Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 4, 536 – 562

Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису

Микола І. Сєров, Олександр М. Омелян

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Анотація. В даній роботі проведена повна групова класифікація систем рівнянь хемотаксису.

2001 MSC. 35K57, 58D19.

Ключові слова та фрази. Групова класифікація, алгебра інваріантності, системи рівнянь хемотаксису.

1. Вступ

У сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму і рухаються зі сталою швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксисних властивостей, добре описуються математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера–Сегеля [22]

$$
\begin{aligned}
S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g(S) b,\\
b_t &= -\nu\partial_x[b\chi(S)S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S) b,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

де $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$, $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, причому $S(t,x)$ — концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ — щільність бактерій, $g(S)$ — питома швидкість росту бактерій, $\chi(S)$ — функція хемотаксисної відповіді, D_S та D_b — коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій, відповідно; ν, k_1 k_2 — сталі; t, x — часова та просторова змінні, відповідно. Моделлю Келлера–Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [14] та різні

Стаття надійшла в редакцію 10.10.2008

ISSN 1810 – 3200.

процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [3]. Перепишемо систему (1.1) у звичних для математичних досліджень позначеннях, узагальнивши її наступним чином

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1,u^2) \\ g^2(u^1,u^2) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

де $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$, $f(u^1)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $f \neq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, $u^a = u^a(x_0,x_1)$, $a = \overline{1,2}$, x_0 — часова, x_1 — просторова змінні, нижній індекс означає диференціювання за відповідною змінною. Зауважимо, що система (1.2) є частинним випадком системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[F(u^1,u^2) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + G(u^1,u^2), \quad (1.3)$$

де

$$F(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}, \qquad G(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$$

$f^{ab} = f^{ab}(u^1,u^2)$, $g^a = g^a(u^1,u^2)$, $a;b = 1;2$. Дослідженню симетрійних властивостей рівняння реакції конвекції дифузії

$$u_0 = \partial_1(f(u)u_1) + g(u)u_1 + h(u) \quad (1.4)$$

присвячено ряд робіт. Так, при $g(u) = h(u) = 0$ симетрійні властивості рівняння (1.4) прокласифіковані в роботі [6], при $g(u) = 0$ — в роботі [20]. Повний опис симетрій при довільних значеннях функцій $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ з точністю до перетворень еквівалентності проведений у роботах [17] та [19]. Симетрійний аналіз еволюційного рівняння другого порядку загального вигляду

$$u_0 = F(x_0,x_1,u,u_1,u_{11}) \quad (1.5)$$

проведений у роботах [1, 4, 5, 26]. Галілеєвська інварінтність системи (1.3) досліджена в роботах [12, 13, 15]. Ліївська та умовна симетрії системи (1.3) у випадку діагональної матриці F досліджена в роботі [18].

У даній роботі поставимо перед собою задачу: дослідити симетрійні властивості системи (1.2) в залежності від значення функцій $f(u^1)$, $g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$ та сталих λ_1, λ_2. Зазначимо, що при $f = 0$ симетрійні властивості системи (1.2) вивчено в роботах [16, 23, 24], тому надалі вважаємо, що $f \neq 0$.

2. Ядро симетрії та необхідні умови його розширення

Для дослідження симетрійних властивостей системи (1.2) застосуємо алгоритм Лі [7, 9, 11, 21, 25].

Подіявши продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \tag{2.1}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\mu = \overline{0, 1}$, $a = \overline{1, 2}$ на систему (1.2), після переходу на многовид, та розщеплення отриманої системи за похідними функцій u^a, одержимо визначальну систему для визначення координат інфінітезимального оператора (2.1) та функцій f, g^1, g^2. Визначальна система складається з трьох підсистем:

$$S_1(\xi, \eta) = 0, \qquad S_2(\xi, \eta, f) = 0, \qquad S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0.$$

Система $S_1 = 0$ є системою диференціальних рівнянь лише відносно функцій ξ^μ і η^a

$$\begin{aligned} &\xi^1_0 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \qquad a, b, c = 1; 2, \\ &\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \qquad 2\lambda_1 \eta^1_{1u^1} = -\xi^1_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Система $S_2(\xi, \eta, f) = 0$ пов'язує між собою координати інфінітезимального оператора ξ^μ, η^a та функцію $f(u^1)$ і має вигляд

$$\begin{aligned} &\eta^1 \dot f + \left(\eta^1_{u^1} - \eta^2_{u^2} - \frac{1}{u^2}\eta^2\right) f + \frac{1}{u^2}(\lambda_2 - \lambda_1)\eta^2_{u^1} = 0, \\ &u^2 \eta^1_1 \dot f + \left(u^2 \eta^1_{1u^1} + \frac{1}{2}\eta^2_1\right) f + \lambda_2 \eta^2_{1u^1} = 0, \\ &\eta^1_1 f + 2\lambda_2 \eta^2_{1u^2} = -\xi^1_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Система $S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0$ складається з двох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\eta^1 g^1_{u^1} + \eta^2 g^1_{u^2} = (\eta^1_{u^1} - \xi^0_0) g^1 + \eta^1_{u^2} g^2 + \eta^1_0 - \lambda_1 \eta^1_{11}, \\ &\eta^1 g^2_{u^1} + \eta^2 g^2_{u^2} = (\eta^2_{u^2} - \xi^0_0) g^2 + \eta^2_{u^1} g^1 + \eta^2_0 - \lambda_2 \eta^2_{11} - u^2 f \eta^1_{11}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

які пов'язують між собою функції g^1, g^2 та функції ξ^μ, η^a, f.

Зауваження 2.1. Покладаючи $f, g^1, g^2, \lambda_1, \lambda_2$ довільними у системах (2.2), (2.3), (2.4), одержимо

$$\xi^0 = d_0, \qquad \xi^1 = d_1, \qquad \eta^1 = \eta^2 = 0, \tag{2.5}$$

де d_0, d_1 — довільні сталі. В цьому випадку оператор (2.1) має вигляд

$$X = d_0\partial_0 + d_1\partial_1. \tag{2.6}$$

Оператор (2.6) породжує алгебру

$$A_0 = \langle\partial_0, \partial_1\rangle, \tag{2.7}$$

яку назвемо *ядром симетрії системи* (1.2).

Дослідимо, при яких значеннях функцій f, g^1, g^2 симетрія системи (1.2) ширша порівняно з алгеброю A_0. Необхідними умовами розширення симетрії є наступне твердження.

Теорема 2.1. *Якщо система* (1.2) *допускає розширення ядра симетрії* A_0, *то функція* $f(u^1)$ *набуває одного із наступних виглядів:*

1. $f = f(u^1)$,
2. $f = \lambda$,
3. $f = \frac{\lambda}{u^1}$,
4. $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$,
5. $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$,

де $\varphi(u^1)$ *— довільна гладка функція,* λ *— довільна стала.*

Доведення. Для доведення теореми розв'яжемо систему визначальних рівнянь, що складається із систем S_1 та S_2.

Загальним розв'язком системи $S_1(\xi, \eta)$ є функції

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = 2\dot{A}(x_0),\\
&\xi^1 = A(x_0)x_1 + B(x_0),\\
&\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\left[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)\right]u^1 + \beta^1(x_0, x_1),\\
&\eta^2 = \alpha^{21}(x_0, x_1)u^1 + \alpha^{22}(x_0, x_1)u^2 + \beta^2(x_0, x_1),
\end{aligned}$$

де $A, B, C, \alpha^{2a}, \beta^a$ — довільні гладкі функції своїх аргументів.

Внаслідок сумісного розв'язання 1-го та 3-го рівнянь системи (2.3) одержуються умови $\alpha_1^{21} = \alpha_1^{22} = \beta_1^2 = 0$. Тоді система $S_2 = 0$ набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&(\alpha^{11}u^1 + \beta^1)\dot{f} = -\alpha^{11}f,\\
&(\alpha_1^{11}u^1 + \beta_1^1)f = 2\lambda_1\alpha_1^{11},\\
&(\alpha^{21}u^1 + \beta^2)f = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha^{21}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Розв'язання системи (2.8) приводить до появи 5-ти нееквівалентних випадків вигляду функції f, наведених у формулюванні теореми.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що при вказаних значеннях функції $f(u^1)$ можливе розширення симетрії системи (1.2) порівняно з A_0.

