УДК 539.3

Г. Я. Попов, д-р физ.-мат. наук
А. А. Фесенко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
(E-mail: fesenco@breezein.net)

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Строится точное решение смешанной задачи теории упругости для пространственного слоя с учетом наличия внутри слоя произвольно ориентированной сосредоточенной силы, когда на одной грани заданы напряжения, а другая закреплена. В отличие от традиционных подходов к такой задаче, основанных на использовании методов Папковича–Нейбера и Трефтца, сводящих уравнения Ламе к последовательности гармонических с неразделенными граничными условиями, что существенно усложняет технику построения решения. Здесь используется новый подход, основанный на приведении уравнений Ламе к одному независимо решаемому и двум совместно решаемым уравнениям. При этом граничные условия тоже разделяются. Методом интегральных преобразований указанные два уравнения приводятся к одномерной векторной краевой задаче.

Будується точний розв'язок змішаної задачі теорії пружності для просторового шару з урахуванням наявності усередині шару довільно орієнтовної зосереджено сили, коли на одній грані задаються напруження, а інша закріплена. На відміну від традиційних підходів до розв'язання такої задачі, які базуються на використанні методів Папковича–Нейбера і Трефтца, що зводять рівняння Ламе до послідовності гармонійних з нерозділеними граничними умовами, що суттєво ускладнює техніку побудови розв'язку. Тут використовується новий метод, який базується на зведенні рівнянь Ламе до одного, що незалежно розв'язується, і двох сумісно розв'язуваних. При цьому граничні умови також розділяються. Методом інтегральних перетворень вказані два рівняння зводяться до одновимірної векторної крайової задачі.

1. Введение

Решение задачи о напряженном состоянии в упругом полупространстве, создаваемом сосредоточенной в его точке силой, получено в работе [1]. Поповым Г. Я. в работе [2], при помощи метода [3] строится точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства. В данной работе приводится обобщение указанного подхода к задаче для слоя с учетом наличия внутри него произвольно ориентированной сосредоточенной силы. В отличие от четверти пространства, в задаче для слоя необходимо учитывать не только убывающее решение, но и растущее, а наличие объемных сил приводит к неоднородности приведенной системы уравнений Ламе, что в общем существенно усложняет расчет.

2. Постановка задачи

Для пространственного слоя $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < h$ ставится такая задача: на грани $z = 0$ задаются напряжения

$$\sigma_z|_{z=0} = -p(x,y), \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=0} = 0; \tag{1}$$

на грани $z = h$ – смещения

$$u_z|_{z=h} = 0, \quad u_x|_{z=h} = 0, \quad u_y|_{z=h} = 0. \tag{2}$$

Кроме того, в точке слоя ($x = a$, $y = 0$, $z = c$) приложена произвольно ориентированная сосредоточенная сила $P = (P_1, 0, P_3)$, которую можно трактовать как задание в уравнениях Ламе интенсивностей объемных сил

$$q_x = P_1\delta(x-a)\delta(y)\delta(z-c), \quad q_y = 0, \quad q_z = P_3\delta(x-a)\delta(y)\delta(z-c),$$

Требуется определить поле смещений в упругой среде.

3. Метод решения

Согласно [2], [3] введем обозначения

$$u_x,\ u_y,\ u_z = u,\ v,\ w,$$

и для функции $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f^{\bullet}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f^{,}.$$

Введем две новые функции

$$Z = u' + v^{\bullet}, \quad Z^{*} = v' - u^{\bullet}.$$

Система уравнений Ламе после введения обозначений примет вид

$$\begin{gathered}\Delta u + \mu_0 (Z + w^{,})' = -q_x \cdot G^{-1} \\ \Delta v + \mu_0 (Z + w^{,})^{\bullet} = 0, \\ \Delta w + \mu_0 (Z + w^{,})^{,} = -q_z \cdot G^{-1},\end{gathered} \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа, G – модуль сдвига, $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$.

Уравнения (3) расщепляются на следующие совместно решаемые

$$\Delta w + \mu_0 (Z + w^{,})^{,} = -q_z \cdot G^{-1}, \quad \Delta Z + \mu_0 \Box_{xy} (Z + w^{,}) = -q_x' \cdot G^{-1}, \tag{4}$$

где $\Box_{xy} f(x, y, z) = f'' + f^{\bullet\bullet}$.

Независимо решаемое уравнение

$$\Delta Z^{*} = q_x^{\bullet} / G. \tag{5}$$

Если функции w и Z будут найдены из системы (4), а Z^{*} из уравнения (5), то для отыскания смещений u и v следует решить уравнения Пуассона

$$\Box_{xy} u = Z' - Z^{*\bullet}, \quad \Box_{xy} v = Z^{\bullet} - Z^{*\prime} \tag{6}$$

Граничные условия (1) запишем в виде [2]

$$2G\mu_0 [\mu Z + (1 - \mu) w^{,}]_{z=0} = -p(x, y) \tag{7}$$

$$G[\Box_{xy} w + Z^{,}]_{z=0} = 0, \quad Z^{*,}|_{z=0} = 0,$$

а граничные условия (2), используя введенные функции, примут вид

$$w|_{z=h} = 0, \quad Z|_{z=h} = 0, \quad Z^{*}|_{z=h} = 0. \tag{8}$$

4. Сведение поставленной задачи к векторной одномерной краевой задаче

Перейдем в приведенных соотношениях от искомых и заданных функций к трансформантам Фурье по переменным y и x

$$w_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y,z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx, \quad Z_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x,y,z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx. \tag{9}$$

Аналогично определяются трансформанты $u_{\beta\alpha}(z)$, $v_{\beta\alpha}(z)$, $Z^{*}_{\beta\alpha}(z)$, $p_{\beta\alpha}$, $q_x^{\beta\alpha}(z)$, $q_x^{\beta\alpha}(z)$.

