доведення (2.23) достатньо показати, що для $t \in F$ та $n \geq 1$ існує таке a_2, що

$$Q_r \geq a_2, \quad r = 1, 2, 3. \tag{2.24}$$

За допомогою (1.2) для $\mu \in W_1$ та $t \in F$ маємо при $n \to \infty$

$$(\ 1 - 3p_\mu)^t \geq (1 - 3p_{max})^t \geq -a_3 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}. \tag{2.25}$$

Використовуючи (2.22) та (2.25), отримуємо при $n \to \infty$

$$Q_1 \geq \left(1 - a_4 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n},$$

звідки маємо (2.24) для $r = 1$.

Перевіримо співвідношення (2.24) для $r = 2$. Дійсно, беручи до уваги (1.2) для $\mu \in W_2$ та $t \in F$, знаходимо при $n \to \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^t \geq (1 - 3p_{min})^t \geq -a_5 n^{-3(1+o(1))}. \tag{2.26}$$

З урахуванням (2.22) та (2.26) отримуємо для $n \to \infty$

$$Q_2 \geq \left(1 - a_6 n^{-3(1+o(1))}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}. \tag{2.27}$$

За допомогою (2.27) приходимо до (2.24) для $r = 2$.

Нерівність (2.24) для $r = 3$ випливає з (2.2) та того, що для $\mu \in W_3$ і $t \in F$ маємо при $n \to \infty$

$$(1 - 3p_\mu)^t \geq -\left(3p_{max} - 1\right)^t \geq -a_3 2^{-\frac{2}{3}n - \frac{n}{\ln n}} n^{-4(1+o(1))}.$$

Звідси з урахуванням (2.18) та (2.24) отримуємо співвідношення (2.23). □

Лема 2.6. *Якщо виконуються умови* (A), (1.2) *та* (1.3), *то при* $n \to \infty$

$$D_1 = o(1), \tag{2.28}$$

де

$$D_1 = 3^{-T} \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]} \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Тут і далі ε_q *— достатньо мале фіксоване додатне число,* $q \geq 1$.

Доведення. З урахуванням (1.2) та співвідношення $p_{min}t \in (0;1)$ при $n \to \infty$ для $t \in [1; [\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]]$ отримуємо

$$Q \leq 3^T \big(1 - 2p_{min}t + 3\,(p_{min}t)^2\,\big)^T. \tag{2.29}$$

Використовуючи (2.29), знаходимо при $n \to \infty$

$$D_1 \leq \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]} \frac{(2n)^t}{t!} \exp\Big\{-2Ttp_{\min}\Big(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n} p_{\min}\Big)\Big\}. \tag{2.30}$$

Оскільки в силу умови (1.2) для всіх $t \in [1; [\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}]]$ маємо

$$\left(\frac{2}{e^{2Tp_{\min}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n} p_{\min}\right) - \ln n}}\right)^t \leq \left(\frac{2}{e^{2\frac{T}{n}(\ln n + z)\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)\right) - \ln n}}\right)^t,$$

то з урахуванням (1.3) та (2.30) приходимо до оцінки

$$D_1 \leq \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]} \frac{1}{t!} \exp\left\{-t\,(\ln n + 2z)\,(1 - 3\varepsilon_1 + o(1))\right\}, \quad n \to \infty. \tag{2.31}$$

Із (2.31) випливає, очевидно, (2.28). □

Лема 2.7. *Якщо виконуються умови* (A), (1.2) *та* (1.3), *то при* $n \to \infty$

$$D_2 = o(1), \tag{2.32}$$

де

$$D_2 = 3^{-T} \sum_{t=\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]+1}^{[\varepsilon_2 n]} \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Доведення. Для $t \in [[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}] + 1, [\varepsilon_2 n]]$ знаходимо

$$Q \leq \Big(1 + 2\exp\Big\{-3p_{\min}\Big(\Big[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\Big] + 1\Big)\Big\}\Big)^T. \tag{2.33}$$