1. $f = f(u^1)$ — довільна гладка функція. З системи (2.8) випливає

$$\xi_0^1 = \alpha_1^a = \beta^a = 0. \tag{2.9}$$

Врахувавши (2.9), одержимо

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 = 0, \qquad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{gathered} \tag{2.10}$$

де $\alpha^{22}(x_0)$ — довільна гладка функція, c_1, d_0, d_1 — довільні сталі. Порівнявши формули (2.5) і (2.10), легко бачити можливість розширення симетрії (2.7).

Аналогічно доводиться можливість розширення симетрії (2.7) у випадках 2–5. Не повторюючи цих міркувань, наведемо остаточний вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з вказаних $f(u^1)$.

2. При $f = \lambda$ координати інфінітезимального оператора (2.1) мають вигляд

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 = \beta^1(x_0), \qquad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{gathered} \tag{2.11}$$

де $\beta^1(x_0)$ — довільна гладка функція.

3. При $f = \frac{\lambda}{u^1}$ (λ — довільна стала) з системи (2.8) знаходимо

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 = \alpha^1(x_0)u^1, \qquad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{gathered} \tag{2.12}$$

де $\alpha^1(x_0)$ — довільна гладка функція.

4. При $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$ одержимо

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 = \alpha^1(x_0)u^1, \qquad \eta^2 = \alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{gathered} \tag{2.13}$$

де $\alpha^{21}(x_0)$ — довільна гладка функція.

5. При $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ маємо

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2A(x_0), \qquad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 = \alpha^1(x_0)u^1, \qquad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{gathered} \tag{2.14}$$

де $\alpha^1(x_0) = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)]$, $A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$ — довільні гладкі функції. Теорему доведено. $\square$

Лема 2.1. *Система* (1.2) *має групу неперервних перетворень еквівалентності, що задаються наступними формулами координат оператора еквівалентності* E

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + c_2, \qquad \xi^1 = c_1x_1 + c_3, \\ \eta^1 &= c_4u^1 + c_5, \qquad \eta^2 = c_6u^1 + c_7u^2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

в яких $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ — *довільні сталі, які в залежності від вигляду* f *набувають наступних значень:*

1) *при* $f = f(u^1)$, $\quad c_6 = 0$;

2) *при* $f = \lambda$, $\quad c_4 = c_6 = 0$;

3) *при* $f = \frac{\lambda}{u^1}$, $\quad c_5 = c_6 = 0$;

4) *при* $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$, $\quad c_5 = 0$;

5) *при* $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, $\quad c_5 = c_6 = 0$.

Доведення. Для доведення леми застосуємо алгоритм відшукання перетворень еквівалентності (див., наприклад, [2, 5, 7]).

Вигляд оператора еквівалентності E залежить від вигляду функції f.

1. Якщо $f = f(u^1)$ — довільна гладка функція, то оператор E шукаємо у вигляді:

$$E = \xi^\mu\partial_\mu + \eta^a\partial_{u^a} + \zeta\partial_f + \tau^a\partial_{g^a}. \tag{2.16}$$

Подіявши оператором E на систему (1.2) та на додаткові умови

$$\frac{\partial_f}{\partial_{x^\mu}} = \frac{\partial_f}{\partial_{u^2}} = \frac{\partial_{g^a}}{\partial_{x^\mu}} = 0, \tag{2.17}$$

отримуємо систему визначальних рівнянь для координат оператора (2.16) $\xi^\mu, \eta^a, \zeta, \tau^a$

$$\begin{aligned} &\xi^0_1 = \xi^1_0 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^bu^c} = \eta^a_\mu = \eta^2_{u^1} = 0, \qquad a, b, c = 1, 2, \\ &\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \qquad u^2\eta^2_{u^2} - \eta^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\zeta = \eta^1_{u^1}f, \qquad \tau^1 = (\eta^1_{u^1} - \xi^0_0)g^1, \qquad \tau^2 = (\eta^2_{u^2} - \xi^0_0)g^2. \tag{2.19}$$

Загальний розв'язок системи (2.18) має вигляд (2.15). Рівності (2.19) при умовах (2.15) запишуться так

$$\zeta = c_4f, \qquad \tau^1 = (c_4 - 2c_1)g^1, \qquad \tau^2 = (c_6 - 2c_1)g^2.$$

2. Якщо $f(u^1)$ — не довільна, а задається однією з формул f випадків 2)–5) з умови леми, то інфінітезимальний оператор еквівалентності E шукаємо у вигляді:

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a} + \tau^a \partial_{g^a}. \tag{2.20}$$

Подіявши продовженням оператора E на систему (1.2) і додаткові умови

$$\frac{\partial_{g^a}}{\partial_{x^\mu}} = 0, \tag{2.21}$$

після застосування алгоритму [5], знаходимо систему визначальних рівнянь для координат оператора (2.20) ξ^μ, η^a, τ^a

$$\begin{gathered} \xi^0_1 = \xi^1_0 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^1_{u^2} = \eta^a_{u^b u^c} = \eta^a_\mu = \eta^1_{u^2} = 0, \\ a, b, c = 1, 2,\ \mu = 0, 1 \\ \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \qquad u^2\eta^2_{u^2} - \eta^2 = 0, \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered} \tau^1 = (\eta^1_{u^1} - \xi^0_0)g^1, \qquad \tau^2 = \eta^2_{u^1} g^1 + (\eta^2_{u^2} - \xi^0_0)g^2, \\ \eta^1 \dot{f} + f\eta^1_{u^1} = 0, \qquad (u^2\eta^2_{u^2} - \eta^2)f = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta^2_{u^1}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Загальним розв'язком (2.22) є функції

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2c_1 x_0 + c_2, \qquad \xi^1 = c_1 x_1 + c_3, \\ \eta^1 = c_4 u^1 + c_5, \qquad \eta^2 = c_6 u^1 + c_7 u^2. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Якщо (2.24) підставити у (2.23), то одержимо

$$\tau^1 = (c_4 - 2c_1)g^1, \qquad \tau^2 = c_6 g^1 + (c_7 - 2c_1)g^2, \tag{2.25}$$

$$(c_4 u^1 + c_5)\dot{f} + c_4 f = 0, \qquad c_6(u^1 f - \lambda_1 + \lambda_2) = 0. \tag{2.26}$$

Розв'язавши рівняння (2.26), і приходимо до випадків 2)–5) леми. Лему доведено. □

Зауваження 2.2. Крім перетворень еквівалентності, одержаних в лемі (2.1), для більш конкретних функцій f і g мають місце і інші перетворення, які ми назвемо додатковими. Додаткові перетворення будуть вказані нижче для функції f конкретного вигляду.

3. Класифікація симетрійних властивостей системи (1.2) у випадку довільної функції $f(u^2)$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ u^2 f(u^1) & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

та прокласифікуємо її симетрійні властивості в залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$ при довільній функції $f(u^1)$.

Зауваження 3.1. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.1) має вигляд

$$x_0 = te^{2\theta_2} + \theta_0, \qquad x_1 = xe^{\theta_2} + \theta_1,$$
$$u^1 = w^1 e^{\theta_3} + \theta_5, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4}.$$

Крім основної групи еквівалентності система (3.1) при конкретних g допускає деякі додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1, \quad u^2 = w^2 e^{mt},$$

де a, b, m — деякі сталі.

Враховуючи зауваження (3.1), теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (3.1) формулюватимемо з точністю до вказаних перетворень еквівалентності.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.1. *Якщо система* (3.1) *допускає розширення ядра симетрії A_0, то функції g^1, g^2 задаються однією із формул:*

$$g^1 = \varphi^1(u^1), \qquad g^2 = u^2[\varphi^2(u^1) + \lambda_3 \ln u^2]; \quad (3.2)$$

$$g^1 = (u^2)^m \varphi^1(u^1), \qquad g^2 = (u^2)^{m+1} \varphi^2(u^1), \quad (3.3)$$

де λ_3, m — довільні сталі, $\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Враховуючи формули (2.10), систему (2.4) перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} &\alpha^{22}(x_0) u^2 g^1_{u^2} = -2c_1 g^1, \\ &\alpha^{22}(x_0) u^2 g^2_{u^2} = (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1) g^2 + \dot{\alpha}^{22}(x_0) u^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При довільних g^1 і g^2 з системи (3.4) випливає, що $\alpha^{22}(x_0) = c_1 = 0$.

