

УДК 519.711.3

А. В. Усов, д-р техн. наук**А. А. Батырев***

* Национальный политехнический университет МОН Украины

** Отделение гидроакустики Морского гидрофизического института
НАН Украины (г. Одесса, E-mail: usov-a-v@mbei.opu.ua)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЯ ПОКРЫТИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА БАЗЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрено применение сингулярных интегральных уравнений к решению ряда технологических задач. Разработана математическая модель, которая позволяет контролировать состояние наследственных дефектов типа отслоения по границе основного материала и покрытия, которые появляются на этапе их нанесения, и развитие этих дефектов в поверхностные трещины и сколы под действием термомеханических явлений, сопровождающих механическую обработку, а также условия сохранения равновесия указанных дефектов.

Розглянуто застосування сингулярних інтегральних рівнянь до розв'язання деяких технологічних задач. Розроблено математичну модель, яка дозволяє контролювати стан спадкоємних дефектів типу відшарування межею основного матеріалу та покриття, що з'являються на етапі їх нанесення, та розвиток цих дефектів у поверхневі тріщини та сколи під дією термомеханічних явищ, які супроводжують механічну обробку, а також умови збереження рівноваги зазначених дефектів.

Введение

В настоящее время при решении технологических задач, учитывающих наследственность предыдущих операций при изготовлении деталей, эффективным средством для исследования состояния рабочих поверхностей изделий, подверженных трещино- и сколообразованию при механической обработке, являются сингулярные интегральные уравнения [1–5].

Различные технологические операции способствуют возникновению в поверхностном слое изготавливаемых деталей наследственных дефектов, которые являясь концентраторами напряжений, способствуют трещинообразованию на рабочих поверхностях как в процессе их обработки, так и при эксплуатации готовых изделий.

Особенно значительные потери от брака из-за наследственных дефектов на финишных операциях. Шлифование, являясь для большинства деталей окончательной операцией, обеспечивающей существенное повышение эксплуатационных свойств за счёт высокой точности, низкой шероховатости, сопровождается высокотемпературным воздействием, приводящим к прижогам и значительному браку от выхода годных изделий по причине образования трещин.

Снижение брака при шлифовании данных материалов, повышение эксплуатационных свойств изделий из этих материалов является важной задачей, решение которой приводит к значительной экономии материальных ресурсов, трудоёмкости и себестоимости изготовления деталей.

Постановка задачи

При исследовании напряженно-деформированного состояния тел с трещиноподобными дефектами сингулярные интегральные уравнения используют для изучения распределения напряжений в их окрестности и определения коэффициента интенсивности напряже-

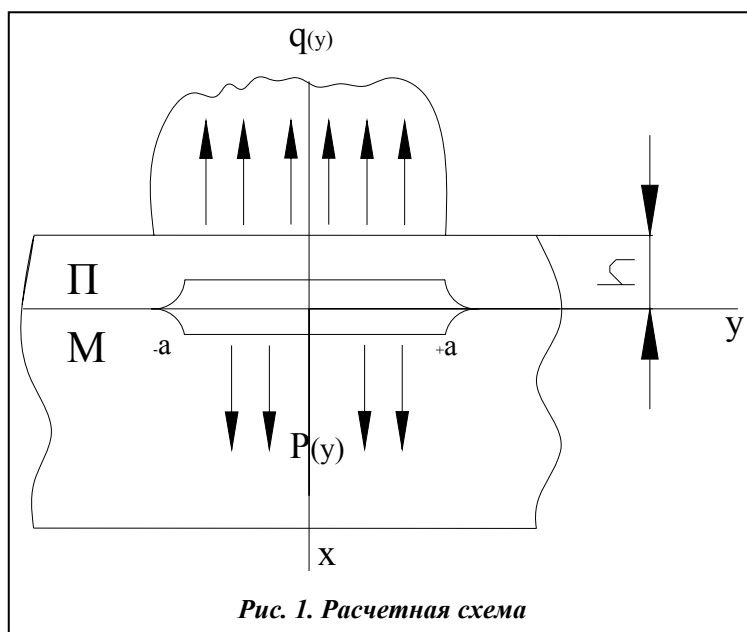


Рис. 1. Расчетная схема

ний, по величине которого можно судить о возможном развитии этих дефектов в магистральные трещины, приводящие к потере несущей способности конструкций [4, 6].