Із (1.2) та (2.33) випливає при $n \to \infty$

$$D_2 \leq \left(\frac{e^{\sigma_1(\varepsilon_2)\frac{n}{T}}\left(1 + \frac{2}{e^{3\varepsilon_1\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}}\right)}{3}\right)^T, \tag{2.34}$$

де $\sigma_r(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, $r \geq 1$. Беручи до уваги припущення (1.3), умову (1.2) в частині $z = o(\ln n)$ та нерівність (2.34), отримуємо (2.32). □

Лема 2.8. *Якщо виконуються умови* (A), (1.2) *та* (1.3), *то при* $n \to \infty$

$$D_3 = o(1), \tag{2.35}$$

де

$$D_3 = 3^{-T} \sum_{t=[\varepsilon_2 n]+1}^{n} \binom{n}{t} 2^t Q.$$

Доведення. Для всіх $t \in [[\varepsilon_2 n] + 1, n]$

$$Q \le \left(1 + 2\exp\left\{-3p_{\min}\left([\varepsilon_2 n] + 1\right)\right\}\right)^T. \tag{2.36}$$

Використовуючи (1.2) та (2.36), маємо

$$D_3 \le \frac{3^n}{3^T} \exp\left\{ \frac{2T}{\exp\left\{3\varepsilon_2 (\ln n)\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)\right\}} \right\}. \tag{2.37}$$

За допомогою співвідношень $z = o(\ln n)$, $n^{\varepsilon}\gamma_n \to \infty$ при $n \to \infty$ та (2.37) отримуємо

$$D_3 \le \exp\left\{ -T\gamma_n (\ln 3) \left\{ -\frac{2}{\gamma_n (\ln 3)\, n^{3\varepsilon_2 (1+o(1))}} + 1 + O(\gamma_n) \right\} \right\}.$$

Звідки безпосередньо приходимо до (2.35). □

Лема 2.9. *Якщо виконуються умови* (A), (1.6) *та* (1.7), *то має місце співвідношення* (2.35).

Доведення. Справедливість рівності (2.35) випливає з того, що по-перше, для добутку Q справедлива оцінка (2.36) і, по-друге, використовуючи умову (1.6), отримуємо при $n \to \infty$

$$D_3 \le \frac{3^n}{3^T} \left(1 + \frac{2}{n^{3\varepsilon_2 E_n}}\right)^T,$$

звідки, беручи до уваги (1.7), маємо при $n \to \infty$

$$D_3 \le \exp\left\{ \frac{2n}{n^{3\varepsilon_2 E_n}} \right\} \left(\frac{\exp\left\{\frac{2}{n^{3\varepsilon_2 E_n}}\right\}}{3} \right)^{A_n}. \tag{2.38}$$

За допомогою співвідношень $E_n \to \infty$, $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$ та (2.38) знаходимо (2.35) при $n \to \infty$. □

3. Доведення теорем

Доведення теореми 1.1. *Достатність.* Покажемо, що при виконанні (1.3) має місце

$$E\nu_n = o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

Беручи до уваги (2.1) та (2.2), математичне сподівання $E\nu_n$ можна подати у вигляді

$$E\nu_n = \sum_{h=1}^{3} D_h, \tag{3.2}$$

де

$$D_h = 3^{-T} \sum_{t \in R_h} \binom{n}{t} 2^t Q, \quad h = 1, 2, 3.$$

Замкнені відрізки R_h, $h = 1, 2, 3$ кінцями яких слугують цілі числа, дорівнюють

$$R_1 = \left[1, \left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right]\right], \quad R_2 = \left[\left[\varepsilon_1 \frac{n}{\ln n}\right] + 1, [\varepsilon_2 n]\right], \quad R_3 = \left[[\varepsilon_2 n] + 1, n\right].$$

За допомогою (3.2) для обгрунтування (3.1) достатньо переконатися, що при $n \to \infty$

$$D_h = o(1) \tag{3.3}$$

для $h = 1, 2, 3$. Використовуючи (2.28), (2.32) та (2.35), отримуємо (3.3) для $h = 1, 2, 3$.