Врахувавши формули (2.10), одержуємо, що в цьому випадку МАІ системи (3.1) є алгебра A_0.

Проаналізуємо тепер, при яких функціях g^1, g^2 система (3.1) допускає розширення ядра симетрії A_0. Для цього необхідно, як випливає з (3.4), щоб функції g^1, g^2 були розв'язками наступної структурної системи, (див. [21])

$$\begin{aligned} æu^2 g^1_{u^2} &= mg^1, \\ æu^2 g^2_{u^2} &= (m+æ)g^2 + \lambda_3 u^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

де $æ = \{0;1\}$, m, λ_3 — довільні сталі. Система (3.5) при $æ = 1$ зв'язана з системою (3.4) умовами

$$m\alpha^{22}(x_0) = -2c_1, \qquad \lambda_3\alpha^{22} = \dot{\alpha}^{22}. \tag{3.6}$$

Розв'язок системи (3.5) при $æ = 1$ залежить від значення сталої m. Можливі два суттєво різні випадки.

1. $m = 0$. Загальний розв'язок системи (3.5) має вигляд (3.2), де $\lambda_3 \neq 0$, φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції.

2. $m \neq 0$. З диференціальних наслідків умов (3.6) випливає, що $\dot{\alpha}^{22} = \lambda_3 = 0$. Тоді загальний розв'язок системи (3.5) має вигляд (3.3).

При $æ = 0$ з системи (3.5) одержуємо, що розширення ядра симетрії A_0 відбувається лише при $g^1 = g^2 = 0$, що є частинним випадком формул (3.2), (3.3). Теорему доведено. □

Зауваження 3.2. Оскільки формули (3.2), (3.3) при $\lambda_3 = m = 0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетрійних властивостей системи (3.1) у формулах (3.2) будемо вважати $\lambda_3 \neq 0$.

Умови теореми (3.1) є лише необхідними умовами розширення ядра A_0 симетрії системи (3.1), але не достатніми. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.1) подана в наступній теоремі.

Теорема 3.2. *Якщо система* (3.1) *допускає розширення ядра* A_0 *системи, то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій* g^1, g^2 *наведені в таблиці* 1.

Таблиця 1. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.1)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1.	$g^1 = \varphi^1(u^1)$, $g^2 = u^2(\varphi^2(u^1) + \lambda_3 \ln u^2)$	$\partial_0, \partial_1,\ Q_1 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2}$
2.	$g^1 = (u^2)^m \varphi^1(u^1)$, $g^2 = (u^2)^{m+1} \varphi^2(u^1)$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^2\partial_{u^2}$
3.	$g^1 = 0$, $g^2 = 0$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$, $I = u^2\partial_{u^2}$

У таблиці 1 $\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1)$ — довільні гладкі функції, $\lambda_3 \neq 0$, λ_4, m — довільні сталі.

Доведення. В теоремі (3.1) показано, що розширення ядра симетрії A_0 системи (3.1) можливе лише у випадку, коли функції g^a задаються формулою (3.2) або (3.3). Розглянемо кожну з цих формул окремо.

A. Нехай, функції g^1, g^2 мають вигляд (3.2). Підставивши (3.2) в систему (2.4), одержимо

$$c_1 = 0, \qquad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22} = 0,$$

звідки $\alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0}$, c_2 — довільна стала.

З формул (2.10) одержуємо алгебру, наведену в першому пункті таблиці 1.

B. Якщо функції g^a задаються формулами (3.3), то з системи (2.4) маємо

$$\begin{aligned} &(m\alpha^{22} + 2c_1)\varphi^1 = 0, \\ &(m\alpha^{22} + 2c_1)\varphi^2 = \dot{\alpha}^{22}(u^2)^{-m}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

У випадку, коли φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції, з системи (3.7) отримуємо

$$\dot{\alpha}^{22} = 0, \qquad m\alpha^{22} + 2c_1 = 0,$$

тобто

$$\alpha^{22} = -2c_2, \qquad c_1 = mc_2, \tag{3.8}$$

де c_2 — довільна стала. З формул (2.10), (3.8) одержуємо алгебру, наведену в другому пункті таблиці 1. Розширення симетрії другого пункту таблиці 1 можливі лише при

$$m = 0, \qquad \varphi^1 = 0, \qquad \varphi^2 = \lambda_4.$$

У цьому випадку

$$\alpha^{22} = 2\lambda_4 c_1 x_0 + c_2, \tag{3.9}$$

де λ_4 і c_2 — довільні сталі. З формул (2.10), (3.9), застосувавши перетворення еквівалентності, наведені у зауваженні 3.1, одержуємо 3-й пункт таблиці 1. Теорему доведено. $\square$

4. Симетрійні властивості системи (1.2) при $f = \lambda$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей у залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 4.1. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (4.1) має вигляд

$$\begin{gathered} x_0 = te^{2\theta_2} + \theta_0, \qquad x_1 = xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 = w^1 + \theta_3, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4}. \end{gathered} \qquad (4.2)$$

Крім основної групи еквівалентності система (4.1) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 + kt, \quad u^2 = w^2 e^{mt}, \qquad (4.3)$$

де a, b, k, m — деякі сталі.

Враховуючи зауваження (4.1), теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (4.1) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (4.2) та (4.3).

Необхідною умовою розширення ядра симетрії A_0 системи (4.1) є наступне твердження.

Теорема 4.1. *Якщо система* (4.1) *допускає розширення ядра симетрії* A_0*, то функції* g^1, g^2 *задаються формулами* (3.2), (3.3) *або однією із наступних формул:*

$$g^1 = \varphi^1(\omega) + \lambda_3 u^1, \qquad g^2 = u^2[\varphi^2(\omega) + \lambda_4 u^1]; \qquad (4.4)$$

$$g^1 = e^{mu^1}\varphi^1(\omega), \qquad g^2 = u^2 e^{mu^1}\varphi^2(\omega), \qquad (4.5)$$

де $\omega = ku^1 + \ln u^2$*,* $m, k, \lambda_3, \lambda_4$ *— довільні сталі,* $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ *— довільні гладкі функції.*

Доведення. Підставивши формули (2.11) у систему (2.4), одержимо

$$\begin{aligned}&\beta^1(x_0)g^1_{u^1}+\alpha^{22}(x_0)u^2g^1_{u^2}=-2c_1g^1+\dot\beta^1(x_0),\\&\beta^1(x_0)g^2_{u^1}+\alpha^{22}(x_0)u^2g^2_{u^2}=(\alpha^{22}(x_0)-2c_1)g^2+\dot\alpha^{22}(x_0)u^2.\end{aligned}\tag{4.6}$$

З (4.6) випливає, що функції g^a повинні задовольняти наступній структурній системі

$$\begin{aligned}&æg^1_{u^1}-ku^2g^1_{u^2}=mg^1+\lambda_3,\\&æg^2_{u^1}-ku^2g^2_{u^2}=(m-k)g^2+\lambda_4u^2,\end{aligned}\tag{4.7}$$

де $æ=\{0;1\}$, k,m,λ_3,λ_4 — довільні сталі. Якщо $æ=0$, то система (4.7) співпаде з системою (3.5), проаналізованою в теоремі 3.1, згідно якої функції g^a задаються формулами (3.2) та (3.3).

Якщо $æ=1$, то система (4.7) зв'язана з системою (4.6) умовами

$$\alpha^{22}+k\beta^1=0,\quad m\beta^1=-2c_1,\quad \lambda_3\beta^1=\dot\beta^1,\quad \lambda_4\alpha^{22}=\dot\alpha^{22}.\tag{4.8}$$

Розв'язок системи (4.7) при $æ=1$ залежить від значення сталої m. Можливі два суттєво різні випадки.

1. $m=0$. В цьому випадку загальний розв'язок системи (4.7) задається функціями (4.4).

2. $m\neq 0$. З диференціальних наслідків 1-ї та 2-ї умови (4.8) одержуємо
$$\dot\alpha^{22}=\dot\beta^1=0,\qquad \lambda_3=\lambda_4=0.\tag{4.9}$$

При умовах (4.9) загальним розв'язком системи (4.7) є функції (4.5). Теорему доведено. □

Зауваження 4.2. Оскільки формули (4.4), (4.5) при $\lambda_3=\lambda_4=m=0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетрійних властивостей системи (4.1) у формулах (4.4) будемо вважати $|\lambda_3|+|\lambda_4|\neq 0$.