На языке введенных трансформант уравнения (4) запишутся в виде одномерной системы

$$w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1} N^2 w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1} \mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) = -(2G\mu_0)^{-1} \cdot q_z^{\beta\alpha}(z), \quad 0 < z < h \tag{10}$$

$$Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2 [\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z)] = i\alpha G^{-1} \cdot q_x^{\beta\alpha}(z), \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0,$$

а граничные условия для этой системы (7), (8) примут вид

$$\begin{gathered} -N^2 w_{\beta\alpha}(0) + Z'_{\beta\alpha}(0) = 0, \\ 2G[\mu Z_{\beta\alpha}(0) + (1 - \mu) w'_{\beta\alpha}(0)] = -(1 - 2\mu) p_{\beta\alpha}, \\ w_{\beta\alpha}(h) = 0, \quad Z_{\beta\alpha}(h) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Если будет решена краевая задача (10), (11), то трансформанты смещений $u_{\beta\alpha}(z)$ и $v_{\beta\alpha}(z)$ найдем из уравнений (6), применив к ним преобразование Фурье (9). В результате получим

$$u_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\alpha Z_{\beta\alpha}(z) - \beta Z^*_{\beta\alpha}(z)), \quad v_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\beta Z_{\beta\alpha}(z) + \alpha Z^*_{\beta\alpha}(z)). \tag{12}$$

5. Решение векторной задачи (10), (11)

Для решения краевой задачи введем искомый вектор $\boldsymbol{y}(z)$ и матрицы

$$\boldsymbol{y}(z)=\begin{pmatrix} w_{\beta\alpha} \\ Z_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2 & 0 \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}$$

тогда систему (10) можно записать в векторном виде

$$L_2 y(z) \equiv I\cdot y''(z) + \mu_0 Q y'(z) - N^2 P y(z) = f(z), \quad 0 < z < h. \tag{13}$$

Найдем убывающее $Y_-(z)$ и растущее $Y_+(z)$ ($z\to\infty$) решение уравнения

$$L_2 Y(z) = 0 \tag{14}$$

в виде (постоянный множитель отбрасываем)

$$Y_{\mp}(z) = e^{\mp Nz}\begin{pmatrix} \mp\text{ŕ}_0(\text{К}\pm Nz + \text{ŕ}\,\text{И}) & \pm\text{ŕ}_1 z\ \ \text{К} \\ \mp\text{ŕ}_0 N^2 z & \text{К}_1(\text{К}Nz \mp \text{ŕ}\,\text{И}) \end{pmatrix}, \quad \kappa = 3 - 4\mu, \quad \mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1}.$$

Так как задача поставлена для слоя, при построении решения учитываются оба решения уравнения (14) $Y_-(z)$, $Y_+(z)$, в отличие от [2], где для четверти пространства растущее решение отбрасывалось.

Решение задачи (10), (11) будем искать в виде

$$y(z) = \int_0^h \Phi(z,\xi) f_{\beta\alpha}(\xi)d\xi + Y_-(z)C_0 + Y_+(z)C_1,$$

где $f_{\beta\alpha}(\xi) = G^{-1}\delta(\xi - c)e^{i\alpha a}\begin{pmatrix} -P_3 \\ i\text{ŕ}P_1 \end{pmatrix}$, $\quad C_0 = (C_0^{\,0}, C_0^{\,1})^T, \quad C_1 = (C_1^{\,0}, C_1^{\,1})^T.$

Фундаментальную матрицу уравнения (13) $\Phi(z, \xi)$ будем искать с помощью интегрального преобразования Фурье [4].

$$y_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} y(z)e^{i\sigma z}dz. \tag{15}$$

Применив преобразование (15) к уравнению (13):

$$-\sigma^2 I\cdot y_\sigma - \mu_0 Q i\sigma y_\sigma - N^2 P y_\sigma = f_\sigma$$

с учетом того, что $-\sigma^2 = (-i\sigma)^2$, получим $((-i\sigma)^2 I + \mu_0 Q(-i\sigma) - N^2 P)y_\sigma = f_\sigma$ или

$$y_\sigma = M^{-1}(-i\sigma)\, f_\sigma \tag{16}$$

применим к (16) обратное преобразование Фурье с подстановкой (15)

$$y(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y_\sigma\, e^{-i\sigma z}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M^{-1}(-i\sigma) f_\sigma e^{-i\sigma(z-\xi)}d\sigma d\xi.$$

Тогда по определению фундаментальной матрицы получим

$$\Phi(z - \xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M^{-1}(-i\sigma)e^{-i\sigma(z-\xi)}d\sigma.$$

Если сделать замену переменных $s = -i\sigma$, получим формулу в общем виде

$$\Phi(z-\xi)=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\pm}\frac{\overline{M}^T}{(s^2 - N^2)^2}e^{s(z-\xi)}ds, \quad \begin{matrix} z - \text{ŕ} > 0 \\ z - \text{ŕ} < 0 \end{matrix}$$

