Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 4, 507 – 523

Функциональные модели алгебры Ли системы линейных операторов $\{A_1, A_2, A_3\}$

Виктория А. Кузнецова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Построены функциональные модели неабелевой трехмерной нильпотентной алгебры Ли линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Созданные алгебры $\{A_1, A_2, A_3\}$ удовлетворяют соотношениям $[A_1, A_3] = 0$, $[A_2, A_3] = 0$, $[A_1, A_2] = iA_3$, причем $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3$ не является диссипативным для всех $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, а пространство неэрмитовости $G = \operatorname{span}\{(A_k - A_k^*)h,\ k = 1, 2, 3,\ h \in H\}$ имеет размерность три.

2000 MSC. 47A48.

Ключевые слова и фразы. Функциональные модели, преобразование Л. де Бранжа, Алгебра Ли.

Введение

Функциональные модели сжимающих (диссипативных) операторов, которые впервые были построены Б. С. Надем и Ч. Фояшем [1], представляют собой операторы умножения на независимую переменную в специальных пространствах функций. Построение данных моделей тесно связано с преобразованием Фурье. Для недиссипативных операторов построение аналогичных моделей основано на изучении преобразования Л. де Бранжа [2, с. 152], [4, с. 126].

Основным аналитическим объектом, в терминах которого строятся функциональные модели, является характеристическая функция. Л. Л. Ваксман [3] показал, что если структурные константы алгебр Ли линейных несамосопряженных операторов одинаковы и соответствующие характеристические функции совпадают, то данные алгебры унитарно эквивалентны. Таким образом, модельные представления алгебры Ли с заданными структурными константами, которые строятся по характеристической функции, унитарно изоморфны.

Статья поступила в редакцию 17.10.2008

ISSN 1810 – 3200.

Для алгебры Ли линейных операторов $\{A_1, A_2\}$ $[A_1, A_2] = iA_1$ [7, с. 10] построение функциональных моделей, когда оператор A_1, например, диссипативен, также опирается на преобразование Фурье.

В [8, с. 54–60] были построены функциональные модели для произвольной коммутативной системы линейных операторов $\{A_1, A_2\}$, а в [9, с. 176–185] — для произвольной алгебры Ли линейных операторов $\{A_1, A_2\}$ без предположения о диссипативности операторов A_1, A_2. Данная работа посвящена построению функциональных моделей для алгебры Ли линейных операторов $\{A_1, A_2, A_3\}$, удовлетворяющих соотношениям $[A_1, A_3] = 0,\ [A_2, A_3] = 0,\ [A_1, A_2] = iA_3$ в случае, когда $\dim G = 3$, где $G = \operatorname{span}\{(A_k - A_k^*)h,\ k = 1, 2, 3,\ h \in H\}$ без предположения, что система содержит диссипативные операторы.

1. Предварительные сведения

I. Рассмотрим линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H.

Напомним, что следующая совокупность

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J) \tag{1.1}$$

называется *локальным узлом* [6, с. 11], [4, с. 18], если выполнено соотношение

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi, \tag{1.2}$$

где E — некоторое гильбертово пространство, а φ, J — операторы такие, что $\varphi : H \to E,\ J : E \to E$, причем $J = J^* = J^{-1}$.

Функция

$$S(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* J \tag{1.3}$$

называется *характеристической функцией* [4, с. 24] узла Δ (1.1).

Рассмотрим случай, когда $\dim E = 3$, а J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

причем спектр оператора A вещественен. Тогда известно [4, с. 66], [6, с. 71], что $S(\lambda)$ имеет следующее мультипликативное представление

$$S(\lambda) = S_l(\lambda),\quad S_x(\lambda) = \int_0^{\overset{\curvearrowleft}{x}} \exp\left\{\frac{iJdF_t}{\lambda - \alpha_t}\right\}, \tag{1.5}$$

где α_x — вещественная ограниченная неубывающая на $[0, l]$ функция, $0 < l < \infty$, а F_t — матричнозначная (3×3) неубывающая функция такая, что $trF_x = x$. Предположим, что

$$dF_x = a_x dx, \tag{1.6}$$

где матрица a_x такая, что $a_x \geq 0,\ tra_x = 1$, и

$$a_x = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \tag{1.7}$$

а $a_{ij}(x)$ — функции на $[0, l]$, $i, j = \overline{1, 3}$ на $[0, l]$.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение для матрицы-функции $M_x(z)$:

$$M_x(z) + iz \int\limits_0^x M_t(z)\, dF_t J = I, \tag{1.8}$$

где $x \in [0, l],\ z \in \mathbb{C}$. Нетрудно видеть, что $M_x(z)$ можно представить в виде

$$M_x(z) = JS_x^*(\bar{z}^{-1})J. \tag{1.9}$$

Определим вектор-строку $L_x(z) = \left[L_x^1(z), L_x^2(z), L_x^3(z)\right]$ как решение интегрального уравнения

$$L_x(z) + iz \int\limits_0^x L_t(z)\, dF_t J = (1, 1, 0) = L_x(0), \tag{1.10}$$

где $z \in \mathbb{C}$. Очевидно, что

$$L_x(z) = (1, 1, 0)M_x(z) = (1, 1, 0)JS_x^*(\bar{z}^{-1})J. \tag{1.11}$$

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2_{3,l}(F_t)$ [4, с. 66–67]

$$L^2_{3,\ l}(F_x) = \left\{ f_x \in E^3;\ \int\limits_0^l f_t\, dF_t f_t^* < \infty \right\}, \tag{1.12}$$

считая, что надлежащая факторизация по ядру метрики уже проведена.

