Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 4, 563 – 573

Движение гравитирующих эллипсоидальных масс жидкости переменной вязкости

Сергей Н. Судаков

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В задачу о колебаниях гравитирующих эллипсоидальных масс однородной несжимаемой жидкости введена вязкость, величина которой прямо пропорциональна давлению. Показано, что такое задание вязкости сохраняет однородный вихревой характер движения. Исследованы малые колебания вращающейся осесимметричной эллипсоидальной массы жидкости и малые колебания невращающейся сферической массы жидкости.

2000 MSC. 76B47, 76D17, 76D27, 76E07, 76U05, 85A30.

Ключевые слова и фразы. Однородное вихревое движение, гравитирующие эллипсоидальные массы жидкости, вязкость, эллипсоид Дирихле, эллипсоид Маклорена.

Введение

Задача о вращении жидких гравитирующих эллипсоидов впервые была поставлена и решена Ньютоном (1686) [7, с. 531–537], в связи с проблемой исследования формы Земли. В дальнейшем ее исследованием занимались: Стирлинг (1735), Маклорен (1742), Симпсон (1743), Даламбер (1773), Лаплас (1778), Якоби (1834), Майер (1842), Лиувилль (1846), Дирихле (1875), Дедекинд, Риман, Пуанкаре (1885), Картан, Ляпунов, Рош (1850), Дарвин (1906), Джинс (1916), Чандрасекхар (1969) и многие другие ученые. Подробное изложение результатов их исследований имеется в монографии П. Аппеля [1], статье Л. Н. Сретенского [12], монографии Л. Лихтенштейна [4], курсах Г. Ламба [3] и М. Ф. Субботина [13], монографии С. Чандрасекхара [15].

Статья поступила в редакцию 4.12.2007

Сначала исследовались случаи вращения сплюснутых осесимметричных эллипсоидов, вращающихся с постоянной скоростью вокруг оси симметрии (эллипсоиды Маклорена). Якоби обнаружил, что жидкие фигуры равновесия могут быть и трехосными эллипсоидами, вращающимися с постоянной скоростью вокруг меньшей главной оси (эллипсоиды Якоби). В этих случаях жидкость вращается без деформаций, как твердое тело, что позволяет не делать никаких предположений о вязкости. Устойчивость этих фигур исследовал А. М. Ляпунов [6].

Дирихле рассмотрел случай пульсирующих вращающихся эллипсоидов, предполагая жидкость идеальной (эллипсоиды Дирихле). Риман [11] также рассмотрел случай, в котором эллипсоидальная масса жидкости деформируется, а жидкость предполагается идеальной (эллипсоиды Римана). Во всех этих исследованиях движение жидкости было однородным вихревым.

Трудной проблемой небесной механики является исследование движения нескольких гравитирующих жидких масс. В работах Е. В. Петкевича [9, 10] поставлена задача о движении двух гравитирующих масс жидкости. Важным частным случаем ее является задача о движении двух эллипсоидальных масс идеальной гравитирующей жидкости, каждая из которых имеет однородную завихренность. Естественно, что учет вязкости в этих задачах существенно изменит характер движения.

В конце XIX — начале XX веков однородные вихревые движения идеальной жидкости были использованы для исследования движений жидкого ядра Земли, с целью дать адекватное описание движения ее полюсов (Гринхил, Жуковский, Кельвин, Пуанкаре, Стеклов и другие). Результаты этих исследований и подробная библиография имеются в монографии Г. Морица и А. Мюллера [7].

Согласно современным экспериментальным исследованиям, изложенным в работе В. В. Бражкина [2], при высоких давлениях наблюдается сильный рост вязкости расплава железа. В этой же работе указано, что ядро Земли имеет своей основой расплав железа. Следовательно, должен существовать сильный рост вязкости жидкого ядра Земли в направлении к ее центру. Если предположить, что такой же рост вязкости существует у гравитирующих эллипсоидальных жидких небесных тел, то возникает необходимость построения математических моделей, учитывающих этот эффект. С этой целью в работе автора [14] рассмотрена задача о движении эллипсоидальной гравитирующей массы жидкости, вязкость которой задается как функция координат и длин полуосей эллипсоида. Функция, задающая вязкость, выбиралась так, чтобы движение эллипсоидальной массы жидкости было однородным вихревым.