Із (3.2) та (3.3) випливає (3.1). З урахуванням (3.1) та нерівності Чебишева отримуємо (1.5).

Необхідність. Нехай при $n \to \infty$ ймовірність $P(\nu_n > 0)$ прямує до нуля, тобто

$$P(\nu_n > 0) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Покажемо, що тоді виконується (1.4). Припустимо, що рівність (1.4) не виконується, тобто має місце співвідношення (2.22) і переконаємося, що у такому випадку

$$P(\nu_n > 0) > 0 \tag{3.5}$$

при $n \to \infty$, тобто з додатньою ймовірністю існують розв'язки, які відмінні від нульового. З цією метою перевіримо наступні оцінки при $n \to \infty$

$$(E\nu_n)^{-1} \le a_7, \tag{3.6}$$

$$E\nu_n^{[2]} (E\nu_n)^{-2} \le a_8, \tag{3.7}$$

з подальшим використанням їх в нерівності [1]

$$P\left(\nu_n > 0\right) \geq \Big(\left(E\nu_n\right)^{-1} + E\nu_n^{[2]} \left(E\nu_n\right)^{-2} \Big)^{-1}. \tag{3.8}$$

Дійсно, за допомогою співвідношень (2.1), (2.2) та леми 2.4 маємо для $t \in F$ при $n \to \infty$

$$\left(E\nu_n\right)^{-1} \leq 3^{T-n}\delta_n, \tag{3.9}$$

де

$$\delta_n \leq a_1^{-1}\left(3^{-n}\sum_{t\in F}\binom{n}{t}2^t\right)^{-1}. \tag{3.10}$$

Використовуючи рівність $3^{-n}\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}2^t = 1$, отримуємо

$$3^{-n}\sum_{t=0}^{\left[\frac{2}{3}n\right]-\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{n}{t}2^t \leq \exp\Big\{-\frac{n}{\ln^2 n}\Big(\frac{9}{4}+O\left(\left(\ln n\right)^{-1}\right)\Big)\Big\} \to 0,$$

$n \to \infty$, звідки

$$3^{-n}\sum_{t\in F}\binom{n}{t}2^t \to 1, \quad n \to \infty. \tag{3.11}$$

Із співвідношень (3.9)–(3.11) випливає (3.6).

Покажемо, що при $n \to \infty$ існує таке число a_9, для якого

$$\left(3^{T-n}E\nu_n\right)^{-1} \leq a_9. \tag{3.12}$$

Дійсно, беручи до уваги (3.9), знаходимо

$$\left(3^{T-n}E\nu_n\right)^{-1} \leq \delta_n \tag{3.13}$$

при $n \to \infty$. Але з урахуванням (3.10) та (3.11) приходимо до нерівності $\overline{\lim}_{n\to\infty}\delta_n \leq a_1^{-1}$, яка разом з (3.13) доводить (3.12).

Із (3.12) випливає, що для доведення (3.7) достатньо показати, що має місце співвідношення

$$9^{T-n}E\nu_n^{[2]} \leq a_{10}, \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

З цією метою за допомогою (2.4), (2.5) ліву частину (3.14) перепишемо у вигляді

$$9^{T-n}E\nu_n^{[2]} = 9^{-n}S\left(n; Q^*\right), \tag{3.15}$$

де

$$S\left(n; Q^*\right) = \sum_{t=1}^{n}\binom{n}{t}\sum_{\sum\limits_{j\in I} j=t}\frac{t!}{\prod\limits_{j\in I} j!}Q^*. \tag{3.16}$$