Определим ядро

$$K_x(z, w) = \frac{i}{\pi(z - \bar{w})}\ L_x(z)JL_x^*(\bar{w}). \tag{1.13}$$

Очевидно, что

$$K_x(z,w) = \frac{i}{\pi(z-\bar{w})}\left(L_x^1(z)\overline{L_x^1(w)} - L_x^2(z)\overline{L_x^2(w)} - L_x^3(z)\overline{L_x^3(w)}\right). \quad (1.14)$$

Имеет место теорема [4, с. 118–119].

Теорема 1.1. *Вектор-функция* $L_x(z) = \left[L_x^1(z), L_x^2(z), L_x^3(z)\right]$, *являющаяся нетривиальным* $(L_x(z) \neq (1,1,0))$ *решением интегрального уравнения* (1.10), *такова, что:*

1) $L_x(z) \in L^2_{3,a}(F_t)$ *для любого* $a \in [0,l]$ *и* $z \in \mathbb{C}$;

2) *для всех* $z \in \mathbb{C}$ *и* $x \in [0,l]$ *выполнено:*

$$\left|L_x^1(z)\right| - \left|L_x^2(z)\right| - \left|L_3^3(z)\right| = \left\{\begin{array}{ll} \geq 0, & \operatorname{Im} z \; > 0 \\ = 0, & \operatorname{Im} z \; = 0 \\ \leq 0, & \operatorname{Im} z \; < 0 \end{array}\right\}. \quad (1.15)$$

II. Рассмотрим следующий базис $\{e_k\}_1^3$ в E_3,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,1,0); \\ e_2 &= (1,0,1); \\ e_3 &= (5,4,3). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Аналогично (1.10) определим вектор-функции $N_x(z) = \left[N_x^1(z), N_x^2(z), N_x^3(z)\right]$ и $R_x(z) = \left[R_x^1(z), R_x^2(z), R_x^3(z)\right]$ как решения интегральных уравнений

$$N_x(z) + iz\int_0^x N_t(z)\,dF_t J = (1,0,1) = N_x(0), \quad (1.17)$$

$$R_x(z) + iz\int_0^x R_t(z)\,dF_t J = (5,4,3) = R_x(0) \quad (1.18)$$

при $z \in \mathbb{C}$ и $x \in [0,l]$. Для $N_x(z)$ и $R_x(z)$, как и (1.11), имеет место

$$N_x(z) = (1,0,1)M_x(z) = (1,0,1)JS_x^*\left(\bar{z}^{-1}\right)J, \quad (1.19)$$

$$R_x(z) = (5,4,3)M_x(z) = (5,4,3)JS_x^*\left(\bar{z}^{-1}\right)J. \quad (1.20)$$

Для функций $N_x(z)$ и $R_x(z)$ будет также справедлив аналог теоремы 1.1.

Определение 1.1. *Обозначим через* $\mathbf{B}(L(z))$ *линейное пространство целых функций* $F(z)$ *при* $z \in \mathbb{C}$ *и таких, что:*

A)
$$F(z) = \mathbf{B}_L f_t = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^l f_t \, dF_t L_t^*(\bar{z}), \tag{1.21}$$

где $\mathbf{B}_L$ *— преобразование Л. де Бранжа* [4, с. 125] *функции* $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$;

B) *и пусть*
$$\|F(z)\|_{B(L(z))} = \|f_t\|_{L^2_{3,l}(F_t)}. \tag{1.22}$$

Теорема 1.2 ([2, с. 152], [4, с. 126–127]). *Рассмотрим семейство гильбертовых пространств* $\mathbf{B}(L_a(z))$, *где* $L_x(z)$ *— вектор-функция, являющаяся решением интегрального уравнения* (1.10) *на интервале* $[0, l]$ *для некоторой матричнозначной меры* F_t. *Любой функции* $h_t = \big(h^1(t), h^2(t), h^3(t)\big)$ *из* $L^2_{3,l}(F_t)$ *сопоставим функцию* $F(z)$, *которая имеет вид*

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^a h_t \, dF_t L_t^*(\bar{z}), \tag{1.23}$$

где a *— внутренняя точка интервала* $[0, l]$, $0 < a < l$. *Тогда* $F(z) \in \mathbf{B}\left(L_a(z)\right)$.

Определение 1.2. *Преобразование* $F(z)$ (1.21) *функции* $h_t \in L^2_{3,l}(F_t)$ *будем называть преобразованием Л. де Бранжа по мере* F_t *функции* h_t.