Где $C_\pm$ – замкнутый контур, охватывающий полюса $s = \pm|N|$ или $\sigma = \mp iN$. Найдем вычеты в точках $\sigma = iN$ и $\sigma = -iN$ соответственно

$$\varphi_+ = e^{Ny}(4N^3)^{-1}(1 - Ny), \quad \varphi_- = e^{-Ny}(4N^3)^{-1}(1 + Ny), \quad y = z - \xi$$

Построим матрицы Φ_+, Φ_- по формулам [2]

$$\Phi_\pm = I\varphi_\pm'' - \mu_0 Q\varphi_\pm' - N^2P^{-1}\varphi_\pm$$

после вычислений получим

$$\Phi_\pm = \mu_0(4N)^{-1}e^{\pm Ny}\begin{pmatrix} -\acute{\text{г}} \pm Ny & \text{И}_*^{-1}y\,\text{К} \\ -yN^2 & \acute{\text{г}}_*^{-1}(\text{К}\mp Ny - \acute{\text{г}}\,\text{И}) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} z-\acute{\text{г}} > 0 \\ z-\acute{\text{г}} < 0 \end{matrix}$$

В результате фундаментальная матрица уравнения (13) примет вид

$$\Phi(z-\xi) = \mu_0(4N)^{-1}e^{-N|z-\xi|}\begin{pmatrix} -\acute{\text{г}} - N\left|z-\text{И}\right| & \text{М}_*^{-1}(\text{К}z - \acute{\text{г}}\,\text{М}) \\ -(z-\acute{\text{г}}\,\text{М})N^2 & \acute{\text{г}}_*^{-1}(\text{К}N\left|z-\acute{\text{г}}\right| - \text{М}\,\text{И}) \end{pmatrix}.$$

Вектора $C_0 = (C_0{}^0, C_0{}^1)^T$, и $C_1 = (C_1{}^0, C_1{}^1)^T$ найдем, удовлетворив граничные условия (11) задачи.

В результате получена система алгебраических уравнений:

$$\mu_1^{-1}NC_0{}^0 + (\mu_*\mu_0)^{-1}C_0{}^1 + \mu_1^{-1}NC_1{}^0 - (\mu_*\mu_0)^{-1}C_1{}^1 = -(\mu_0G)^{-1}p_{\beta\alpha} -$$
$$-(4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}(N^2P_3c + \mu_1^{-1}NP_3 - \mu_*^{-1}i\alpha NP_1c + (\mu_*\mu_0)^{-1}i\alpha P_1),$$
$$NC_0{}^0 + C_0{}^1 - NC_1{}^0 + C_1{}^1 = (4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}(\mu_0N^2P_3c + NP_3 - \mu_1 i\alpha NP_1c + i\alpha P_1),$$
$$-e^{-Nh}\mu_0(Nh+\kappa)C_0{}^0 + e^{-Nh}h\mu_1C_0{}^1 + e^{Nh}\mu_0(-Nh+\kappa)C_1{}^0 - e^{Nh}h\mu_1C_1{}^1 =$$
$$= -(4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-N(h-c)}(\mu_0NP_3(h-c) + \mu_0P_3\kappa + \mu_1(h-c)i\alpha P_1),$$
$$-e^{-Nh}\mu_0N^2hC_0{}^0 + e^{-Nh}\mu_1(Nh-\kappa)C_0{}^1 + e^{Nh}\mu_0N^2hC_1{}^0 + e^{Nh}\mu_1(Nh+\kappa)C_1{}^1 =$$
$$= -(4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-N(h-c)}(\mu_0N^2P_3(h-c) + \mu_1N(h-c)i\alpha P_1 - \mu_1 i\kappa P_1),$$

решение которой имеет вид

$$C_0{}^0 = -(\mu_0\mu_1GND_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}(e^{4Nh} + e^{2Nh}T_N^-) -$$
$$-(4\mu_0GN^2D_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[e^{2Nc}ND_N^- + e^{2Nh}\{2(Nh)^2\kappa^{-1}A_N^- - NC_N^-(2Nh\kappa^{-1}-1)\} +$$
$$+ e^{2Nh}e^{2Nc}\{-2(Nh)^2A_N^+ + 2Nh\kappa^{-1}(Nc\kappa A_N^+ + P_N^-) + Nc\kappa^{-1}A_N^+ - P_N^+\} + e^{4Nh}(Nc\kappa A_N^- + P_N^+)],$$
$$C_0{}^1 = (\mu_0\mu_1GD_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}(e^{4Nh} - e^{2Nh}L_N^+) +$$
$$+ (4\mu_1GND_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[-e^{2Nc}F_N^+ + e^{2Nh}\{-2(Nh)^2\kappa^{-1}A_N^- + F_N^-(2Nh\kappa^{-1}+1)\} +$$
$$+ e^{2Nh}e^{2Nc}\{-2(Nh)^2A_N^+ + 2Nh\kappa^{-1}(Nc\kappa A_N^+ + K_N^-) + Nc\kappa^{-1}A_N^+ - K_N^+\} + e^{4Nh}(Nc\kappa A_N^- + K_N^+)],$$
$$C_1{}^0 = -(\mu_0\mu_1GND_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}(e^{2Nh}T_N^+ + 1) - (4\mu_0GN^2D_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[NC_N^- - e^{2Nc}(Nc\kappa A_N^+ + P_N^-) +$$
$$+ e^{2Nh}\{2(Nh)^2\kappa^{-1}(\kappa A_N^+ + Nc(2\mu_0P_3N - \mu_1 i\alpha P_1)) + (2Nh\kappa^{-1}+1)(Nc\kappa A_N^- + P_N^+)\} -$$
$$-e^{2Nh}e^{2Nc}\{2(Nh)^2A_N^+ - (2Nh\kappa^{-1}+1)ND_N^-\}],$$
$$C_1{}^1 = (\mu_0\mu_1GD_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}(e^{2Nh}L_N^- - 1) + (4\mu_1GND_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[F_N^- + e^{2Nc}(Nc\kappa A_N^+ + K_N^-) +$$
$$+ e^{2Nh}\{2(Nh)^2\kappa^{-1}(\kappa A_N^+ + Nc(2\mu_0P_3N - \mu_1 i\alpha P_1)) + (-2Nh\kappa^{-1}+1)(Nc\kappa A_N^- + K_N^+)\} +$$
$$+ e^{2Nh}e^{2Nc}\{2(Nh)^2A_N^+ + (-2Nh\kappa^{-1}+1)F_N^+\}],$$