Суму $S(n;Q^*)$ подамо у вигляді двох сум $S_1(n;Q^*)$ та $S_2(n;Q^*)$, а саме:

$$S(n;Q^*) = S_1(n;Q^*) + S_2(n;Q^*), \tag{3.17}$$

де $S_1(n;Q^*)$ відрізняється від $S(n;Q^*)$ тим, що сумування у правій частині (3.16) розповсюджується на всі j, $j \in I$, такі, що

$$\Gamma^{(k)} \geq \varepsilon n, \tag{3.18}$$

де $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\Gamma^{(k)}$ визначені рівностями (2.9)–(2.12) для $k = 1,2,3,4$; $S_2(n;Q^*)$ — сума доданків з $S(n;\ Q^*)$, які не увійшли до $S_1(n;Q^*)$. Тоді беручи до уваги (1.2), (2.5), (2.22) та (3.18), приходимо до оцінки

$$S_1(n;Q^*) \leq S_1(n;1)\,Q_1^*, \tag{3.19}$$

де $Q_1^* = (1 + 8n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})})^{(\frac{\ln 1,8}{\ln 3}-\gamma)n}$.

Нерівність

$$S_1(n;1) \leq 9^n \tag{3.20}$$

у поєднанні з (3.19) дає

$$S_1(n;Q^*) \leq a_{11}9^n\big(1 + 8n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\big)^{(\frac{\ln 1,8}{\ln 3}-\gamma)n}. \tag{3.21}$$

Суму $S_2(n;Q^*)$ представимо у вигляді

$$S_2(n;Q^*) = \sum_{r=1}^{4} S_{2;r}(n;Q^*), \tag{3.22}$$

де $S_{2;r}(n;Q^*)$ відрізняється від $S_2(n;Q^*)$ тим, що сумування у правій частині (3.16) відбувається за всіма параметрами j, $j \in I$ такими, що існують $l_1,\dots,l_r \in \{1,2,3,4\}$, для яких $\Gamma^{(l_h)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(k)} \geq \varepsilon n$, де $k \in \{1,2,3,4\}\backslash\{l_1,\dots,l_r\}$, $h = 1,\dots,r$, $r = 1,2,3,4$. Далі, для $r = 1,2,3,4$ подамо $S_{2;r}(n;Q^*)$ у вигляді

$$S_{2;r}(n;Q^*) = \sum_{1\leq t_1<\dots<t_r\leq 4} S_{2;r;t_1,\dots,t_r}(n;Q^*), \tag{3.23}$$

де $S_{2;r;t_1,\dots,t_r}(n;Q^*)$ позначає суму усіх доданків, що належать $S_{2;r}(n;Q^*)$ та для яких $\Gamma^{(t_l)} < \varepsilon n$, $l = 1,\dots,r$, $\Gamma^{(t')} \geq \varepsilon n$, $t' \in \{1,2,3,4\}\backslash\{t_1,\dots,t_r\}$.

Покажемо, що при $r = 1$

$$S_{2;r}(n;Q^*) \leq a_{12}3^{(\frac{\ln 1,8}{\ln 3}-\gamma)n}e^{\sigma_2(\varepsilon)n} \times \big(1 + 2n^{-3\varepsilon(1+\frac{z}{\ln n})}\big)^{(\frac{\ln 1,8}{\ln 3}-\gamma)n}(5^n + 3^n + 1). \tag{3.24}$$

Дійсно, за допомогою (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 1$ отримуємо

$$S_{2;r}\,(n;Q^*) \le Q^*_{2;r} \sum_{l=1}^{4} S_{2;r;l}\,(n;1)\,, \tag{3.25}$$

де $Q^*_{2;\ r} = a_{13} 3^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} (1 + 2n^{-3\varepsilon(1 + \frac{z}{\ln n})})^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Далі дамо оцінку кожному з чотирьох доданків $S_{2;r;l}\,(n;1)$, $l = 1,2,3,4$ з правої частини (3.25).

Із нерівності $\Gamma^{(1)} < \varepsilon n$ та співвідношення (2.9) випливає, що усі параметри $j,\ j \in I^* \setminus \{i_{\mathbf{11}}, i_{\mathbf{22}}, i_{\mathbf{12}}, i_{\mathbf{21}}, i_{\mathbf{00}}\}$, $I^* = I \cup \{i_{\mathbf{00}}\}$, які беруть участь у записі суми $S\,(n;Q^*)$ /див. (3.16)/, не перевищують εn. Звідки, використовуючи поліноміальну формулу, маємо