Замечание 1.1. Аналогичным образом определяются гильбертовы пространства $\mathbf{B}(N(z))$ и $\mathbf{B}(R(z))$. Преобразование Л. де Бранжа функции $h_t \in L^2_{3,l}(F_t)$ в пространстве $\mathbf{B}(N(z))$ имеет вид

$$\Phi_1(z) = \mathbf{B}_N h_t = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^l h_t \, dF_t N_t^*(\overline{z}), \tag{1.24}$$

а преобразование Л. де Бранжа функции $h_t \in L^2_{3,l}(F_t)$ в пространстве $\mathbf{B}(R(z))$ соответственно

$$\Phi_2(z) = \mathbf{B}_R h_t = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^l h_t \, dF_t R_t^*(\overline{z}), \tag{1.25}$$

где $z \in \mathbb{C}$.

III. Рассмотрим матрицу T_1

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Применим T_1 справа к уравнению (1.10),

$$L_x T_1 + iz \int\limits_0^x L_t(z)\, dF_t J T_1 = L_x(0) T_1.$$

Так как $L_x(0)T_1 = N_x(0)$, то данное соотношение запишется в виде

$$L_x(z)T_1 + iz \int\limits_0^x L_t(z) T_1 T_1^{-1}\, dF_t J T_1 = N_x(0). \tag{1.27}$$

Очевидно, что T_1^{-1} существует и равен

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$JT_1 = \tilde{T}_1 J, \tag{1.28}$$

где

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

поэтому

$$L_x(z)T_1 + iz \int\limits_0^x L_t(z) T_1 T_1^{-1} a_t \tilde{T}_1 J\, dt = N_x(0). \tag{1.30}$$

Предположим, что

$$a_t \tilde{T}_1 = T_1 a_t. \tag{1.31}$$

Тогда из соотношения (1.30) следует, что $L_x(z)T_1$ удовлетворяет уравнению (1.17), а это в силу единственности решения (1.17) означает, что

$$L_x(z)T_1 = N_x(z), \tag{1.32}$$

для любого $x \in [0, l]$, $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим $\Phi_1(z) = \mathbf{B}_N f_t$.

$$\mathbf{B}_N f_t = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t a_t\,dt N_t^*(\overline{z}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t a_t\,dt\tilde{T}_1^* L_1^*(z)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t \tilde{T}_1^* a_t\,dt L_t^*(\bar{z}) = \mathbf{B}_L(f_t\tilde{T}_1^*)$$

в силу (1.31).

Итак,

$$\mathbf{B}_N f_t = \mathbf{B}_L\big(f_t\tilde{T}_1^*\big). \tag{1.33}$$

Обозначим через $\varphi_1(t)$ следующую функцию

$$\varphi_1(t) = f_t\tilde{T}_1^* = \big(f^1(t), f^2(t), f^3(t)\big)\,\tilde{T}_1^*. \tag{1.34}$$

Очевидно, что $\varphi_1(t)$ принадлежит пространству $L^2_{3,l}(F_t)$, если $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$. Таким образом,

$$\Phi_1(z) = \mathbf{B}_N f_t = \mathbf{B}_L\big(f_t\tilde{T}_1^*\big) = \mathbf{B}_L\varphi_1(t). \tag{1.35}$$

Поэтому существует преобразование $\psi_1 : \mathbf{B}(L(z)) \to \mathbf{B}(N(z))$, задаваемое формулой

$$(\psi_1 G)(z) = G_1(z), \tag{1.36}$$

где $G(z) \in \mathbf{B}(L(z))$, а $G_1(z) \in \mathbf{B}(N(z))$, то есть $G(z) = \mathbf{B}_L f_t$, где $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$ и $\psi_1 G(z) = \psi_1\mathbf{B}_L f_t = G_1(z)$, а так как $G_1(z) \in \mathbf{B}(N(z))$, то $G_1(z) = \mathbf{B}_N f_t$, где $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$, $\psi_1\mathbf{B}_L f_t = \mathbf{B}_N f_t$. Таким образом, в силу (1.33)

$$\psi_1\mathbf{B}_L f_t = \mathbf{B}_L\tilde{T}_1^* f_t, \tag{1.37}$$

то есть $\psi_1\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_L\tilde{T}_1^*$ и

$$\psi_1 = \mathbf{B}_L\tilde{T}_1^*\mathbf{B}_L^{-1}. \tag{1.38}$$

Определение 1.3. *Мы будем называть преобразование $\mathbf{B}_L^{-1}$ преобразованием, обратным к преобразованию Л. де Бранжа B_L для функции $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$.*