где $D_{\beta\alpha} = \kappa(e^{4Nh}+1) + e^{2Nh}(4(Nh)^2 + \kappa^2 + 1)$, $T_N^\pm = 2\mu_1\kappa^{-1}(Nh)^2 \pm 2\kappa^{-1}Nh + 1$, $L_N^\pm = 2\mu_0\kappa^{-1}(Nh)^2 \pm 2\kappa^{-1}Nh + 1$, $A_N^\pm = NP_3\mu_0 \pm i\alpha P_1\mu_1$, $F_N^\pm = NcA_N^\pm + i\alpha P_1\mu_1\kappa$, $D_N^\pm = cA_N^+ \pm \kappa P_1\mu_0$, $C_N^- = cA_N^- + \kappa P_1\mu_0$, $K_N^\pm = ½\mu_1(1+\kappa^2)i\alpha P_1 \pm 2\mu_1^{-1}NP_3$, $P_N^\pm = 2\mu_0^{-1}i\alpha P_1 \pm ½\mu_0(1+\kappa^2)NP_3$.

Введем дополнительно обозначения

$$B_N^\pm = 2NcA_N^\mu \pm \kappa A_N^\pm, \quad S_N^\pm = \kappa B_N^\mu \pm A_N^\pm, \quad S'^\pm_N = \kappa B_N^\pm \pm A_N^\mu, \quad M_{\beta\alpha}^\pm = e^{Nz}B_N^\pm - e^{-Nz}A_N^\mu,$$
$$R_{\beta\alpha}^\pm = e^{Nz}A_N^\pm + e^{-Nz}B_N^\mu, \quad V_{\beta\alpha}^\pm = ½e^{Nz}S_N^- \pm e^{-Nz}F_N^-, \quad W_{\beta\alpha}^\pm = ½e^{Nz}S_N^+ \pm e^{-Nz}F_N^+,$$
$$w_{\beta\alpha}{}^0(z) = (GD_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}[4Nh(z-h)e^{2Nh}\mathrm{sh}Nz + 2(z - 2\mu_1^{-1}h)e^{2Nh}\mathrm{ch}Nz -$$
$$-2(\mu_1N)^{-1}\kappa e^{2Nh}\mathrm{sh}Nz + \kappa ze^{Nz} - (\mu_1N)^{-1}\kappa e^{Nz} + \kappa ze^{N(4h-z)} + (\mu_1N)^{-1}\kappa e^{N(4h-z)}],$$
$$Z_{\beta\alpha}{}^0(z) = (GD_{\beta\alpha})^{-1}p_{\beta\alpha}[4N^2h(h-z)e^{2Nh}\mathrm{ch}Nz - 2N(z + 2\mu_0^{-1}h)e^{2Nh}\mathrm{sh}Nz +$$
$$+ 2\mu_0^{-1}\kappa e^{2Nh}\mathrm{ch}Nz - \kappa zNe^{Nz} - \mu_0^{-1}\kappa e^{Nz} + \kappa zNe^{N(4h-z)} - \mu_0^{-1}\kappa e^{N(4h-z)}],$$

$$E_{\beta\alpha}(z) = Z_{\beta\alpha}{}^0(z) + (4NGD_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[Nz(e^{N(4h-z)}(2NcA_N^- + \kappa^2 A_N^+) + 2Nhe^{2Nh}M_{\beta\alpha}{}^+ + e^{2Nh}R_{\beta\alpha}{}^- -$$
$$-\kappa e^{2Nc}M_{\beta\alpha}{}^- - 4(Nh)^2 A_N^+ e^{N(2h+2c-z)} - 2Nhe^{N(2h+2c)}R_{\beta\alpha}{}^+ - e^{N(2h+2c)}\{e^{Nz}(2NcA_N^+ + \kappa A_N^-) +$$
$$+ \kappa^2 e^{-Nz}A_N^+\}) + \kappa e^{Nz}F_N^- - \tfrac{1}{2}\kappa e^{N(4h-z)}S_N^- + 2(Nh)^2 e^{2Nh}M_{\beta\alpha}{}^+ + 2Nhe^{2N(h+c)}W_{\beta\alpha}{}^- - 2Nhe^{2Nh}V_{\beta\alpha}{}^+ +$$
$$+ \kappa e^{2Nh}V_{\beta\alpha}{}^- + \kappa e^{2Nc}W_{\beta\alpha}{}^+ + 4(Nh)^2 e^{2N(h+c)}A_N^+ \mathrm{ch}Nz + \tfrac{1}{2}\kappa e^{2N(h+c)}\{e^{Nz}S_N^- + e^{-Nz}(\kappa^{-1}B_N^- + \tfrac{1}{2}\kappa^2 A_N^+)\}].$$