$$S_{2;1;1}\,(n;1) \le 5^n \exp\{\sigma_3(\varepsilon)n\}. \tag{3.26}$$

Для того, щоб переконатися в справедливості оцінки

$$S_{2;1;2}\,(n;1) \le 3^n \exp\{\sigma_4(\varepsilon)n\}, \tag{3.27}$$

достатньо помітити, беручи до уваги (2.10) та нерівність $\Gamma^{(2)} < \varepsilon n$, що усі параметри $j,\ j \in I^* \setminus \{i_{\mathbf{10}}, i_{\mathbf{00}}, i_{\mathbf{20}}\}$ із правої частини (3.16) не перевищують εn.

За допомогою (2.11) аналогічно (3.27) знаходимо

$$S_{2;1;3}\,(n;1) \le 3^n \exp\{\sigma_5(\varepsilon)n\}. \tag{3.28}$$

Із нерівності $\Gamma^{(4)} < \varepsilon n$ та співвідношення (2.12) випливає, що усі параметри $j,\ j \in I^* \setminus \{i_{\mathbf{00}}\}$, які беруть участь у записі суми $S\,(n;Q^*)$, не перевищують εn, звідки маємо

$$S_{2;1;4}\,(n;1) \le \exp\{\sigma_6(\varepsilon)n\}. \tag{3.29}$$

З урахуванням (3.25)–(3.29), отримуємо

$$S_{2;1}\,(n;1) \le a_{14} \exp\{\sigma_7(\varepsilon)n\}\,(5^n + 3^n + 1)\,. \tag{3.30}$$

Співвідношення (3.25) (3.20)

Дійсно, за допомогою (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 2$ приходимо до

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q^*_{2;r} \sum_{1 \leq t_1 < t_2 \leq 4} S_{2;r;t_1,t_2}(n; 1), \tag{3.32}$$

де $Q^*_{2;r} = a_{16} 5^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \left(1 + \frac{4}{5} n^{-3\varepsilon\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Враховуючи нерівності $\Gamma^{(t_1)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_2)} < \varepsilon n$, $1 \leq t_1 < t_2 \leq 4$, та співвідношення (2.9)–(2.12) встановлюємо, що усі параметри $j, j \in \mathit{\Gamma}^* \setminus \{i_{\mathbf{00}}\}$, із правої частини (3.16), не перевищують εn. Це дозволяє записати наступну оцінку

$$\max_{1 \leq t_1 < t_2 \leq 4} S_{2;2;t_1,t_2}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_9(\varepsilon)\}. \tag{3.33}$$

Беручи до уваги (3.32) та (3.33), маємо для $r = 2$

$$S_{2;r}(n; 1) \leq a_{17} \exp\{\sigma_{10}(\varepsilon)\}. \tag{3.34}$$

Із (3.32) та (3.34) випливає (3.31).

Переконаємось у тому, що для $r = 3$

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq a_{18} e^{\sigma_{11}(\varepsilon) n} 7^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \times \left(1 + \frac{2}{7} n^{-3\varepsilon\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}. \tag{3.35}$$

На основі (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 3$ знаходимо

$$S_{2;r}(n; Q^*) \leq Q^*_{2;r} \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4} S_{2;r;t_1,t_2,t_3}(n; 1), \tag{3.36}$$

де $Q^*_{2;r} = a_{19} 7^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \left(1 + \frac{2}{7} n^{-3\varepsilon\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)}\right)^{\left(\frac{\ln 1,8}{\ln 3} - \gamma\right)n}$.

Покажемо, що

$$\max_{1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4} S_{2;2;t_1,t_2,t_3}(n; 1) \leq \exp\{\sigma_{12}(\varepsilon)\}. \tag{3.37}$$

Дійсно, нерівності $\Gamma^{(t_1)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_2)} < \varepsilon n$, $\Gamma^{(t_3)} < \varepsilon n$, $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 4$, співвідношення (2.9)–(2.12) та поліноміальна формула дозволяють аналогічно (3.33) отримати (3.37).