Рассмотрим $\psi_1^{-1} : \mathbf{B}(N(z)) \to \mathbf{B}(L(z))$ и $\psi_1^{-1} = \mathbf{B}_L\tilde{T}_1^{*-1}B_L^{-1}$, то есть для любой функции $\Phi_1(z) \in \mathbf{B}(N(z))$ имеет место $\big(\psi_1^{-1}\Phi_1\big)(z) = \psi_1^{-1}\mathbf{B}_N f_t = \psi_1^{-1}\mathbf{B}_L\tilde{T}_1^* f_t = \mathbf{B}_L\tilde{T}_1^{*-1}B_L^{-1}\mathbf{B}_L\tilde{T}_1^* f_t = B_L f_t = \hat{F}_1(z)$, где $\hat{F}_1(z) \in \mathbf{B}(L(z))$. Следовательно, существует $\hat{h}_t$ из $L^2_{3,l}(F_t)$ такая, что

$$\hat{F}_1(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l \hat{h}_t dF_t L_t^*(\overline{z}), \tag{1.39}$$

$$\hat{F}_1(z) = \mathbf{B}_L \hat{h}_t. \tag{1.40}$$

IV. Аналогичные рассуждения можно провести для пространства $\mathbf{B}(R(z))$, а именно: существует матрица T_2, имеющая вид

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

применим T_2 справа к уравнению (1.10), получим

$$L_x(z)T_2 + iz\int\limits_0^x L_t(z)T_2T_2^{-1}\,dF_tJT_2 = R_x(0). \tag{1.42}$$

Очевидно, что матрица T_2^{-1} существует. Легко видеть, что

$$JT_2 = \tilde{T}_2 J, \tag{1.43}$$

где

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Поэтому, предполагая, что

$$a_t\tilde{T}_2 = T_2 a_t, \tag{1.45}$$

получим, что $L_x(z)T_2$ удовлетворяет уравнению (1.18), а это в силу единственности решения (1.18) означает, что

$$L_x(z)T_2 = P_x(z), \tag{1.46}$$

для любого $x \in [0, l]$, $z \in \mathbb{C}$.

Точно так же рассмотрим функцию $\varphi_2(t)$, которая имеет вид

$$\varphi_2(t) = f_t\tilde{T}_2. \tag{1.47}$$

Аналогично,

$$\Phi_2(z) = \mathbf{B}_R f_t = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t a_t\,dt R_t^*(\overline{z})$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t a_t\,dt\tilde{T}_2^* L_t^*(\overline{z}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f_t\tilde{T}_2^* a_t\,dt T_1 L_t^*(\overline{z});$$

$$\Phi_2(z) = B_L(f_t \tilde{T}_2^*), \tag{1.48}$$

в силу (1.45).

То есть $\mathbf{B}_R f_t = \mathbf{B}_L f_t \tilde{T}_2$ или $\mathbf{B}_R f_t = \mathbf{B}_L(f_t \tilde{T}_2^*) = \mathbf{B}_L \varphi_2(t)$. Проводя аналогичные рассуждения, мы приходим к тому, что существует отображение $\psi_2 : \mathbf{B}(R(z)) \to \mathbf{B}(L(z))$, задаваемое формулой

$$(\psi_2 G)(z) = G_2(z), \tag{1.49}$$

где $G_2(z) \in \mathbf{B}(R(z)),\ G_2(z) = \mathbf{B}_R f_t$, где $f_t \in L^2_{3,l}(F_t)$, и

$$\Psi_2 \mathbf{B}_L f_t = \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^* f_t, \tag{1.50}$$

то есть $\psi_2 \mathbf{B}_L = \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^*$ и

$$\psi_2 = \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^* \mathbf{B}_L^{-1}. \tag{1.51}$$

Рассмотрим $\psi_2^{-1} : \mathbf{B}(R(z)) \to \mathbf{B}(L(z))$ и $\psi_2^{-1} = \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^{*-1} \mathbf{B}_L^{-1}$, то есть для любой функции $\Phi_2(z) \in \mathbf{B}(R(z))$ имеет место $\left(\psi_2^{-1}\Phi_2\right)(z) = \psi_2^{-1}\mathbf{B}_R f_t = \psi_2^{-1}\mathbf{B}_L \tilde{T}_2^* f_t = \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^{*-1}(t) B_L^{-1} \mathbf{B}_L \tilde{T}_2^* f_t = B_L f_t = \hat{F}_2(z)$, где $\hat{F}_2(z) \in \mathbf{B}(L(z))$. И, следовательно,

$$\hat{F}_2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^l \hat{h}_t \, dF_t L_t^*(\overline{z}), \tag{1.52}$$

$$\hat{F}_1(z) = \mathbf{B}_L \hat{h}_t, \tag{1.53}$$

где $\hat{h}_t \in L^2_{3,l}(F_1)$.

Определение 1.4. *Функцию* $\hat{h}_t = \left(\hat{h}^1(t), \hat{h}^2(t), \hat{h}^3(t)\right) \in L^2_{2,l}(F_t)$, *построенную по этому правилу, назовем двойственной функцией к функции* $h_t = \left(h^1(t), h^2(t), h^3(t)\right) \in L^2_{3,l}(F_t)$.