Ниже решается аналогичная задача, в которой предполагается, что вязкость жидкости прямо пропорциональна давлению, которое равно нулю на границе жидкости.

1. Уравнения движения

Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную декартову систему координат, а через $Ox_1x_2x_3$ — подвижную, которая может вращаться вокруг своего начала O. Граница жидкого эллипсоида в осях $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1.1}$$

где c_1, c_2, c_3 — непрерывные достаточно гладкие функции времени t, удовлетворяющие условию

$$c_1c_2c_3 = R^3 = \text{const}. \tag{1.2}$$

Пространство внутри эллипсоида целиком заполнено гравитирующей несжимаемой жидкостью, кинематическая вязкость ν которой задана формулой

$$\nu = kp, \tag{1.3}$$

где k — константа, p — давление. Течение жидкости внутри эллипсоида в подвижных осях $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнениями [5, с. 741–746]

$$\begin{split}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu(p)\Delta\mathbf{v} + 2\sigma\nabla\nu(p)\\ - \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - \nabla\Phi,\end{split} \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости жидкости относительно подвижных осей $Ox_1x_2x_3$; σ — тензор скоростей деформаций жидкости с компонентами

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad i, j = 1, 2, 3; \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости подвижных осей $Ox_1x_2x_3$;

$-\Phi$ — потенциал гравитационных сил, определяемый формулами [3, с. 884–885]

$$\begin{gathered}
\Phi = \pi\rho\gamma(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),\\
\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2+\lambda)D}, \quad i = 1,2,3,\\
\chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int\limits_0^\infty \frac{d\,\lambda}{D},\\
D = [(c_1^2+\lambda)(c_2^2+\lambda)(c_3^2+\lambda)]^{\frac{1}{2}},
\end{gathered} \tag{1.7}$$

γ — гравитационная постоянная.

На границе жидкости давление будем считать равным нулю. Тогда вязкость жидкости (1.3) тоже обращается в нуль на границе. Поэтому в качестве граничных условий для уравнений (1.4), (1.5) следует взять условия непротекания через границу (1.1):

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\,|_S = 0, \tag{1.8}$$

где S — граница жидкости (1.1), $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе S, $\mathbf{u}$ — скорость точек границы жидкости относительно подвижных осей $Ox_1x_2x_3$.

Решение уравнений движения (1.4), (1.5) ищем в виде

$$v_1 = c_1\left(\omega_2^*\frac{x_3}{c_3} - \omega_3^*\frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{\dot c_1}{c_1}\,x_1 \qquad (123), \tag{1.9}$$

$$p = -p_0(t)\left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1\right), \tag{1.10}$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты вектора скорости, p — давление, $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ и $p_0(t)$ — неизвестные функции времени t. Символ (123) означает, что остальные выражения получаются круговой перестановкой индексов. Подставляя выражения (1.9) и (1.10) в уравнения (1.4), получаем три равенства вида $k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0,\ i = 1,2,3$, которые должны выполняться тождественно при всех значениях x_1, x_2, x_3. Это возможно только при выполнении равенств $k_{ij} = 0,\ i,j = 1,2,3$, которые в развернутом виде записываются так:

$$\ddot{c}_1 = c_1({\omega_2^*}^2 + {\omega_3^*}^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + 2c_3\omega_2^*\omega_2 + 2c_2\omega_3^*\omega_3 \\ - 2\pi\rho\gamma\alpha_1 c_1 + \frac{2p_0}{c_1}\left(\frac{1}{\rho} + 2k\frac{\dot{c}_1}{c_1}\right) \qquad (123), \quad (1.11)$$