Получим решение задачи

$$w_{\beta\alpha}(z) = w_{\beta\alpha}{}^0(z) + (4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-N|z-c|}(\mu_0 P_3\kappa + |z-c|A_N^{\pm}) +$$
$$+(4NGD_{\beta\alpha})^{-1}e^{i\alpha a}e^{-Nc}[\kappa ze^{N(4h-z)}B_N^+ + \kappa ze^{Nz}A_N^- + 2Nhze^{2Nh}M_{\beta\alpha}{}^+ + ze^{2Nh}R_{\beta\alpha}{}^- -$$
$$-\kappa ze^{2Nc}\{e^{Nz}B_N^- + e^{-Nz}A_N^+\} - 4z(Nh)^2 A_N^+ e^{N(2h+2c-z)} + 2zNhR_{\beta\alpha}{}^+ e^{2N(h+c)} - ze^{2N(h+c)}\{e^{Nz}B_N^- + \kappa^2 e^{-Nz}A_N^+\} -$$
$$- \kappa e^{Nz}C_N^- - 2Nh^2 e^{2Nh}M_{\beta\alpha}{}^+ - 2he^{2Nh}\{\tfrac{1}{2}e^{Nz}S'_N{}^+ + e^{-Nz}ND_N^+\} + \kappa e^{N(2h-z)}C_N^- +$$
$$+\kappa e^{N(2c-z)}D_N^+ - 4Nh^2\mathrm{ch}Nze^{2N(h+c)}A_N^+ + 2he^{2N(h+c)}\{Ne^{Nz}D_N^- + \tfrac{1}{2}e^{-Nz}S'_N{}^-\} + \kappa e^{N(2h+2c+z)}D_N^- +$$
$$+ \kappa(2N)^{-1}[\{e^{N(4h-z)} - e^{N(2h+z)}\}S'_N{}^+ + e^{N(2c+z)}S_N^+ + e^{N(2h+2c-z)}\{\kappa^{-1}B_N^- - \kappa^2 A_N^-\}]],$$
$$Z_{\beta\alpha}(z) = (4NG)^{-1}e^{i\alpha a}e^{-N|z-c|}(NzA_N^{\pm} - F_N^{\pm}) + E_{\beta\alpha}(z).$$

6. Отыскание $Z^*(x,y,z)$ и завершение построения решения задачи

Относительно функции $Z^*(x, y, z)$ получена краевая задача

$$\Delta Z^* = \dot{q}_x / G, \quad Z^{*\prime}|_{z=0} = 0, \quad Z^*|_{z=h} = 0,$$

которая в трансформантах Фурье выглядит так:

$$Z^*_{\beta\alpha}{}''(z) - N^2 Z^*_{\beta\alpha}(z) = -iG^{-1}\beta q_x^{\beta\alpha}(z), \quad 0 < z < h, \quad Z^*_{\beta\alpha}{}'(z) = 0, \quad Z^*_{\beta\alpha}(h) = 0. \tag{17}$$

Решение задачи (17) будем искать в виде

$$Z^*_{\beta\alpha}(z) = \int_0^h G(z,\xi) f_{\beta\alpha}(\xi)d\xi$$

где $G(z, \xi)$ – функция Грина [4], в данном случае

$$G(z,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{shN(h-\xi)}{N}\cdot\dfrac{chNz}{chNh}, & 0 \le z < \xi \\ -\dfrac{shN(h-z)}{N}\cdot\dfrac{chN\xi}{chNh}, & \xi < z \le h \end{cases}$$

$$f_{\beta\alpha}(\xi) = -iG^{-1}\beta q_x^{\beta\alpha}(z),$$

$$q_x^{\beta\alpha}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_x(x,y,z)e^{i\alpha x + i\beta y}dxdy = P_1\delta(\xi - c)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)e^{i\alpha x}dx\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)e^{i\beta y}dy = P_1\delta(\xi - c)e^{i\alpha a}$$

После вычислений решение примет вид

$$Z^*_{\beta\alpha}(z) = -\frac{i\beta e^{i\alpha a}P_1}{NG\cdot chNh}\begin{cases} chNc\cdot shN(h-z), & z-\xi > 0 \\ chNz\cdot shN(h-c), & z-\xi < 0 \end{cases}$$

преобразуем его

$$Z^*_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta e^{i\alpha a}P_1}{2NG\cdot chNh}\cdot\frac{1}{2}\begin{cases} -e^{N(h+c-z)} + e^{-N(h-c-z)} + e^{-N(h+c-z)} - e^{N(h-c-z)}, & z-\xi > 0 \\ -e^{N(h-c+z)} + e^{-N(h-c-z)} - e^{N(h-c-z)} - e^{-N(h-c+z)}, & z-\xi < 0 \end{cases}$$