Рассмотрим модель для исследования термомеханических процессов в системе покрытие-матрица при механической обработке. При исследовании механических свойств покрытий обычно предполагают, что их разрушение происходит непосредственно в зоне воздействия нагрузки, в особенности, если последняя локализована в малой зоне. Прочность покрытия определяют по возникающим

в них напряжениям изгиба, а основания – по максимальным контактным напряжениям, которые имеют место непосредственно в зоне контакта инструмента.

Однако локальные нагрузки в виде интенсивных тепловых потоков, вследствие которых формируются термоупругие напряжения, приводят и к отрыву покрытий от деталей, в особенности при имеющихся дефектах частичного отслоения на этапе их нанесения.

Для разработки критериев сохранения сплошности покрытия на стадии проектирования технологических операций финишной обработки необходимо определить контактные напряжения в зоне положительного отрывающего направления (в предположении отсутствия отрыва покрытия) и сравнить их с напряжениями, разрушающими сцепление.

Дифференциальное уравнение изгиба покрытия, лежащего на упругом основании, при безразмерных величинах нагрузок и размеров, в случае, когда нагрузка $q(x, y)$, действуя на покрытие толщиной h , зависит от координаты y и x . Пусть по границе покрытие-матрица образовалось отслоение, занимающее плоскую область Ω . Задача заключается в отыскании коэффициентов интенсивности контактных напряжений в граничных точках Ω , с помощью которых, как известно ([6, 7]), можно решать вопрос о равновесном состоянии рассматриваемого дефекта, а значит, получить ответ на вопрос об условиях скалывания частично отслоившегося покрытия.

Предположим, что между покрытием и основным материалом нет касательного взаимодействия, т.е. отлично от нуля только контактные нормальные напряжения $P(y)$. Такое предположение оправдано тем, что при обработке шлифованием участка с частично отслоившимся покрытием формирующийся тепловой поток направлен перпендикулярно обрабатываемой поверхности. Вследствие неравномерности прогрева и различных значений коэффициентов линейного расширения материалов покрытия и матрицы в области Ω частичного отслоения будут формироваться нормальные напряжения отрыва. Рассмотрим уравнение, описывающее состояние системы покрытие - матрица под действием термомеханической нагрузки $q(y)$, которая формируется при механической обработке (рис. 1) [4]:

Такая схема предопределяет тепловые и деформационные условия сопряжения слоя по границе раздела его с основным материалом.

Поэтому задачу можно сформулировать в виде следующей системы:

$$D_1 \frac{d^4 \varpi}{dy^4} = P(x) - q(y), \quad (-\infty < y < \infty). \quad (1)$$

Здесь через D_1 обозначена жесткость покрытия $D_1 = \frac{E_1 h}{12(1 - \mu^2)}$; E_1 – модуль упругости материала покрытия; h – толщина покрытия; μ – коэффициент Пуассона материала покрытия; $P(y)$ – нормальные контактные напряжения, действующие между покрытием и матрицей; $q(y)$ – нагрузка, отрывающая покрытие от основного материала; $w(y)$ – прогиб покрытия.

Вертикальные смещения $w_3(y)$ поверхностных точек матрицы в области отслоения Ω ($|y| \leq a$), которые можно интерпретировать как раскрытие трещины, согласно [6, 7, 8] могут быть представлены через основную матрицу-ядро в виде

$$\varpi_3(y) = -\frac{D_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\beta|y-s|)P(s)ds, \quad (2)$$

где $D_2 = \frac{2(1-\mu_2^2)}{E_2}$; E_2, μ_2 – коэффициенты упругости и Пуассона основного материала;

$K_0(\beta|y-s|)$ – функция Макдональда, обладающая свойством $\lim_{\beta \rightarrow \infty} K_0(\beta|y-s|) = \ln \frac{1}{|y-s|} + \gamma$.