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (4.1), використавши результати теореми 4.1.

Теорема 4.2. *Якщо система* (4.1) *допускає розширення ядра симетрії* A_0*, то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій* g^1, g^2 *наведені у таблиці* 1 *та в таблиці* 2.

Таблиця 2. Класифікація симетрійних властивостей системи (4.1)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1.	$g^1 = e^{mu^1}\varphi^1(\omega)$, $g^2 = u^2 e^{mu^1}\varphi^2(\omega)$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1)$ $+2(-\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2})$
2.	$g^1 = \varphi^1(\omega) + \lambda_3 u^1$, $g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) - k\lambda_3 u^1)$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_{u^1} - ku^2\partial_{u^2})$
3.	$g^1 = \lambda_5 e^{u^1}$, $g^2 = \lambda_6 e^{u^1} u^2$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^2\partial_{u^2}$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2\partial_{u^1}$
4.	$g^1 = \lambda_5(u^2)^n e^{mu^1} - m\lambda_9$, $g^2 = u^2(\lambda_6(u^2)^n e^{mu^1} + n\lambda_9)$	$\partial_0, \partial_1, Q = n\partial_{u^1} - mu^2\partial_{u^2}$, $D = n(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1)$ $+ 2n\lambda_9 x_0 Q - 2u^2\partial_{u^2}$
5.	$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7$, $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D > 0$	∂_0, ∂_1, $Q_1 = e^{m_1 x_0}(\lambda_5\partial_{u^1} + (m_1 - \lambda_3)u^2\partial_{u^2})$, $Q_2 = e^{m_2 x_0}((m_2 - \lambda_6)\partial_{u^1} + \lambda_4 u^2\partial_{u^2})$
6.	$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7$, $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D = 0, \quad \lvert\lambda_3\rvert + \lvert\lambda_5\rvert + \lvert\lambda_6\rvert \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[x_0(2\lambda_5\partial_{u^1}$ $+ (\lambda_6 - \lambda_3)u^2\partial_{u^2}) + u^2\partial_{u^2}]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}[2\lambda_5\partial_{u^1} + (\lambda_6 - \lambda_3)u^2\partial_{u^2}]$
7.	$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7$, $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D < 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[2\lambda_5 \cos\beta x_0 \partial_{u^1}$ $+ ((\lambda_6 - \lambda_3)\cos\beta x_0 - 2\beta \sin\beta x_0)u^2\partial_{u^2}]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}[2\lambda_5 \sin\beta x_0 \partial_{u^1}$ $+ (2\beta\cos\beta x_0 + (\lambda_6 - \lambda_3)\sin\beta x_0)u^2\partial_{u^2}]$
8.	$g^1 = 0$, $g^2 = u^1 u^2$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = \partial_{u^1} + x_0 Q_2, \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2}$
9.	$g^1 = 0$, $g^2 = 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2}$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$

У таблиці 2 $m, n, \lambda_i,\ i = \overline{1,9}$ — довільні сталі, $\omega = \ln u^2 + ku^1$, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції; $D = (\lambda_3 - \lambda_6)^2 + 4\lambda_4\lambda_5$ — дискримінант, а m_1, m_2 — корені характеристичного рівняння $m^2 - (\lambda_3 + \lambda_6)m + \lambda_3\lambda_6 - \lambda_4\lambda_5 = 0$, $\alpha = \frac{\lambda_3+\lambda_6}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\lvert(\lambda_3 - \lambda_6)^2 + 4\lambda_4\lambda_5\rvert}$.

5. Симетрійні властивості системи (1.2) при $f = \frac{\lambda}{u^1}$

У цьому підрозділі розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda}{u^1}u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

де λ — довільна стала, та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей у залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 5.1. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (5.1) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 = te^{2\theta_2} + \theta_0, \qquad x_1 = xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 = w^1 e^{\theta_3}, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Крім основної групи еквівалентності система (5.1) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, наприклад,

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 e^{kt}, \quad u^2 = w^2 e^{mt}, \tag{5.3}$$

де a, b, k, m — деякі сталі. Тому теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (5.1) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (5.2), (5.3).

Необхідною умовою розширення ядра симетрії A_0 системи (5.1) є твердження.

Теорема 5.1. *Якщо система* (5.1) *допускає розширення ядра симетрії A_0, то функції g^1, g^2 задаються формулами* (3.2), (3.3) *або однією із наступних формул:*

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1), \qquad g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + \lambda_4 \ln u^2); \tag{5.4}$$

$$g^1 = (u^1)^{m+1}\varphi^1(\omega), \qquad g^2 = u^2(u^1)^m \varphi^2(\omega), \tag{5.5}$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$; $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $m, k, \lambda_3, \lambda_4$ *— довільні сталі.*

Доведення. Підставивши формули (2.12), які задають координати інфінітезимального оператора (2.1) для системи (5.1), у систему (2.4) одержимо

$$\begin{aligned} \alpha^1(x_0)u^1 g^1_{u^1} + \alpha^{22}(x_0)u^2 g^1_{u^2} = (\alpha^1(x_0) - 2c_1)g^1 + \dot\alpha^1(x_0)u^1, \\ \alpha^1(x_0)u^1 g^2_{u^1} + \alpha^{22}(x_0)u^2 g^2_{u^2} = (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1)g^2 + \dot\alpha^{22}(x_0)u^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Очевидно, що при довільних функціях g^1, g^2 система (5.6) не допускає розширення ядра симетрії A_0.

Система (5.6) допускає найбільш широкий клас функцій g^a, при яких можливе розширення ядра симетрії A_0, якщо вони задовольняють структурній системі

$$\begin{aligned} æu^1 g^1_{u^1} + ku^2 g^1_{u^2} = (m + æ)g^1 + k_1 u^1, \\ æu^1 g^2_{u^1} + ku^2 g^2_{u^2} = (m + k)g^2 + k_2 u^2, \end{aligned} \tag{5.7}$$

де $æ = \{0;1\}$; k, m, k_1, k_2 — довільні сталі. Загальний розв'язок системи (5.7) при $æ = 0$ задається формулами (3.2), (3.3). Система (5.7) при $æ = 1$ зв'язана з системою (5.6) умовами

$$\alpha^{22} - k\alpha^1 = 0, \quad m\alpha^1 = -2c_1, \quad k_1\alpha^1 = \dot\alpha^1, \quad k_2\alpha^1 = \dot\alpha^{22}.$$

Розв'язок системи (5.7) залежить від значення сталої m.

Якщо $m = 0$, то загальний розв'язок системи (5.7) має вигляд (5.4), а при $m \neq 0$ задається формулами (5.5). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 5.2. Якщо у зображеннях функцій g^a, заданих формулами (5.4) покласти $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, то одержаний вигляд функцій g^a буде частинним випадком зображення функцій g^a, заданих формулами (5.5), при умові $m = 0$. А отже, класи систем (5.1), (5.4) та (5.1), (5.5) матимуть непорожній перетин. Щоб уникнути в наступних дослідженнях симетрійних властивостей розгляду еквівалентних систем накладаємо обмеження на параметри зображень функцій g^a у формулах (5.4): $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (5.1), використавши результати теореми 5.1.

Теорема 5.2. *Якщо система* (5.1) *допускає розширення ядра симетрії A_0, то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій g^1, g^2 наведені в таблиці* 1 *та в таблиці* 3.