Если к первой строке, т. е. где $z-c > 0$ прибавить и отнять $e^{-N(h-c+z)}$, а ко второй $(z - c < 0) - e^{N(z-h-c)}$ и преобразовать, то получим решение

$$Z^*_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta e^{i\alpha a}P_1}{2NG\cdot chNh}[e^{-N|z-c|}\mathrm{ch}Nh - \mathrm{ch}Nh\cdot e^{-N(h-z)} + \mathrm{sh}N(h-c)\cdot e^{-Nz}] \tag{18}$$

Учитывая (12) и (18) решение поставленной задачи запишем в виде

$$u_{\beta\alpha}(z) = ie^{i\alpha a}(4N^3G)^{-1}[e^{-N|z-c|}\{\alpha\mu_0 P_3 N^2(z-c) + i\alpha^2\mu_1 P_1 N|z-c| + i\mu_1 P_1(\beta^2 + \kappa(\beta^2 - \alpha^2))\} -$$

$$-2iP_1\beta^2(\mathrm{ch}Nh)^{-1}(\mathrm{ch}Nc\cdot e^{-N(h-z)} - \mathrm{sh}N(h-c)e^{Nz})] + i\alpha N^{-2}\mathrm{E}_{\beta\alpha}(z),$$

$$v_{\beta\alpha}(z) = ie^{i\alpha a}(4N^3G)^{-1}[e^{-N|z-c|}\{\beta\mu_0P_3N^2(z-c) + i\alpha\beta\mu_1P_1N|z-c| - i\alpha\beta\mu_1(1+2\kappa)P_1)\} +$$

$$+\, 2iP_1\alpha\beta(\mathrm{ch}Nh)^{-1}(\mathrm{ch}Nc\cdot e^{-N(h-z)} - \mathrm{sh}N(h-c)e^{Nz})] + i\beta N^{-2}\mathrm{E}_{\beta\alpha}(z).$$

7. Проверка решения

Решение построено на основе уравнений, полученных путем дифференцирования первых двух уравнений из системы уравнений Ламе. Поэтому может оказаться, что эти уравнения могут быть не удовлетворены [5]. Для того чтобы доказать правильность полученного решения, нужно показать, что оригиналы трансформант удовлетворяют первым двум уравнениям из системы уравнений Ламе или, что функции (12) удовлетворяют указанным уравнениям, трансформированными по Фурье, т. е. уравнениям

$$u''_{\beta\alpha}(z) - N^2u_{\beta\alpha}(z) - i\alpha\mu_0[w'_{\beta\alpha}(z) + Z_{\beta\alpha}(z)] = -G^{-1}\cdot q_x^{\beta\alpha}(z),$$

$$v''_{\beta\alpha}(z) - N^2v_{\beta\alpha}(z) - i\beta\mu_0[w'_{\beta\alpha}(z) + Z_{\beta\alpha}(z)] = 0.$$

Если подставить сюда (12), а также вытекающие из (12) равенства

$$u''_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\alpha Z''_{\beta\alpha}(z) - \beta Z^{*}_{\beta\alpha}{}''(z)), \quad v''_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\beta Z''_{\beta\alpha}(z) + \alpha Z^{*}_{\beta\alpha}{}''(z)),$$

то оба уравнения, учитывая (17), перейдут во второе уравнение из (10), которое было удовлетворено при получении решения (12). Таким образом, правильность решения обоснована.

8. Два случая сосредоточенной силы $P = (P_1, 0, P_3)$: 1) $P_1 \neq 0, P_3 = 0$, 2) $P_3 \neq 0, P_1 = 0$

Введем обозначения

$$M_i = \kappa ze^{N(4h-z)}(\kappa\mu 2Nc)\mu\kappa ze^{Nz} + 2Nhze^{2Nh}\{e^{Nz}(\kappa\mu 2Nc) \pm e^{-Nz}\} + ze^{2Nh}\{\mu e^{Nz} + e^{-Nz}(\kappa\mu 2Nc)\} -$$

$$-\kappa ze^{2Nc}\{e^{Nz}(\kappa + 2Nc) + e^{-Nz}\} - 4z(Nh)^2e^{N(2h+2c-z)} + 2zNhe^{2N(h+c)}\{e^{Nz} + e^{-Nz}(\kappa \pm 2Nc)\}\mu$$

$$\mu ze^{2N(h+c)}\{e^{Nz}(\kappa \pm 2Nc) \pm \kappa^2e^{-Nz}\} \pm \kappa ce^{Nz}\mu\kappa^2ce^{N(4h-c)} - 4Nh^2\mathrm{ch}Nze^{2N(h+c)} - 2Nh^2e^{2Nh}\{e^{Nz}(\kappa\mu 2Nc) \pm$$

$$\pm\, e^{-Nz}\} \pm 2he^{2Nh}\{e^{Nz}(Nc\kappa + ½(1\mu\kappa^2)) + e^{-Nz}Nc\} + 2he^{2N(h+c)}\{e^{Nz}Nc + e^{-Nz}(Nc\kappa\mu ½(1\mu\kappa^2))\} \pm$$