Замечание 1.2. Имеет место

$$\Phi_1(z) = (\psi_1 \hat{F}_1)(z), \tag{1.54}$$

$$\Phi_2(z) = (\psi_2 \hat{F}_2)(z), \tag{1.55}$$

2. Треугольные модели системы операторов

V. Рассмотрим коммутативную систему линейных ограниченных операторов $\{A_1,\ A_2\}$, действующих в гильбертовом пространстве H, то есть для A_1 и A_2 выполнено соотношение

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0. \tag{2.1}$$

Как известно [6, с. 11–15], совокупность

$$\Delta = (A_1, A_2, H, \varphi, E, \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \widetilde{\gamma}), \tag{2.2}$$

где E — некоторое гильбертово пространство, $\varphi, \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \widetilde{\gamma}$ — операторы такие, что $\varphi : H \to E$, $\sigma_1 : E \to E$, $\sigma_2 : E \to E$, $\gamma : E \to E$, $\widetilde{\gamma} : E \to E$, причем $\sigma_k = \sigma_k^*$, $k = 1, 2$, $\gamma = \gamma^*$, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}^*$, называется *коммутативным узлом*, если выполнены соотношения

$$\begin{array}{ll} 1. & A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma\varphi, \ \ k = 1, 2 \\ 2. & \gamma\varphi = \sigma_1\varphi A_2^* - \sigma_2\varphi A_1^* \ (\widetilde{\gamma}\varphi = \sigma_1\varphi A_2 - \sigma_2\varphi A_1) \\ 3. & \gamma - \widetilde{\gamma} = i(\sigma_1\varphi\varphi^*\sigma_2 - \sigma_2\varphi\varphi^*\sigma_1). \end{array} \tag{2.3}$$

Определение 2.1. *Матрица-функция $S(\lambda_1)$, которая имеет вид*

$$S(\lambda_1) = I - i\varphi\,(A_1 - \lambda_1 I)^{-1}\,\varphi^*\sigma_1, \tag{2.4}$$

называется характеристической функцией узла Δ (2.2), отвечающей оператору A_1. Если $\dim E = 3$, а спектр оператора A_1 вещественен, то для $S(\lambda_1)$ [6, с. 71] имеет место мультипликативное представление (1.5).

Пусть $\sigma_1 = J$, где J (1.4) и $\sigma_2 = \sigma$, тогда для функции $S(\lambda_1)$ (2.4) выполнено условие сплетаемости [5, с. 117]

$$(\sigma\lambda_1 + \gamma)JS(\lambda_1) = S(\lambda_1)(\sigma\lambda_1 + \widetilde{\gamma})J. \tag{2.5}$$

Предположим, что $dF_1 = a_t dt$, где матрица a_t имеет вид (1.7) и такая, что $a_t \geq 0$ и $tra_t = 1$, тогда справедлива теорема [5, с. 18].

Теорема 2.1. *Для того чтобы для матрицы-функции $S_x(\lambda)$ выполнялось условие сплетаемости*

$$(\sigma\lambda + \gamma_x)JS_x(\lambda) = S_x(\lambda)(\sigma\lambda + \widetilde{\gamma})J, \tag{2.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \quad \frac{d}{dx}\gamma_x J = i[Ja_x, \sigma J]\gamma_0 = \widetilde{\gamma}, \tag{2.7}$$

$$2) \quad [Ja_x, (\sigma\alpha_x + \gamma_x)J] = 0. \tag{2.8}$$

VI. Рассмотрим теперь систему линейных ограниченных операторов $\{A_1, A_2, A_3\}$ в H такую, что

$$\begin{aligned} &[A_1, A_3] = 0, \\ &[A_2, A_3] = 0, \\ &[A_1, A_2] = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Треугольная модельная реализация данной алгебры Ли (2.9) в пространстве $L^2_{3,l}(F_t)$ (1.12) имеет вид

$$\begin{gathered}\hat{A}_1 f_x = f_x J(\gamma_{x,1} + \alpha_x \sigma_1) + i \int\limits_x^l f_t a_t \, dt \sigma_1, \\ \hat{A}_2 f_x = f_x J(\gamma_{x,2} + \alpha_x \sigma_2) + i \int\limits_x^l f_t a_t \, dt \sigma_2, \\ \hat{A}_3 f_x = \alpha_x f_x + i \int\limits_x^l f_t a_t \, dt \sigma_3,\end{gathered} \tag{2.10}$$