Таблиця 3. Класифікація симетрійних властивостей системи (5.1)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1.	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2(\varphi^2(u^2) + \lambda_4 \ln u^2)$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^1}$
2.	$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + \lambda_3 \ln u^2)$	$\partial_0, \partial_1,\ Q = e^{\lambda_3 x_0}(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2})$
3.	$g^1 = (u^1)^{m+1}\varphi^1(\omega)$, $g^2 = u^2(u^1)^m\varphi^2(\omega)$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1)$ $- 2(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2})$
4.	$g^1 = u^1(\lambda_5(u^1)^n(u^2)^m + m\lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_6(u^1)^n(u^2)^m - n\lambda_7)$	$\partial_0, \partial_1, Q = mu^1\partial_{u^1} - nu^2\partial_{u^2}$, $D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7 x_0 Q)$ $- 2u^2\partial_{u^2}$
5.	$g^1 = \lambda_5(u^1)^{n+1}$, $g^2 = \lambda_6(u^1)^n u^2$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \dfrac{2}{n}u^1\partial_{u^1}$, $Q = u^2\partial_{u^2}$

6.	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D > 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{m_1 x_0}(\lambda_5 u^1 \partial_{u^1}$ $+ (m_1 - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2})$, $Q_2 = e^{m_2 x_0}((m_2 - \lambda_6) u^1 \partial_{u^1}$ $+ \lambda_4 u^2 \partial_{u^2})$
7.	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D = 0,\ \lvert\lambda_3\rvert + \lvert\lambda_5\rvert + \lvert\lambda_6\rvert \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[x_0(\lambda_5 u^1 \partial_{u^1}$ $+ (\alpha - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2}) + u^2 \partial_{u^2}]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}[\lambda_5 u^1 \partial_{u^1} + (\alpha - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2}]$
8.	$g^1 = \lambda_7 u^1$, $g^2 = \lambda_4 u^2 \ln u^1$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^2 \partial_{u^2}$, $Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + \lambda_4 x_0 u^2 \partial_{u^2}$
9.	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_8)$, $D < 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[\lambda_5 \cos\beta x_0 u^1 \partial_{u^1}$ $+ ((\alpha - \lambda_3)\cos\beta x_0 - \beta \sin\beta x_0) u^2 \partial_{u^2}]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}[\lambda_5 \sin\beta x_0 u^1 \partial_{u^1}$ $+ (\beta\cos\beta x_0 + (\alpha - \lambda_3)\sin\beta x_0) u^2 \partial_{u^2}]$
10.	$g^1 = 0$, $g^2 = 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2 \partial_{u^2}$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0(\lambda_7 Q_1 + \lambda_8 Q_2)$

В таблиці 3 $m, n, \lambda_i,\ i = \overline{1,9}$ — довільні сталі, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, $D = (\lambda_3 - \lambda_6)^2 + 4\lambda_4\lambda_5$ — дискримінант, а m_1, m_2 — корені характеристичного рівняння $m^2 - (\lambda_3 + \lambda_6)m + \lambda_3\lambda_6 - \lambda_4\lambda_5 = 0$, $\alpha = \frac{\lambda_3 + \lambda_6}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$.

6. Симетрійні властивості системи (1.2) при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1} u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей у залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 6.1. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (6.1) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= t e^{2\theta_2} + \theta_0, \qquad x_1 = x e^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3}, \qquad u^2 = w^2 e^{\theta_4} + \theta_5 w^1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Крім основної групи еквівалентності система (6.1) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, вигляду (5.3). Тому теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (6.1) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (6.2) та (5.3).

Необхідною умовою розширення ядра симетрії A_0 системи (6.1) є наступне твердження.

Теорема 6.1. *Якщо система* (6.1) *допускає розширення ядра симетрії* A_0, *то функції* g^1, g^2 *задаються формулами* (3.2), (3.3), (5.4), (5.5) *або з точністю до перетворень еквівалентності* (2.15) *мають вигляд*

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3), \qquad g^2 = u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega), \tag{6.3}$$

де $\omega = u^1$, λ_3 *— довільна стала;*

$$g^1 = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}}\varphi^1(\omega), \qquad g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}}[u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega)], \tag{6.4}$$

де $\omega = u^1$;

$$g^1 = (u^1)^{m+1}\varphi^1(\omega), \qquad g^2 = (u^1)^m[u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega)], \tag{6.5}$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k\ln u^1$, $k \neq 0$, m *— довільні сталі;*

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3) + \lambda_4 u^2, \\ g^2 &= u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega) + \lambda_4\frac{(u^2)^2}{u^1}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k\ln u^1$, λ_3, λ_4, k *— довільні сталі,* $k \neq 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, *причому в формулах* (6.3)–(6.6) $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ *— довільні гладкі функції.*

Доведення. Як уже зазначено на початку даної статті, розв'язком визначальних систем $S_1(\xi,\eta) = 0$ та $S_2(\xi,\eta,f) = 0$ при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$ є координати оператора (2.1), задані формулами (2.13), враховуючи які, визначальну систему $S_3(\xi,\eta,f,g) = 0$ перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} &\alpha^1(x_0)u^1 g^1_{u^1} + (\alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}u^2)g^1_{u^2} \\ &\qquad\qquad\qquad = (\alpha^1(x_0) - 2c_1)g^1 + \dot{\alpha}^1 u^1, \\ &\alpha^1(x_0)u^1 g^2_{u^1} + (\alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}u^2)g^2_{u^2} \\ &\qquad = (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1)g^2 + \alpha^{21}(x_0)g^1 + \dot{\alpha}^{21}u^1 + \dot{\alpha}^{22}u^2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Найбільш широкий клас функцій g^a, що задовольняють систему (6.7), і при цьому розширюється ядро симетрії A_0, можливий при умовах

$$\begin{aligned} &\alpha^1 = k_1\varphi(x_0), \quad \alpha^{21} = k_0\varphi(x_0), \quad \alpha^{22} = k_2\varphi(x_0), \\ &\dot{\alpha}^1 = k_4\varphi(x_0), \quad \dot{\alpha}^{21} = k_5\varphi(x_0), \quad \dot{\alpha}^{22} = k_6\varphi(x_0), \\ &\qquad\qquad -2c_1 = k_3\varphi(x_0), \end{aligned} \tag{6.8}$$

де $\varphi(x_0)$ — довільна гладка функція, $k_0, k_1, \ldots, k_6$ — довільні сталі. Враховуючи (6.8), з (6.7) одержуємо структурну систему для визначення функцій g^a:

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g^1_{u^1} + (k_0 u^1 + k_2 u^2) g^1_{u^2} &= (k_1 + k_3) g^1 + k_4 u^1, \\ k_1 u^1 g^2_{u^1} + (k_0 u^1 + k_2 u^2) g^2_{u^2} &= (k_2 + k_3) g^2 + k_0 g^1 + k_5 u^1 + k_6 u^2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Проаналізуємо структурну систему (6.9) та її вплив на розв'язки системи (6.7). Розв'язок системи (6.9) суттєво залежить від співвідношення між сталими k_0, k_1, k_2. Якщо в структурній системі (6.9) покласти $k_0 = 0$, то система (6.9) співпаде з системою (5.7). Якщо ж $k_0 \neq 0$, і $k_1 \neq k_2$, то система (6.9) за допомогою перетворень еквівалентності (2.15) при $\theta = -\frac{k_0}{k_2}$ зводиться до системи (5.7), дослідженої в теоремі 5.1, згідно якої функції g^a задаються формулами (5.5), (5.4) або (3.2), (3.3).

Якщо $k_0 \neq 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $k_0 = 1$) і $k_1 = k_2$, то, як випливає із формул (6.8), стає очевидно, що $k_4 = k_6$. Тоді система (6.9) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g^1_{u^1} + (u^1 + k_1 u^2) g^1_{u^2} &= (k_1 + k_3) g^1 + k_4 u^1, \\ k_1 u^1 g^2_{u^1} + (u^1 + k_1 u^2) g^2_{u^2} &= (k_1 + k_3) g^2 + g^1 + k_4 u^2 + k_5 u^1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Розв'язок системи (6.10) залежить від значень параметрів k_1, k_3. Одержуємо чотири нееквівалентні випадки:

1) $k_1 = 0, \quad k_3 = 0,$

2) $k_1 = 0, \quad k_3 \neq 0,$

3) $k_1 \neq 0, \quad k_3 = 0,$

4) $k_1 \neq 0, \quad k_3 \neq 0.$

1) Нехай $k_1 = 0, k_3 = 0$. Якщо $k_1 = 0$, то з рівнянь (6.8) випливає, що $k_4 = 0$. Тоді система (6.10) набуде вигляду

$$u^1 g^1_{u^2} = 0, \qquad u^1 g^2_{u^2} = g^1 + k_5 u^1. \tag{6.11}$$

Розв'язавши рівняння (6.11), одержуємо зображення функцій g^a вигляду (6.3), де $\lambda_3 = -k_5$.

2) Розглянемо випадок $k_1 = 0, k_3 \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $k_3 = 1$. З рівнянь (6.8) випливає, що $k_4 = k_5 = 0$. Тоді система (6.10) набуде вигляду

$$u^1 g^1_{u^2} = g^1, \qquad u^1 g^2_{u^2} = g^2 + g^1,$$

загальним розв'язком якої є функції (6.4).