$$\dot{\omega}_1^*\frac{c_2}{c_3} + \dot{\omega}_1 = -2\omega_1^*\frac{\dot{c}_2}{c_3} + \omega_2^*\omega_3^*\frac{c_2}{c_3} + 2kp_0\frac{\omega_1^*}{c_3^2}\left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3}\right) \\ + \omega_2\omega_3 + 2\omega_2^*\omega_3\frac{c_2}{c_3} - 2\omega_1\frac{\dot{c}_3}{c_3} \qquad (123), \quad (1.12)$$

$$\dot{\omega}_1^*\frac{c_3}{c_2} + \dot{\omega}_1 = -2\omega_1^*\frac{\dot{c}_3}{c_2} + \omega_2^*\omega_3^*\frac{c_3}{c_2} + 2kp_0\frac{\omega_1^*}{c_2^2}\left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3}\right) \\ - \omega_2\omega_3 - 2\omega_3^*\omega_2\frac{c_1}{c_2} - 2\omega_1\frac{\dot{c}_2}{c_2} \qquad (123), \quad (1.13)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на подвижные оси $Ox_1x_2x_3$.

Алгебраическое уравнение (1.2) и система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.11)–(1.13) представляют собой систему десяти уравнений для определения десяти неизвестных $p_0, c_i, \omega_i^*, \omega_i$, $i = 1, 2, 3$ как функций времени t.

2. Малые колебания осесимметричного эллипсоида

Полагая $c_1 = c_2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_1^* = \omega_2^* = \omega_3^* = 0$ и исключая с помощью уравнения (1.2) переменную c_3, приводим уравнения движения к виду

$$\ddot{c}_1 = c_1\omega_3^2 - 2\pi\rho\gamma\alpha_1 c_1 + \frac{2p_0}{c_1}\left(\frac{1}{\rho} - 2k\frac{\dot{c}_1}{c_1}\right),$$
$$-2R^3(c_1^{-3}\ddot{c}_1 - 3c_1^{-4}\dot{c}_1^2) = -2\pi\rho\gamma\alpha_3\frac{R^3}{c_1^2} + \frac{2p_0c_1^2}{R^3}\left(\frac{1}{\rho} + 4k\frac{\dot{c}_1}{c_1}\right), \qquad (2.1)$$
$$\dot{\omega}_3 = -2\omega_3\frac{\dot{c}_1}{c_1}.$$

Из последнего уравнения (2.1) следует, что переменные ω_3 и c_1 связаны соотношением

$$c_1^2\omega_3 = l, \qquad l = \text{const}, \qquad (2.2)$$

выражающим закон сохранения момента количества движения. Используя (2.2), исключим из первого уравнения (2.1) переменную ω_3.

Далее, исключая из первых двух уравнений (2.1) p_0 и вводя безразмерные переменные

$$\zeta = c_1/R, \qquad \tau = T^{-1}t, \qquad \eta = \frac{d\zeta}{d\tau},$$

где T — характерное время, сведем задачу к системе двух уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d\zeta}{d\tau} = \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = \Big\{L^2\zeta^3 - 2\pi\rho\gamma T^2\zeta(\alpha_1\zeta^6 - \alpha_3) + 6\frac{\eta^2}{\zeta} \\ -\frac{4k\rho}{T}\eta\Big[3\frac{\eta^2}{\zeta^2} - L^2\zeta^2 + \pi\rho\gamma T^2(2\alpha_1\zeta^6 + \alpha_3)\Big]\Big\} \\ \times\Big[\zeta^6 + 2 + \frac{4k\rho}{T}\frac{\eta}{\zeta}(\zeta^6 - 1)\Big]^{-1},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $L = lT/R^2$. Величины α_1, α_3 в случае сплюснутого эллипсоида вращения выражаются формулами [3, с. 886]