при этом мы полагаем, что

$$\begin{gathered}\sigma_3 = J, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\gamma_{x,1} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \beta_{13}(x) \\ \bar{\beta}_{12}(x) & \beta_{22}(x) & \beta_{23}(x) \\ \bar{\beta}_{13}(x) & \bar{\beta}_{23}(x) & \beta_{33}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где $b \in \mathbb{R}$, $\beta_{ij}(x)$ — некоторые функции и $\gamma_{0,1} = \gamma_1$, кроме того,

$$\gamma_{x,2} = \begin{pmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & d_{13}(x) \\ d_{12}(x) & d_{22}(x) & d_{23}(x) \\ d_{13}(x) & d_{23}(x) & d_{33}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $d_{ij}(x)$ — функции и $\gamma_{0,2} = \gamma_2$, причем для γ_2 выполнено

$$\gamma_2 - \gamma_2^* = i\sigma_3. \tag{2.14}$$

Для того чтобы для коммутативных операторов $\{A_1, A_3\}$ и $\{A_2, A_3\}$ выполнялись условия теоремы 2.1, а именно, чтобы имели место (2.7) и (2.8) и не нарушалось условие (2.9), необходимо, чтобы матрица a_x имела вид

$$a_x = \begin{pmatrix} 1 - a_2(x) & ia_1(x) & a_2(x) \\ -ia_1(x) & 1 - 2a_2(x) & -ia_1(x) \\ a_2(x) & ia_1(x) & 3a_2(x) - 1 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

а $\gamma_{x,1}$ и $\gamma_{x,2}$ удовлетворяли соотношению

$$\gamma_{x,1} = b\gamma_{x,2} + c, \tag{2.16}$$

где c — постоянная матрица, имеющая вид

$$c = \begin{pmatrix} -\beta - ib/2 & -i/2 & 0 \\ i/2 & \beta + ib/2 & -i/2 \\ 0 & i/2 & \beta + ib/2 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

В этом случае γ_1, γ_2 представляют собой

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \begin{pmatrix} -\beta & b\alpha - i/2 & 0 \\ b\bar{\alpha} + i/2 & \beta & b\alpha - i/2 \\ 0 & b\bar{\alpha} + i/2 & \beta \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} i/2 & \alpha & 0 \\ \bar{\alpha} & -i/2 & \alpha \\ 0 & \bar{\alpha} & -i/2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.18}$$

где $\beta \in \mathbb{R},\ \alpha = ik,\ k \in \mathbb{R}$. Матрица $\gamma_{x,2}$ такова, что

$$\frac{d}{dx}\,\gamma_{x,2} = \begin{pmatrix} 2ia_1(x) & 2(1 - a_2(x)) & 0 \\ -2(1 - a_2(x)) & 4ia_1(x) & 2(3a_2(x) - 1) \\ 0 & -2(3a_2(x) - 1) & -2ia_1(x) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

3. Функциональные модели алгебры Ли операторов $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$

VII. Рассмотрим систему операторов $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ (2.10), действующих в $L^2_{3,l}(F_t)$ (1.12) соответственно, причем $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (2.11), γ_1, γ_2 (2.18) соответственно, $\gamma_{x,1}, \gamma_{x,2}$ удовлетворяют соотношению (2.16), причем для $\gamma_{x,2}$ справедливо (2.19).

Изучим, во что переходит действие каждого из операторов $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ при преобразовании Л. де Бранжа (1.22)

$$\pi \hat{A}_3 F(z) = \int\limits_0^l \left(\int\limits_t^l f_s\, dF_s J \right) dF_t L_t^*(\bar{z}) = \int\limits_0^l f_t\, dF_t\ \frac{L_t^*(\bar{z}) - L_t^*(0)}{z} = \pi\ \frac{F(z) - F(0)}{z}.$$

То есть

$$\widetilde{A}_3 F(z) = \frac{F(z) - F(0)}{z}, \tag{3.1}$$

$\widetilde{A}_3 F(z) \in \mathbf{B}(L_l(z))$.

Вычислим $\pi \hat{A}_1 f_t$, а затем аналогично получим $\pi \hat{A}_2 f_t$

$$\begin{aligned}\pi \hat{A}_1 F(z) &= \int_0^l (A_1 f_t) dF_t L_t^*(\bar{z}) = \int_0^l f_t\, dF_t (A_1^* L_t(z))^* \\ &= \int_0^l f_t\, dF_t \biggl(\alpha_t L_t(z) J\sigma_1 + L_t(z) J\gamma_{t,1} - i \int_0^x L_s(z)\, dF_s \sigma_1\biggr)^*.\end{aligned}$$

В силу интегрального уравнения (1.10) имеем

$$\begin{aligned}\pi \hat{A}_1 F(z) &= \int_0^l f_t\, dF_t \biggl(\frac{L_t(z) - L_t(0)}{z}\ J\sigma_1 + L_t(z) J\gamma_{t,1}\biggr)^* \\ &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t\, dF_t \bigl(L_t(z) J(\sigma_1 + \gamma_{t,1} z) - L_t(0) J\sigma_1\bigr)^*.\end{aligned}$$

Замечание 3.1. Легко видеть, что

$$L_t(z) J(\sigma_1 + \gamma_{t,1} z)|_{z=0} = L_t(0) J\sigma_1. \tag{3.2}$$

Замечание 3.2. Ранее установлено, что для пары операторов $\{A_1, A_3\}$, образующих коммутативную систему операторов, выполнены условия теоремы 2.1, а следовательно, выполнено соответствующее условие сплетаемости, а именно

$$(\sigma_1 \lambda + \gamma_{x,1}) J S_x(\lambda) = S_x(\lambda)(\sigma_1 \lambda + \gamma_1) J, \tag{3.3}$$