3) Якщо $k_1 \neq 0, k_3 = 0$, то система (6.10) набуде наступного вигляду

$$\begin{aligned} k_1u^1g^1_{u^1} + (u^1 + k_1u^2)g^1_{u^2} &= k_1g^1 + k_4u^1, \\ k_1u^1g^2_{u^1} + (u^1 + k_1u^2)g^2_{u^2} &= k_1g^2 + g^1 + k_5u^1 + k_4u^2. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Загальний розв'язок системи (6.12) має вигляд (6.6), де $k = -\frac{1}{k_1}$, $\lambda_3 = -k_5, \lambda_5 = k_4$.

4) Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то з (6.8) випливає, що $k_4 = k_5 = 0$. В цьому випадку система (6.10) має вигляд

$$\begin{aligned} k_1u^1g^1_{u^1} + (u^1 + k_1u^2)g^1_{u^2} &= (k_1 + k_3)g^1, \\ k_1u^1g^2_{u^1} + (u^1 + k_1u^2)g^2_{u^2} &= (k_1 + k_3)g^2 + g^1. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Розв'язавши систему (6.13), одержуємо зображення функцій g^a, задане формулами (6.5), де $m = \frac{k_3}{k_1}$. Теорему доведено. $\square$

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (6.1), використавши результати теореми 6.1.

Зауваження 6.2. У формулах (6.5), (6.6) обмеження накладені з метою уникнути їх перетину.

Теорема 6.2. *Якщо система* (6.1) *допускає розширення ядра симетрії* A_0 *системи, то з точністю до перетворень еквівалентності її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій* g^1, g^2 *наведені в таблицях* 1, 3 *та в таблиці* 4.

Таблиця 4. Класифікація симетрійних властивостей системи (6.1)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1.	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^1) + \lambda_3)$, $g^2 = u^1\varphi^2(u^1) + u^2\varphi^1(u^1)$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{-\lambda_3 x_0}Q$
2.	$g^1 = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}}\varphi^1(u^1)$, $g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1\varphi^2(u^1) + u^2\varphi^1(u^1))$	$\partial_0, \partial_1, Q$
3.	$g^1 = (u^1)^{m+1}\varphi^1(\omega)$, $g^2 = (u^1)^m(u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega))$, $\omega = \dfrac{u^2}{u^1} + k\ln u^1$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2I + 2kQ$

4.	$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + k) + u^2,$ $g^2 = u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega) + \dfrac{(u^2)^2}{u^1},$ $\omega = \dfrac{u^2}{u^1} + k\ln u^1, \quad k \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{-kx_0}(I - kQ)$
5.	$g^1 = (u^1)^{m+1},$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) + u^2(u^1)^m,$ $m \neq 0, \quad n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q,$ $D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^1})$ $+ 2n(\lambda_8 x_0 Q - u^2\partial_{u^2})$
6.	$g^1 = \lambda_5(u^1)^{m+1},$ $g^2 = (u^1)^m(\lambda_6 u^2 + u^1),$ $\lvert\lambda_5\rvert + \lvert\lambda_6\rvert \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2I,$ $Q_1 = Q + (\lambda_6 - \lambda_5)u^2\partial_{u^2}$
7.	$g^1 = u^1((u^1)^m + \lambda_6),$ $g^2 = u^2((u^1)^m + \lambda_7) + \lambda_8 u^1,$ $m \neq 0, \ \lambda_6 \neq 0, \ \lambda_7 \neq \lambda_6$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_6)x_0}Q,$ $Q_2 = \lambda_8 Q + (\lambda_7 - \lambda_6)u^2\partial_{u^2}$
8.	$g^1 = u^1((u^1)^m + \lambda_7),$ $g^2 = u^2((u^1)^m + \lambda_7) + \lambda_8 u^1,$ $m \neq 0, \ \lambda_7 \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q, Q_1 = \lambda_8 x_0 Q - u^2\partial_{u^2}$
9.	$g^1 = (u^1)^{m+1},$ $g^2 = (u^1)^m(\lambda_8(u^1)^{m+1} + u^2),$ $m \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q,$ $D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(I + mu^2\partial_{u^2})$
10.	$g^1 = \lambda_5 u^1,$ $g^2 = (u^1)^{n+1} + \lambda_7 u^2,$ $n \neq 0, \ \lambda_7 \neq \lambda_5$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_5)x_0}Q,$ $Q_2 = I + nu^2\partial_{u^2}$
11.	$g^1 = u^1,$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) + u^2,$ $n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q, Q_1 = I + nu^2\partial_{u^2} - n\lambda_8 x_0 Q$
12.	$g^1 = 0,$ $g^2 = (u^1)^n + \lambda_6 u^1 + \lambda_7,$ $n \neq 1, \ \lambda_7 \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}$
13.	$g^1 = \lambda_3 u^2 + \lambda_5 u^1,$ $g^2 = u^1\Big(\lambda_4\Big(\dfrac{u^2}{u^1}\Big)^2 + \dfrac{(\lambda_6 - \lambda_5)^2}{4(\lambda_4 - \lambda_3)}\Big)$ $+ \lambda_6 u^2,$ $\lvert\lambda_3\rvert + \lvert\lambda_4\rvert \neq 0, \ \lambda_4 \neq \lambda_3, \ \lambda_6 \neq \lambda_5$	$\partial_0, \partial_1, I, D = (\lambda_4 - \lambda_3)$ $\times[(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^2\partial_{u^2}]$ $-(\lambda_6 - \lambda_5)Q + x_0(2\lambda_5(\lambda_4 - \lambda_3)$ $-\lambda_3(\lambda_6 - \lambda_5))I$
14.	$g^1 = u^2,$ $g^2 = u^1\Big(\Big(\dfrac{u^2}{u^1}\Big)^2 + \lambda_8\Big) \pm u^2$	$\partial_0, \partial_1, \ I, \ Q_1 = e^{\pm x_0}(I \pm Q)$
15.	$g^1 = e^{n\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^{p+1},$ $g^2 = e^{n\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p(u^2 + \lambda_4 u^1),$ $p \neq 0, \ n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = nI - pQ,$ $D = n(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2Q$

16.	$g^1 = [\lambda_3 e^{n\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p + \lambda_5]u^1$, $g^2 = e^{n\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p(\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1) + \lambda_5 u^2 - \frac{p}{n}\lambda_5 u^1$, $n \neq 0,\ \lvert\lambda_3\rvert + \lvert\lambda_4\rvert \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = I - \frac{p}{n}Q$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_5 x_0 Q_1 - \frac{2}{n}Q$
17.	$g^1 = (u^1)^{m+1}$, $g^2 = u^1(\ln u^1 + \lambda_8) + u^2(u^1)^m$, $m \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q$, $D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2I - 2x_0 Q$
18.	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2$, $g^2 = (\lambda_6 u^1 + \lambda_5 u^2)\ln u^1 + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1}$, $\lvert\lambda_5\rvert + \lvert\lambda_6\rvert \neq 0,\ \Delta > 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{m_1 x_0}[\lambda_4 I + (m_1 - \lambda_5)Q]$, $Q_2 = e^{m_2 x_0}[\lambda_4 I + (m_2 - \lambda_5)Q]$
19.	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2$, $g^2 = (\lambda_6 u^1 + \lambda_5 u^2)\ln u^1 + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1}$, $\lvert\lambda_3\rvert + \lvert\lambda_5\rvert + \lvert\lambda_6\rvert \neq 0,\ \Delta = 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[\lambda_4 I + (\alpha - \lambda_5)Q]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}Q + x_0 Q_1$
20.	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2$, $g^2 = (\lambda_6 u^1 + \lambda_5 u^2)\ln u^1 + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1}$, $\Delta < 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0}[\lambda_4 \cos\beta x_0 I + ((\alpha - \lambda_5)\cos\beta x_0 - \beta\sin\beta x_0)Q]$, $Q_2 = e^{\alpha x_0}[\lambda_4 \sin\beta x_0 I + ((\alpha - \lambda_5)\sin\beta x_0 + \beta\cos\beta x_0)Q]$
21.	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_3)$, $g^2 = u^1 \ln u^1 + u^2(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7)$, $\lambda_3 \neq \lambda_7 - \lambda_5$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_3)x_0}Q$, $Q_2 = e^{\lambda_5 x_0}[(\lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_7)I + Q]$
22.	$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7 - \lambda_5)$, $g^2 = u^1 \ln u^1 + u^2(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7)$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_5 x_0}Q$, $Q_2 = e^{\lambda_5 x_0}I + x_0 Q_1$
23.	$g^1 = 0$, $g^2 = \ln u^1$	$\partial_0, \partial_1, Q$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}$
24.	$g^1 = (u^1)^{m+1}$, $g^2 = u^2(u^1)^m + \lambda_8 u^1$, $m \neq 0$	∂_0, ∂_1, $D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + 2\lambda_8 x_0 Q - 2I$, $Q, Q_1 = \lambda_8 x_0 Q - u^2\partial_{u^2}$
25.	$g^1 = \lambda_5 u^1$, $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) + (n+1)\lambda_5 u^2$, $n \neq 0$	∂_0, ∂_1, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0 Q_2 - \frac{2}{n}I$, $Q_1 = e^{n\lambda_5 x_0}Q$, $Q_2 = \lambda_5(I + nu^2\partial_{u^2}) + \lambda_8 Q$
26.	$g^1 = 0$, $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8)$, $n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{2}{n}I + 2\lambda_8 x_0 Q$, $Q_1 = I + nu^2\partial_{u^2} - n\lambda_8 x_0 Q$
27.	$g^1 = u^2$, $g^2 = u^1\left(\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 + \lambda_8\right)$	$\partial_0, \partial_1,\ I,\ Q_1 = x_0 I + Q$, $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_8 x_0^2 I + 4\lambda_8 x_0 Q - 2u^2\partial_{u^2}$