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \alpha_2 = (\xi^2 + 1)\xi \operatorname{arcctg}\xi - \xi^2, \\ \alpha_3 = 2(\xi^2 + 1)(1 - \xi \operatorname{arcctg}\xi), \\ \xi = (\zeta^6 - 1)^{-\frac{1}{2}}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Стационарные решения системы (2.3) определяются соотношением

$$L^2 = 2\pi\rho\gamma T^2(\alpha_1\zeta^4 - \alpha_3\zeta^{-2}), \tag{2.5}$$

где $1 \le \zeta \le \infty$. Обозначим через L_0 и ζ_0 значения L и ζ, удовлетворяющие уравнению (2.5). Тогда всякое решение уравнений (2.3) можно представить в виде

$$\zeta = \zeta_0 + \delta, \tag{2.6}$$

где δ — неизвестная функция безразмерного времени τ. Подставим (2.6) в уравнения (2.3) и выполним линеаризацию по η и δ, считая их малыми. Линеаризованные уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{d\delta}{d\tau} = \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = a\delta + b\eta,\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$a = -2\pi\rho\gamma T^2(4\zeta_0^6\alpha_{10} + \zeta_0^7\alpha_{11} + 2\alpha_{30} - \zeta_0\alpha_{31})(\zeta_0^6 + 2)^{-1},$$

$$b = -4k\pi\rho^2\gamma T(2\alpha_{10}\zeta_0^6 + \alpha_{30})(\zeta_0^6 + 2)^{-1},$$

$$\alpha_{10} = \zeta_0^6(\zeta_0^6 - 1)^{-3/2}\mathrm{arcctg}(\zeta_0^6 - 1)^{-1/2} - (\zeta_0^6 - 1)^{-1},$$

$$\alpha_{11} = -3\zeta_0^5(\zeta_0^6 - 1)^{-2}\big[(\zeta_0^6 + 2)(\zeta_0^6 - 1)^{-1/2}\mathrm{arcctg}(\zeta_0^6 - 1)^{-1/2} - 3\big],$$

$$\alpha_{30} = 2\zeta_0^6(\zeta_0^6 - 1)^{-1}\big[1 - (\zeta_0^6 - 1)^{-1/2}\mathrm{arcctg}(\zeta_0^6 - 1)^{-1/2}\big],$$

$$\alpha_{31} = 6\zeta_0^5\big[(\zeta_0^6 + 2)(\zeta_0^6 - 1)^{-5/2}\mathrm{arcctg}(\zeta_0^6 - 1)^{-1/2} - 3(\zeta_0^6 - 1)^{-2}\big].$$

Характеристическое уравнение системы (2.7)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

после раскрытия определителя принимает вид

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0.$$

Его решениями являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4a}).$$

Коэффициент a не зависит от k и при $\zeta_0 > 1$ $a < 0$. Коэффициент $b < 0$ и $|b|$ прямо пропорционален k. Тогда при $k = 0$ (случай идеальной жидкости) будет $b = 0$, а корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми $\lambda = \pm\sqrt{|a|}\,i$. Как известно, в этом случае нелинейные уравнения движения описывают незатухающие периодические колебания эллипсоида Дирихле [3, с. 907–910].

При достаточно малом k, когда $b^2 + 4a < 0$, корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными с отрицательными действительными частями. Эллипсоид Дирихле в этом случае совершает затухающие колебания, приближаясь к эллипсоиду Маклорена, которому соответствует $\zeta = \zeta_0$.

При достаточно большом k, когда $b^2 + 4a \geq 0$, корни характеристического уравнения будут действительными отрицательными. Эллипсоид Дирихле в этом случае асимптотически приближается к эллипсоиду Маклорена.