Беручи до уваги (3.36) та (3.37), приходимо до оцінки для $r = 3$

$$S_{2;r}(n; 1) \leq a_{20} \exp\{\sigma_{13}(\varepsilon)\}. \tag{3.38}$$

Співвідношення (3.36) та (3.38) доводять (3.35) для $r = 3$.

Нарешті, переконаємось у тому, що для $r = 4$

$$S_{2;r}(n; Q^*) \le 9^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \exp\{\sigma_{14}(\varepsilon)\}\, n^{-a_{21}\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)}. \quad (3.39)$$

Із (2.6), (2.7) та (2.10)–(2.12) отримуємо $\Gamma^{(l)} \ge 1$, $l = 2, 3, 4$, звідки використовуючи (1.2), (2.5), (2.22), (3.23) для $r = 4$ знаходимо

$$S_{2;r}(n; Q^*) \le Q^*_{2;r} S_{2;r}(n; 1), \quad (3.40)$$

де $Q^*_{2;r} = 9^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} n^{-a_{21}\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)}$.

Беручи до уваги нерівності $\Gamma^{(l)} < \varepsilon n$, $l = 1, 2, 3, 4$, та співвідношення (2.9)–(2.12) аналогічно (3.33) приходимо до оцінки для $r = 4$

$$S_{2;r}(n; 1) \le \exp\{\sigma_{14}(\varepsilon)\}. \quad (3.41)$$

Співвідношення (3.40) та (3.41) доводять (3.39).

Для $S_2(n; Q^*)$ з урахуванням (3.22), (3.24), (3.31), (3.35) та (3.39) отримуємо

$$\begin{aligned} S_{2;r}(n; 1) \le {} & 9^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} n^{-a_{21}\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)} \\ & + a_{22} \exp\{\sigma_{15}(\varepsilon)\} \left(1 + a_{23} n^{-3\varepsilon\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)}\right)^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} \\ & \times \left(7^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} + 5^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} + 3^{\left(\frac{\ln 1{,}8}{\ln 3} - \gamma\right)n} (5^n + 3^n + 1)\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

За допомогою (3.15), (3.17), (3.21) та (3.42) знаходимо (3.14). Нерівності (3.12) та (3.14) доводять (3.7).

Таким чином, із того, що виконується (2.22), отримали (3.6) та (3.7), які разом з оцінкою (3.8) дозволяють зробити висновок, що має місце співвідношення (3.5), а це, у свою чергу, суперечить тому, що з ймовірністю 1 існує єдиний розв'язок $\bar{x}^{(0)}$ системи (1.1) при $n \to \infty$. □

Доведення Теореми 1.2. *Достатність*. Покажемо, що при виконанні (1.7) має місце (3.1). Дійсно, використовуючи умови (1.6) та (1.7) переконуємося, аналогічно лемам 2.6 та 2.7, у справедливості співвідношень, відповідно:

$$3^{-T} \sum_{t=1}^{\left[\varepsilon_1 \frac{n}{E_n \ln n}\right]} \binom{n}{t} 2^t Q = o(1), \quad n \to \infty, \quad (3.43)$$

$$3^{-T} \sum_{t=\left[\varepsilon_1 \frac{n}{E_n \ln n}\right]+1}^{[\varepsilon_2 n]} \binom{n}{t} 2^t Q = o(1), \quad n \to \infty. \quad (3.44)$$

Беручи до уваги лему 2.9, рівності (2.35), (3.2), (3.43) та (3.44), отримуємо (3.1). Нерівності Чебишева та (3.1) завершують доведення достатності.

Необхідність. Необхідність умови (1.4) при виконанні (1.6) випливає з того, що співвідношення (1.6) є окремим випадком (1.2). ☐

Література

[1] А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей. Учебное пособие.* МЦНМО, Москва, 2006.

Відомості про авторів

Володимир Іванович Масол, Л. О. Ромашова

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики,
Механіко-математичний факультет
Київський національний університет
ім. Т. Шевченка,
вул. Володимирська, 64,
Київ, 01033,
Україна
E-Mail: vimasol@ukr.net,
deezee@ukr.net