и положив $\lambda = \frac{1}{z}$ в данном соотношении, получим

$$(\sigma_1 + \gamma_{x,1} z) J S_x\left(z^{-1}\right) = S_x\left(z^{-1}\right)(\sigma_1 + \gamma_1 z) J.$$

Учитывая представление (1.11) и (1.17), (1.18), получим

$$\begin{aligned}&L_x(z) J(\sigma_1 + \gamma_{x,1} z) \\ &\qquad = (1,1,0) M(z) J(\sigma_1 + \gamma_{x,1} z) \\ &\qquad = (1,1,0) J S_x^*\left(\bar{z}^{-1}\right) J J(\sigma_1 + \gamma_{x,1} z) J \\ &\qquad = (1,1,0) J(\sigma_1 + \gamma_1 z) J S_x^*\left(\bar{z}^{-1}\right) J \\ &\qquad = (1,1,0) J(\sigma_1 + \gamma_1 z) M_x(z).\end{aligned}$$

Данное выражение можно представить в форме

$$(1,1,0)J(\sigma_1+\gamma_1 z)M_x(z)=\sum_{j=1}^{3}\zeta_j(z)e_jM_x(z), \tag{3.4}$$

где e_j $(j=1,2,3)$ имеют вид (1.16), а $\zeta_j(z)$, $(j=1,2,3)$ — некоторые функции от z, $z\in\mathbb{C}$. Учитывая соотношение (1.11) и (1.19), (1.20), получим

$$\sum_{j=1}^{3}\zeta_j(z)e_jM_x(z)=\zeta_1(z)L_x(z)+\zeta_2(z)N_x(z)+\zeta_3(z)R_x(z),$$

то есть

$$L_x(z)J(\sigma_1+\gamma_{x,1}z)=\zeta_1(z)L_x(z)+\zeta_2(z)N_x(z)+\zeta_3(z)R_x(z). \tag{3.5}$$

В случае, когда σ_1 и γ_1 заданы формулами (2.11) и (2.18), то $\zeta_j(z)$, $(j=1,2,3)$ имеют вид

$$\zeta_1(z)=pz-b;\quad \zeta_2(z)=pz+b;\quad \zeta_3(z)=-idz-b; \tag{3.6}$$

где $p=-\beta+id$, $d=(2bk-1)/2$, $k:\alpha=ik$, $k\in\mathbb{R}$. При этом $\zeta_j(z)$, $(j=1,2,3)$ в точке $z=0$ равны

$$\zeta_1(0)=-b;\quad \zeta_2(0)=b;\quad \zeta_3(0)=-b. \tag{3.7}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\pi\hat{A}_1F(z)=\frac{1}{z}\int_0^l f_t dF_t(\zeta_1(z)L_t(z)-\zeta_1(0)L_t(0)+\zeta_2(z)N(z)\\ -\zeta_2(0)N(0)+\zeta_3(z)R(z)-\zeta_3(0)R(0))^*\\ =\frac{1}{z}\big\{\bar{\zeta}_1(z)F(z)-\bar{\zeta}_1(0)F(0)+\bar{\zeta}_2(z)\Phi_1(z)\\ -\bar{\zeta}_2(0)\Phi_1(0)+\bar{\zeta}_3(z)\Phi_2(z)-\bar{\zeta}_3(0)\Phi_2(0)\big\}.\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (1.54) (1.55), получим

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1F(z)=b\,\frac{F(0)-F(z)}{z}+\bar{p}F(z)\\ +b\,\frac{\big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(z)-\big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(0)}{z}+\bar{p}\,\big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(z)\\ +b\,\frac{\big(\Psi_2\hat{F}_2\big)(0)-\big(\Psi_2\hat{F}_2\big)(z)}{z}+id\big(\Psi_2\hat{F}_2\big)(z).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогичные рассуждения осуществим и для оператора $\hat{A}_2$, а именно

$$\pi\hat{A}_2F(z) = \int_0^l (A_2 f_t)\, dF_t L_t^*(\bar{z}) = \int_0^l f_t\, dF_t (A_1^* L_t(z))^*$$

$$= \int_0^l f_t\, dF_t \left(\alpha_t L_t(z) J\sigma_2 + L_t(z) J\gamma_{t,2} - i\int_0^x L_s(z)\, dF_s \sigma_2\right).$$

Для данного случая также справедливы соответствующие аналоги замечаний 3.1 и 3.3.