28.	$g^1=0$, $g^2=\lambda_4 u^1+\lambda_5$	$\partial_0,\partial_1, D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+2u^2\partial_{u^2}$, $Q, Q_1=u^1\partial_{u^1}+\lambda_4 x_0 Q$
29.	$g^1=u^1\ln u^1$, $g^2=u^2\ln u^1+\lambda_8 u^1$	$\partial_0,\partial_1, Q, Q_1=e^{x_0}I$, $Q_2=u^2\partial_{u^2}-\lambda_8 x_0 Q$
30.	$g^1=\lambda_7 u^1$, $g^2=u^1\ln u^1+\lambda_7 u^2$	$\partial_0,\partial_1, Q, Q_1=I+x_0 Q$, $D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+2\lambda_7 x_0 Q_1-\lambda_7 x_0^2 Q+2u^2\partial_{u^2}$
31.	$g^1=0$, $g^2=u^1\ln u^1$	$\partial_0,\partial_1,\ D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+2u^2\partial_{u^2}$, $Q, Q_1=I+x_0 Q$
32.	$g^1=0$, $g^2=u^2$	$\partial_0,\partial_1, I, Q_1=e^{x_0}Q, Q_2=u^1\partial_{u^1}$, $D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+2x_0 u^2\partial_{u^2}$
33.	$g^1=0$, $g^2=\lambda_8 u^1$	$\partial_0,\partial_1, I, Q, D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1-2u^1\partial_{u^1}$, $Q_3=u^1\partial_{u^1}+\lambda_8 x_0 Q$

У таблиці 4 m, n, λ_i, $i=\overline{1,9}$ — довільні сталі, $\omega=\frac{u^2}{u^1}+k\ln u^1$, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, $I=u^1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2}, Q=u^1\partial_{u^2}$, $\Delta=(\lambda_3+\lambda_5-\lambda_7)^2+4\lambda_4\lambda_6$ — дискримінант, а m_1, m_2 — корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda_5-m & \lambda_4 \\ \lambda_6 & \lambda_7-\lambda_3-m \end{vmatrix}=0,$$

$\alpha=\frac{\lambda_7+\lambda_5-\lambda_3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{|\Delta|}$.

7. Інваріантність відносно алгебри Галілея

В даному підрозділі детально дослідимо симетрійні властивості системи (1.2) у випадку $f(u^1)=\frac{2\lambda_1}{u^1}$.

Отже, розглянемо систему (1.2) вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0=\partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1\right]+\begin{pmatrix} g^1(u^1,u^2) \\ g^2(u^1,u^2) \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Зауваження 7.1. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (7.1) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0&=te^{2\theta_2}+\theta_0, & x_1&=xe^{\theta_2}+\theta_1, \\ u^1&=w^1e^{\theta_3}, & u^2&=w^2e^{\theta_4}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Крім основної групи перетворень еквівалентності (7.2) система (7.1) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності вигляду (5.3). Тому теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (7.1) формулюватимемо з точністю до вказаних перетворень еквівалентності.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 7.1. *Якщо система* (7.1) *допускає розширення ядра симетрії* A_0*, то функції* g^1, g^2 *задаються формулами* (3.2), (3.3), (5.4), *або формулою:*

$$g^1 = u^1[(u^1)^m\varphi^1(\omega) + \lambda_3], \qquad g^2 = u^2[(u^1)^m\varphi^2(\omega) + \lambda_4], \tag{7.3}$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$*,* $m, \lambda_3, \lambda_4, k$ *— довільні сталі,* $\varphi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції.*

Доведення. Як було показано в результаті доведення теореми 2.1, у випадку $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ розв'язком систем $S_1(\xi, \eta) = 0$ та $S_2(\xi, \eta, f) = 0$ є координати інфінітезимального оператора X, задані формулами (2.14).

Враховуючи значення ξ^0, ξ^1, η^a з формул (2.14), систему (2.4) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 g^1_{u^1} + \alpha^{22} u^2 g^1_{u^2} &= (\alpha^1 - 2\dot{A})g^1 + (\alpha^1_0 - \lambda_1\alpha^1_{11})u^1, \\ \alpha^1 u^1 g^2_{u^1} + \alpha^{22} u^2 g^2_{u^2} &= (\alpha^{22} - 2\dot{A})g^2 + (\alpha^{22}_0 - 2\lambda_1\alpha^1_{11})u^2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Так як функції α^1, α^{22}, A залежать лише від змінних x_0, x_1, а функції g^a — від змінних u^1, u^2, то найбільш широкий клас функцій g^1, g^2, що задовольняють системі (7.4), і при цьому можливе розширення ядра симетрії A_0, є розв'язком структурної системи

$$\begin{aligned} æu^1 g^1_{u^1} + ku^2 g^1_{u^2} &= (m + æ)g^1 + k_1 u^1, \\ æu^1 g^2_{u^1} + ku^2 g^2_{u^2} &= (m + k)g^2 + k_2 u^2, \end{aligned} \tag{7.5}$$

причому $\alpha^1 = æ\psi(x_0, x_1)$ $\quad \alpha^{22} = k\psi(x_0, x_1), \quad -2\dot{A} = m\psi(x_0, x_1)$, $\alpha^1_0 - \lambda_1\alpha^1_{11} = k_1\psi(x_0, x_1), \quad \alpha^{22}_0 - 2\lambda_1\alpha^1_{11} = k_2\psi(x_0, x_1)$, де $æ = \{0, 1\}$; k, m, k_1, k_2 — довільні сталі, які ми будемо називати *структурними константами* для функцій g^a, $\psi(x_0, x_1)$ — деяка гладка функція.

1. Якщо $æ = 0$, то система (7.5) набуває вигляду (3.4), розв'язками якої, як було показано в теоремі 3.1, є формули (3.2), (3.3).

2. Якщо $æ = 1$, то загальний розв'язок системи (7.5) виражається через перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du^1}{u^1} = \frac{du^2}{ku^2} = \frac{dg^1}{(m+1)g^1 + k_1u^1} = \frac{dg^2}{(k+m)g^2 + k_2u^2}. \tag{7.6}$$

   Одним з перших інтегралів системи (7.6) є $J_1 = \omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, а два інших J_2, J_3 залежать від значення сталої m.

   Можливі наступні нееквівалентні випадки:

2.1) $m = 0$. В цьому випадку

$$J_2 = \frac{g^1}{u^1} - k_1 \ln u^1, \qquad J_3 = \frac{g^2}{u^2} - k_2 \ln u^1.$$

Стандартним способом (див., наприклад, [10]) побудувавши загальний розв'язок системи (7.5), одержимо формули (5.4), де $\lambda_3 = -k_1$, $\lambda_4 = -k_2$ — довільні сталі, $\varphi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$.