$$\pm\, c\kappa^2e^{N(2h+z)}\mu c\kappa e^{N(2h-z)} + c\kappa^2e^{N(2c+z)} + c\kappa e^{N(2c-z)} + c\kappa e^{N(2h+2c+z)} + ce^{N(2h+2c-z)} -$$

$$-½(1\mu\kappa^2)\kappa N^{-1}\{\pm e^{N(4h-z)}\mu e^{N(2h+z)} + e^{N(2c+z)}\mu(1+\kappa^2)(1\mu\kappa^2)^{-1}e^{N(2h+2c-z)}\}, \quad i=1,2.$$

$$H_i = Nz[e^{N(4h-z)}(\kappa^2\mu 2Nc)\mu\kappa e^{Nz} + 2Nhe^{2Nh}\{e^{Nz}(\kappa\mu 2Nc) \pm e^{-Nz}\} + e^{2Nh}\{\mu e^{Nz} - e^{-Nz}(\kappa\mu 2Nc)\} +$$

$$+\, \kappa e^{2Nc}\{\mu e^{Nz}(\kappa \pm 2Nc) + e^{-Nz}\} - 4(Nh)^2e^{N(2h+2c-z)} + 2Nhe^{2N(h+c)}\{e^{Nz} + e^{-Nz}(\pm\kappa + 2Nc)\} -$$

$$-\, e^{2N(h+c)}\{e^{Nz}(\mu\kappa + 2Nc) + \kappa^2e^{-Nz}\}]\mu e^{Nz}Nc\kappa - \kappa e^{N(4h-z)}(\mu Nc\kappa + ½(1 \pm \kappa^2)) + 2(Nh)^2e^{2Nh}\{e^{Nz}(\kappa\mu 2Nc) \pm$$

$$\pm\, e^{-Nz}\} - 2Nhe^{2Nh}\{e^{Nz}(\mu Nc\kappa + ½(1 \pm \kappa^2)) + e^{-Nz}Nc\} + \kappa e^{2Nh}\{e^{Nz}(\mu Nc\kappa + ½(1 \pm \kappa^2)) - e^{-Nz}Nc\} +$$

$$+\, 2Nhe^{2N(h+c)}\{-e^{Nz}Nc + e^{-Nz}(Nc\kappa + ½(1 \pm \kappa^2))\} + \kappa e^{2N(h+c)}\{e^{Nz}(\mu Nc\kappa + ½(1 \pm \kappa^2)) +$$

$$+\, e^{-Nz}(Nc\kappa^{-1} + ½(1 \pm \kappa^2))\}, \quad i = 1, 2.$$

В случае $P_1 \neq 0$, $P_3 = 0$ решение имеет вид

$$w_{\beta\alpha}(z) = w_{\beta\alpha}{}^0(z) + i\alpha\mu_1e^{i\alpha a}(4NG)^{-1}P_1[e^{-N|z-c|}(z-c) + e^{-Nc}D_{\beta\alpha}{}^{-1}\mathrm{M}_1],$$

$$Z_{\beta\alpha}(z) = Z_{\beta\alpha}{}^0(z) + i\alpha\mu_1e^{i\alpha a}(4NG)^{-1}P_1[-e^{-N|z-c|}(\kappa - N|z-c|) +$$

$$+\, e^{-Nc}D_{\beta\alpha}{}^{-1}(\mathrm{H}_1 - 2Nh\kappa(e^{N(2h-z)} + e^{N(2h+2c-z)}) + \kappa^2\{e^{Nz} - e^{N(2h-z)} + e^{N(2c-z)}\})].$$

Во втором случае $P_3 \neq 0$, $P_1 = 0$

$$w_{\beta\alpha}(z) = w_{\beta\alpha}{}^0(z) + \mu_0e^{i\alpha a}(4G)^{-1}P_3[Ne^{-N|z-c|}(N|z-c| + \kappa) +$$

$$+\, e^{-Nc}D_{\beta\alpha}{}^{-1}(\mathrm{M}_2 + 2h\kappa(e^{N(2h+2c+z)} - e^{N(2h-z)}) - \kappa^2N^{-1}\{e^{Nz} - e^{N(2h-z)} + e^{N(2c-z)} - e^{N(2h+2c+z)}\})],$$

$$Z_{\beta\alpha}(z) = Z_{\beta\alpha}{}^0(z) + \mu_0e^{i\alpha a}(4G)^{-1}P_3[Ne^{-N|z-c|}(z-c) + e^{-Nc}D_{\beta\alpha}{}^{-1}\mathrm{H}_2].$$

Трансформанты смещений найдены. Воспользуемся формулами обращения

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\beta\alpha}(z)\, e^{-i\beta y}e^{-i\alpha x}d\beta d\alpha, \quad Z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Z_{\beta\alpha}(z)\, e^{-i\beta y}e^{-i\alpha x}d\beta d\alpha,$$

Для перехода от двухмерного интеграла к одномерному применим формулу [6]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)e^{-i\alpha x-i\beta y}d\alpha d\beta=\int\limits_0^{\infty} tF(t)J_0\left(t\sqrt{x^2+y^2}\right)dt$$