3. Колебания невращающейся сферической массы жидкости

Полагая в уравнениях (1.11)–(1.13)

$$\omega_1^* = \omega_2^* = \omega_3^* = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

находим, что в этом случае уравнения (1.12), (1.13) будут выполняться тождественно, а уравнения (1.11) принимают вид

$$\ddot{c}_1 = -2\pi\rho\gamma\alpha_1 c_1 + \frac{2p_0}{c_1}\left(\frac{1}{\rho} - 2k\frac{\dot{c}_1}{c_1}\right) \quad (123). \tag{3.1}$$

Используя уравнения (1.2), исключаем из уравнений (3.1) переменную c_3. Далее, исключая p_0 и вводя безразмерные переменные $\zeta_i = c_i/R,\ i = 1, 2,\ \tau = T^{-1}t$, приходим к системе уравнений

$$\frac{d\zeta_i}{d\tau} = \eta_i, \qquad a_{i1}\frac{d\eta_i}{d\tau} + a_{i2}\frac{d\eta_2}{d\tau} = f_i, \qquad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

где

$$a_{11} = \zeta_1 + 2k\rho T^{-1}(\eta_1 + \zeta_1\zeta_2^{-1}\eta_2) + \zeta_1^{-3}\zeta_2^{-2}(1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_1^{-1}\eta_1),$$
$$a_{12} = \zeta_1^{-2}\zeta_2^{-3}(1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_1^{-1}\eta_1),$$
$$a_{21} = \zeta_1^{-3}\zeta_2^{-2}(1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_2^{-1}\eta_2),$$
$$a_{22} = \zeta_2 + 2k\rho T^{-1}(\zeta_1^{-1}\zeta_2\eta_1 + \eta_2) + \zeta_1^{-2}\zeta_2^{-3}(1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_2^{-1}\eta_2),$$

$$\begin{aligned} f_1 = -2\pi\rho\gamma T^2\alpha_1\zeta_1^2[1 + 2k\rho T^{-1}(\zeta_1^{-1}\eta_1 + \zeta_2^{-1}\eta_2)] \\ + [2\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2}(\zeta_1^{-2}\eta_1^2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\eta_1\eta_2 + \zeta_2^{-2}\eta_2^2) \\ + 2\pi\rho\gamma T^2\alpha_3\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2}](1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_1^{-1}\eta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = -2\pi\rho\gamma T^2\alpha_2\zeta_2^2[1 + 2k\rho T^{-1}(\zeta_1^{-1}\eta_1 + \zeta_2^{-1}\eta_2)] \\ + [2\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2}(\zeta_1^{-2}\eta_1^2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\eta_1\eta_2 + \zeta_2^{-2}\eta_2^2) \\ + 2\pi\rho\gamma T^2\alpha_3\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2}](1 - 2k\rho T^{-1}\zeta_2^{-1}\eta_2). \end{aligned}$$

В нормальной форме система (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{d\tau} = \eta_1, \qquad \frac{d\eta_1}{d\tau} = (f_1a_{22} - f_2a_{12})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1}, \\ \frac{d\zeta_2}{d\tau} = \eta_2, \qquad \frac{d\eta_2}{d\tau} = (f_2a_{11} - f_1a_{21})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Система (3.3) имеет стационарное решение $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, описывающее равновесное состояние сферической массы жидкости. Тогда всякое другое решение системы (3.3) может быть представлено в виде

$$\zeta_1 = 1 + \delta_1, \qquad \zeta_2 = 1 + \delta_2, \qquad \eta_1, \quad \eta_2, \tag{3.4}$$