2.2) $m \neq 0$. В цьому випадку, аналогічно, як і в попередньому, знайшовши перші інтеграли системи (7.6):

$$J_2 = (u^1)^{-m}(\frac{g^1}{u^1} + \frac{k_1}{m}), \qquad J_3 = (u^1)^{-m}(\frac{g^2}{u^2} + \frac{k_2}{m}),$$

одержуємо загальний розв'язок системи (7.5), який має вигляд (7.3), де $\lambda_3 = -\frac{k_1}{m}$, $\lambda_4 = -\frac{k_2}{m}$ — довільні сталі, $\varphi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$.

Отже, розв'язавши систему $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$ стосовно g^1, g^2 при $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, ми одержали нееквівалентні зображення (3.2), (3.3), (5.4), (7.3) функцій g^1, g^2, що й доводить теорему. Теорему доведено. □

Умови теореми 7.1, як і теореми 2.1, є лише необхідними умовами розширення ядра симетрії системи (1.2). Щоб отримати достатні умови, необхідно кожне зображення функцій g^a вигляду (3.2), (3.3), (5.4), (7.3) підставити в систему $S_3 = 0$ і розв'язати одержану систему відносно функцій $A(x_0)$, $B(x_0)$, $C(x_0)$, $\alpha(x_0)$ в залежності від вигляду функцій $\varphi^a(\omega)$ та значень сталих $m, k, \lambda_3, \lambda_4$. Результатом таких досліджень є наступне твердження.

Теорема 7.2. *Максимальні алгебри інваріантності системи* (7.1) *залежно від значень функцій* g^1, g^2 *наведені в таблицях* 1, 3, 5.

Таблиця 5. Класифікація симетрійних властивостей системи (7.1)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1.	$g^1 = u^1\varphi^1(u^2)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$	$\partial_0, \partial_1, G = x_0 - \frac{x_1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$, $I_1 = u^1\partial_{u^1}$
2.	$g^1 = \lambda_6 u^1 \ln u^2$, $g^2 = \lambda_8 u^2 \ln u^2$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1$, $Q_1 = e^{\lambda_8 x_0}(\lambda_6 I_1 + \lambda_8 I_2)$
3.	$g^1 = \lambda_6 u^1 \ln u^2$, $g^2 = \lambda_9 u^2$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, \lambda_6 x_0 I_1 + I_2$
4.	$g^1 = u^1[\lambda_6(u^2)^n + \lambda_3]$, $g^2 = \lambda_5(u^2)^{n+1}$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1$, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_3 x_0 I_1 - \frac{2}{n}I_2$

5.	$g^1 = u^1[\lambda_6(u^2)^2 + \lambda_3]$, $g^2 = \lambda_5(u^2)^3$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1$, $D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_3 x_0 I_1 - I_2$, $\Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1$ $-\dfrac{1}{2\lambda_1}\Big(\dfrac{x_1^2}{2} - 2\lambda_1\lambda_3 x_0^3 - \lambda_1 x_0\Big)I_1 - x_0 I_2$
6.	$g^1 = 0$, $g^2 = 0$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, I_2$, $D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \dfrac{1}{2}I_1 - I_2$, $\Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \Big(\dfrac{x_1^2}{2} + \lambda x_0\Big)I_1 - x_0 I_2$
7.	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1)$, $g^2 = u^2\varphi^2(u^2)$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G} = e^{\lambda_3 x_0}\Big(\partial_1 - \dfrac{\lambda_3}{2\lambda_1}x_1 I_1\Big)$, $M = e^{\lambda_3 x_0} I_1$
8.	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2)$ $g^2 = \lambda_8 u^2 \ln u^2$, $\lambda_8 \neq \lambda_3$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, M, Q_2 = e^{\lambda_8 x_0}(\lambda_6 I_1 + (\lambda_8 - \lambda_3)I_2)$
9.	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2)$, $g^2 = \lambda_3 u^2 \ln u^2$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, M, Q_3 = e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_6 x_0 I_1 + I_2)$

У таблиці 5 $\lambda_3, \dots, \lambda_9$ — довільні сталі, $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ — довільні гладкі функції, $I_2 = u^2\partial_{u^2}$.

Зауваження 7.2. Теореми 4.2, 5.2, 6.2 доводяться аналогічно до теореми 3.2. Доведення теореми 7.2. наведене в роботі [8].

Висновки

Нерелятивістський рух будь-яких макро-об'єктів задовольняє перетворенням зсуву, розтягу, закону відносності руху Галілея. Тому, очевидно, досліджені в даній роботі моделі руху, будучи інваріантними відносно алгебри Галілея та алгебр, що задають перетворення зсуву і розтягу, претендують на достовірність описання руху об'єктів моделі Келлера–Сегеля. Крім того, встановлені в даній роботі максимальні алгебри інваріантості систем можуть значно полегшити роботу по встановленню траекторій руху об'єктів, рух яких досліджуеться вище названою моделлю.

Автори вдячні Р. М. Чернізі за постановку задачі та обговорення результатів досліджень.

Література

[1] Р. З. Жданов, В. І. Лагно, *Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом* // Доповіді НАН України. (2000), N 3, 12–16.

[2] Н. Х. Ибрагимов, *Опыт группового анализа.* Москва, Знание, 1991, 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика", N 7).

[3] Г. Р. Иваницкий, А. Б. Медвинский, М. А. Цыганов, *От беспорядка к упорядоченности — на примере движения микроорганизмов* // Успехи физических наук, **161** (1991), N 4, 13–71.

[4] В. И. Лагно, А. М. Самойленко, *Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований* // Дифференц. уравнения. **38** (2002), N 3, 365–372.

[5] В. І. Лагно, С. В. Спічак, В. І. Стогній, *Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу* // Праці Інституту математики НАН України. **45** (2002), 360 с.

[6] Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности* // ДАН СССР, **125** (1959), N 3, 492–295.

[7] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978, 400 с.

[8] О. М. Омелян, *Інваріантність системи рівнянь хемотаксису відносно алгебри Галілея* // Вісник Київського університету, серія Математика та механіка, 2006.

[9] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы.* М.: Наука, 1973, 519 с.

[10] В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений.* М: ГИФМЛ, 1958, 468 с.

[11] В. И. Фущич, *Симметрия в задачах математической физики* // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. Киев: Ин-т математики, (1981), 6–28.

[12] В. І. Фущич , Р. М. Черніга, *Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень* // Доповіді АН України. (1993), N 8, 44–51.

[13] Р. М. Черніга, *О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа* // Симметрийный анализ и решения уравнений матфизики: Сб. науч. тр. Киев: Ин-т математики, (1988), N 8, 49–53.

[14] J. Adler, *Chemotaxis in bacteria* // Sciense, **153** (1996), 708–716.

[15] R. M. Cherniha, *Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions* // J. Nonlin. Math. Phys. **2** (1995), N 3–4, 374–383.

[16] R. M. Cherniha, J. R. King, *Lie symmetries of nonlinear multidimensional reacrion-diffusion systems: I*, J. Phys. A33 (2000), 267–282, 7839–1841.

[17] R. M. Cherniha, M. I. Serov, *Symmetries, Anzätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term* // European J. Appl. Math. **9** (1998), 527–542.

[18] R. M. Cherniha, M. I. Serov, *Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Anzätze and solutions* // J. Math. Anal. Appl. **282** (2003), 305–328.

[19] R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha, *Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations* // J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1363–1379.

[20] V. A. Dorodnitsyn, *On invariant solutions of non-linear heart conduction with a sourse* // USSR Comput. Math. Math. Phys. **22** (1982), 115–122.

[21] W. Fushchych, W. Shtelen and N. Serov, *Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.

[22] E. F. Keller, L. A. Segel, *Model for chemotaxis* // J. Theor. Biol., **30** (1971), 225–234.

[23] A. G. Nikitin, *Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **2** (2005), N 2, 153–204.

[24] A. G. Nikitin, R. J. Wiltshire, *System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties* // J. Math. Phys. **42** (2001), 1666–1688.

[25] P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. New York: Springer, 1986, 497 p.

[26] R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, *Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source* // J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 7405–7418.

Відомості про авторів

Микола Іванович Сєров, Олександр М. Омелян

Полтавський національний
технічний університет
імені Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24
36000, Полтава
Україна
E-Mail: `k26@pntu.edu.ua`