Тогда решение примет вид

$$w(x,y,z)=\tfrac{1}{2\pi G}\int\limits_0^{\infty}\Big[D_{\beta\alpha}^{-1}\cdot tJ_0\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\xi,\eta)d\xi d\eta\,[4th(z-h)e^{2th}\mathrm{sh}tz+2(z-$$
$$-2\mu_1{}^{-1}h)e^{2th}\mathrm{ch}tz-2(\mathrm{t}\mu_1)^{-1}\kappa e^{2th}\mathrm{sh}tz+\kappa ze^{tz}-(t\mu_1)^{-1}\kappa e^{tz}+\kappa ze^{t(4h-z)}+(t\mu_1)^{-1}\kappa e^{t(4h-z)}]+$$
$$\tfrac14 J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)(\mathrm{e}^{-t|z-c|}(\mu_0P_3\kappa+|z-c|A_N{}^{\pm})+e^{-tc}D_t{}^{-1}[\kappa ze^{t(4h-z)}B_t^{+}+\kappa ze^{tz}A_t^{-}+$$
$$+2thze^{2th}M_t^{+}+ze^{2th}R_t^{-}-\kappa ze^{2tc}\{e^{tz}B_t^{-}+e^{-tz}A_t{}^{+}\}-4z(th)^2A_t{}^{+}e^{t(2h+2c-z)}+2zthR_t{}^{+}e^{2t(h+c)}-$$
$$-ze^{2t(h+c)}\{e^{tz}B_t^{-}+\kappa^2e^{-tz}A_t{}^{+}\}-\kappa e^{tz}C_t^{-}-2th^2e^{2th}M_t^{+}-2he^{2th}\{\tfrac12e^{tz}S'^{+}_t+e^{-tz}tD_t{}^{+}\}+\kappa e^{t(2h-z)}C_t^{-}+$$
$$\kappa e^{t(2c-z)}D_t^{+}-4th^2\mathrm{ch}Nze^{2N(h+c)}A_t^{+}+2he^{2t(h+c)}\{te^{tz}D_t^{-}+\tfrac12e^{-tz}S'^{-}_t\}+\kappa e^{t(2h+2c+z)}D_t^{-}+$$
$$+\kappa(2t)^{-1}[\{e^{t(4h-z)}-e^{t(2h+z)}\}S'^{+}_t+e^{t(2c+z)}S_t^{+}+e^{t(2h+2c-z)}\{\kappa^{-1}B_t^{-}-\kappa^2A_t^{-}\}]])]dt,$$

$$Z(x,y,z)=\tfrac{1}{2\pi G}\int\limits_0^{\infty}\Big[D_{\beta\alpha}^{-1}\cdot tJ_0\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\xi,\eta)d\xi d\eta\,[4t^2h(h-z)e^{2th}\mathrm{ch}tz-$$
$$-2t(z+2\mu_0{}^{-1}h)e^{2th}\mathrm{sh}tz+2\mu_0{}^{-1}\kappa e^{2th}\mathrm{ch}tz-\kappa zte^{tz}-\mu_0{}^{-1}\kappa e^{tz}+\kappa zte^{t(4h-z)}-\mu_0{}^{-1}\kappa e^{t(4h-z)}]+$$
$$+\tfrac14 J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)(e^{-t|z-c|}(tzA_t^{\pm}-F_t^{\pm})+e^{-tc}D_t{}^{-1}[tz(e^{t(4h-z)}(2tcA_t^{-}+\kappa^2A_t^{+})+2the^{2th}M_t^{+}+e^{2th}R_t^{-}-$$
$$-\kappa e^{2\mathrm{tc}}M_t^{-}-4(th)^2A_t{}^{+}e^{\mathrm{t}(2h+2c-z)}-2the^{t(2h+2c)}R_t{}^{+}-e^{t(2h+2c)}\{e^{tz}(2tcA_t{}^{+}+\kappa A_t{}^{-})+\kappa^2e^{-tz}A_t{}^{+}\})+$$
$$+\kappa e^{tz}F_t^{-}-\tfrac12\kappa e^{t(4h-z)}S_t^{-}+2(th)^2e^{2th}M_t^{+}+2the^{2t(h+c)}W_t^{-}-2the^{2th}V_t^{+}+\kappa e^{2th}V_t^{-}+\kappa e^{2tc}\mathrm{W}_\mathrm{t}^{+}+$$
$$+4(th)^2e^{2t(h+c)}A_t{}^{+}\mathrm{ch}tz+\tfrac12\kappa e^{2t(h+c)}\{e^{tz}S_t^{-}+e^{-tz}(\kappa^{-1}B_t^{-}+\tfrac12\kappa^2A_t{}^{+})\}]]dt.$$

9. Заключение

Точное решение построено в виде квадратур. По построенным смещениям можно определить напряжения. Полученное в работе решение может быть использовано при решении контактных задач о вдавливании штампа в упругое основание в виде толстой полубесконечной плиты и задач изгиба пластин на упругом основании.

Литература

1. *Mindlin R. D.* Force at a point in the interior of a semi infinite solid // Proc. First Midwestern Conf. Solid Mech, Univ. of Illinois, Urbana. 1963. – С. 111.
2. *Попов Г. Я.* Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003, № 6. – С. 31–39.
3. *Попов Г. Я.* О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям // Докл. НАН. – 2002. – **384**, № 2. – С. 193–196.
4. *Попов Г. Я.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Рауан, 1999. – 133 с.
5. *Попов Г. Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 46–73.
6. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

Поступила в редакцию
02.06.09