где δ_1 и δ_2 — новые неизвестные функции от τ. Подставим (3.4) в систему (3.3) и считая величины $\delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2$ малыми, выполним по ним линеаризацию. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{d\tau} &= \eta_i, \\ \frac{d\eta_i}{d\tau} &= -\frac{8}{3}\pi\rho\gamma T^2\left(\frac{2}{5}\delta_i + k\rho T^{-1}\eta_i\right), \end{aligned} \qquad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Таким образом, системы линеаризованных уравнений для переменных ζ_1, η_1 и ζ_2, η_2 оказались независимыми друг от друга и каждую из них можно решать отдельно. Учитывая, что эти системы отличаются друг от друга только входящими в них неизвестными переменными и начальными условиями, они решаются одинаково. Решение системы (3.5) ищем в виде

$$(\delta_i,\ \eta_i)^T = (b_1,\ b_2)^T \exp(\lambda\tau),$$

где b_1, b_2, λ неизвестные константы. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{16}{15}\pi\rho\gamma T^2 & -\frac{8}{3}k\pi\rho^2\gamma T - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение для λ

$$\lambda^2 + \frac{8}{3}k\pi\rho^2\gamma T\lambda + \frac{16}{15}\pi\rho\gamma T^2 = 0,$$

решение которого следующее:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4}{3}\left(-k\pi\rho^2\gamma T \pm \sqrt{(k\pi\rho^2\gamma T)^2 - \frac{3}{5}\pi\rho\gamma T^2}\right).$$

При $k = 0$ система становится консервативной и будет совершать незатухающие колебания в окрестности устойчивого положения равновесия, то есть шара. Корни характеристического уравнения в этом случае чисто мнимые $\lambda_{1,2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{5}\pi\rho\gamma T^2}\, i$.

При $0 < k < \sqrt{3/(5\pi\rho^3\gamma)}$ корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными с отрицательными действительными частями. Эллипсоидальная масса жидкости в этом случае будет совершать затухающие колебания, приближаясь к шару.

При $k > \sqrt{3/(5\pi\rho^3\gamma)}$ эллипсоидальная масса жидкости, которая имеет достаточно малую кинетическую энергию и достаточно близка по форме к шару, будет асимптотически приближаться к нему.

В заключение, автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимательное изучение работы, обсуждение результатов и ценные советы и замечания, позволившие найти новые подходы к проблеме.

Литература

[1] П. Аппель, *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости.* М.: ОНТИ, 1936, 376 с.

[2] В. В. Бражкин, *Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений: стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли* // Усп. физических наук. **170** (2000), N 5, 535–551.

[3] Г. Ламб, *Гидродинамика.* М.-Л.: Гостехиздат, 1947, 928 с.

[4] Л. Лихтенштейн, *Фигуры равновесия вращающейся жидкости.* М.: Наука, 1965, 252 с.

[5] Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа.* М.: Наука, 1973, 848 с.

[6] А. М. Ляпунов, *Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собрание сочинений.* М.: Изд. АН СССР, 1959, 5–113.

[7] Г. Мориц, А. Мюллер, *Вращение Земли: теория и наблюдения.* К.: Наукова думка, 1992, 512 с.

[8] И. Ньютон, *Математические начала натуральной философии.* М.: Наука, 1989, 690 с.

[9] Е. В. Петкевич, *Задача двух жидких тел* // Письма в Астрономический журнал. **3** (1977), N 9, 424–428.

[10] Е. В. Петкевич, *Уравнения внешней задачи двух тел* // Письма в Астрономический журнал. **3** (1977), N 11, 522–525.

[11] Б. Риман, *О движении жидкого однородного эллипсоида. Сочинения.* М.-Л: ОГИЗ, 1948, 339–366.

[12] Л. Н. Сретенский, *Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы* // Успехи мат. наук. (1938), вып. 5, 187–230.

[13] М. Ф. Субботин, *Курс небесной механики. Т. 3.* М.: Гостехиздат, 1949, 280 с.

[14] С. Н. Судаков, *О колебаниях вращающихся гравитирующих жидких эллипсоидов переменной вязкости* // Механика твердого тела. (2002), вып. 32, 217–226.

[15] С. Чандрасекхар, *Эллипсоидальные фигуры равновесия.* М.: Мир, 1973, 288 с.

Сведения об авторах

Сергей Никитович Судаков

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: techmech@iamm.ac.donetsk.ua