Рассмотрим $L_t(z)J(\sigma_2 + \gamma_{t,2}z)$:

$$L_x(z)J(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z) = (1,1,0)M_x(z)J(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z)$$
$$= (1,1,0)JS_x^*(\bar{z}^{-1})JJ(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z)^*J$$
$$= (1,1,0)J(\sigma_2 + \gamma_2\bar{z} - i\sigma_3\bar{z})JS_x^*(\bar{z}^{-1})J.$$

Замечание 3.3. $(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z)^* = (\sigma_2 + \gamma_{x,2}^*\bar{z})$ и, следовательно, в соотношениях γ_2^*, а так как γ_2 и γ_2^* удовлетворяют соотношению (2.14), то

$$(\sigma_2 + \gamma_2^*\bar{z}) = (\sigma_2 + \gamma_2\bar{z} - i\sigma_3\bar{z}). \tag{3.9}$$

Так как σ_3 (2.11), то $(\sigma_2 + \gamma_2^* z) = (\sigma_2 + \gamma_2\bar{z}) - iJ\bar{z}$,

$$L_x(z)J(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z) = (1,1,0)J(\sigma_2 + \gamma_2 z - iJz)M_x(z). \tag{3.10}$$

Как и ранее, имеем

$$L_x(z)J(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z) = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(z) e_j M_x(z), \tag{3.11}$$

где $e_j,\ (j = 1,2,3)$ имеют вид (1.16), а $\eta_j(z),\ (j = 1,2,3)$ — некоторые функции от $z,\ z \in C$

$$L_x(z)J(\sigma_2 + \gamma_{x,2}z) = \eta_1(z)L_x(z) + \eta_2(z)N_x(z) + \eta_3(z)R_x(z). \tag{3.12}$$

В случае, когда σ_2, σ_3, γ_2, $\eta_j(z),\ (j = 1,2,3)$ имеют вид

$$\eta_1(z) = -1 - iz\,(k + 1/2)\,; \quad \eta_2(z) = 1 + iz\,(k - 1/2)\,; \quad \eta_3(z) = -1 - ikz, \tag{3.13}$$

где $k : \alpha = ik,\ k \in \mathbb{R}$. Заметим, что при $z = 0$

$$\eta_1 = -1; \quad \eta_2 = 1; \quad \eta_3 = -1. \tag{3.14}$$

Таким образом, аналогично вышесказанному для оператора $\hat{A}_1$, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_2F(z) = \frac{F(0)-F(z)}{z} + \frac{i}{2}\,(1+2k)F(z) \\ + \frac{\big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(z) - \big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(0)}{z} + \frac{i}{2}\,(1-2k)\big(\Psi_1\hat{F}_1\big)(z) \\ + \frac{\big(\Psi_2\hat{F}_2\big)(0) - (\Psi_2\hat{F}_2)(z)}{z} + ik\,\big(\Psi_2\hat{F}_2\big)(z). \quad (3.15)\end{aligned}$$

Итак, мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть* $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ *— система модельных операторов* (2.10)*, действующих в пространстве* $L^2_{3,l}(F_t)$ (1.12) ($dF_t = a_t dt$*, для* a_t *имеют место* (1.31), (1.45))*, которые удовлетворяют коммутативным соотношениям* (2.9)*, причем* $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *имеют вид* (2.11)*, а* γ_1, γ_2 *— соответственно* (2.18)*, причем* $\gamma_{x,1}\gamma_{x,2}$ (2.12), (2.13) *удовлетворяют соотношению* (2.16)*, а для* $\gamma_{x,2}$ *справедливо* (2.19)*.*

Если $F(z) \in \mathbf{B}(L(z))$ *является преобразованием Л. де Бранжа* (1.23) *функции* h_t *из* $L^2_{3,l}(F_t)$*, а* $\hat{F}_1(z)$ *и* $\hat{F}_2(z)$ *являются преобразованиями Л. де Бранжа* (1.36) *и* (1.49) *соответственно для двойственной функции* $\hat{h}_t$ (*в смысле определения* 1.4)*, то тогда преобразование Л. де Бранжа* (1.23) *устанавливает унитарную эквивалентность между треугольными моделями* $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ (2.10) *и функциональными моделями* $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \hat{A}_3\}$ (3.8), (3.15), (3.1).

Литература

[1] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ в гильбертовом пространстве*, М.: Мир, 1970, 431 с.

[2] L. De Branges, *Hilbert spaces of entire function*, London, 1968, 326 с.

[3] Л. Л. Ваксман, *О характеристических оператор-функциях алгебр Ли* // Вестник Харьк. ун-та, Сер. Мат. и мех., (1972), N 33, вып. 37, 41–45.

[4] В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, Харьков: ХНУ, 2003, 342 с.

[5] В. А. Золотарев, *Схема рассеяния Лакса–Филлипса на группах и функциональной модели алгебры Ли* // Мат. сб. **183** (1992), N 5, 115–144.

[6] М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах*, Харьков, 1971, 160 с.

[7] П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, М., 1969, 375 с.

[8] В. А. Набока, *Функциональные модели коммутативной системы линейных операторов* // Математика, прикладная математика и механика, (2003), N 602, 46–60.

[9] В. А. Набока, *О функциональных моделях алгебры Ли несамосопряженных операторов* // Математика, прикладная математика и механика. (2004), N 645, 172–186.

Сведения об авторах

Виктория Александровна Кузнецова

Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4
61077, Харьков,
Украина
E-Mail: `victoriya979@mail.ru`