Так как контактные напряжения на участке $|y| = |s| \leq a$ отсутствуют, то имеет место условие

$$P(s) \equiv 0, \quad |s| < a \quad (3)$$

Неизвестную разность (скачок функции) $\chi(y)$ между прогибами покрытия $w(y)$ и вертикальными смещениями $w_3(y)$ поверхностных точек основного материала в области Ω частичного отслоения представим в виде

$$W(y) - W_3(y) = \chi(y), \quad \chi(y) \equiv 0, \quad |y| > a \quad (4)$$

Задачу (1)–(4) будем решать с помощью интегральных преобразований Фурье [1–3].

Трансформанты Фурье функций, содержащихся в выражениях (1)–(4), обозначим, как это принято в литературных источниках, посвященных данному вопросу, следующим образом:

$$\|\chi_\alpha, P_\alpha, \varpi_\alpha^{(3)}, q_\alpha, H(\alpha)\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\chi(y), P(y), \varpi_3(y), q(y), K(y-s)\| e^{i\alpha y} dy$$

Перейдем в уравнениях (1)–(4) к изображениям Фурье, получим

$$D_1 \alpha^4 \varpi_\alpha = P_\alpha - q_\alpha, \quad q_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(s) e^{i\alpha s} ds, \quad (5)$$

$$\varpi_\alpha^{(3)} = -\frac{D_2}{\pi} \frac{c}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} P_\alpha, \quad \text{т.к.} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\beta|y-s|) e^{i\alpha y} dy = \frac{c}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}.$$

В последнем выражении использована теорема о свертке функций-оригиналов [2, 3]. Трансформанта скачка прогибов основания и покрытия χ_α определяется равенством

$$\varpi_\alpha - \varpi_\alpha^{(3)} = \chi_\alpha, \quad \varpi_\alpha = \chi_\alpha + \varpi_\alpha^{(3)} = \chi_\alpha - \frac{D_2 c}{\pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} P_\alpha.$$

Подставив выражение для ϖ_α в равенство (5), получим

$$D_1 \alpha^4 \left(\chi_\alpha - \frac{D_2 c}{\pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} P_\alpha \right) = P_\alpha - q_\alpha.$$

Из этого уравнения находим трансформанту контактных напряжений

$$P_\alpha \left(1 + \frac{D_1 \cdot D_2 c \alpha^4}{\pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \right) = D_1 \alpha^4 \chi_\alpha + q_\alpha, \quad (6)$$

$$P_\alpha = \frac{D_1 \alpha^4 \chi_\alpha + q_\alpha}{1 + \frac{D_1 D_2 c \cdot \alpha^4}{\pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}}; \quad \chi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \chi(s) e^{i\alpha s} ds.$$

Воспользовавшись формулой обращения и формулой свертки для трансформанты Фурье [2, 3, 5], из формулы (6) получим выражение для контактных напряжений

$$P(y) = \int_{-a}^a \chi(s) ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1 \alpha^4 e^{-i\alpha|y-s|}}{A \alpha^4 \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} d\alpha + \int_{-a}^a q(s) ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha|y-s|}}{A \alpha^4 \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} d\alpha, \quad A = \frac{D_1 D_2 c}{\pi}. \quad (7)$$

Так как содержащиеся в приведенном выражении несобственные интегралы являются расходящимися, то, дифференцируя дважды по y соотношение (7), перейдем к рассмотрению главных значений контактных напряжений в виде

$$P(y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-a}^a \chi(s) ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1 \alpha^2 e^{-i\alpha|y-s|}}{1 + |\alpha|^3 A} ds + \int_{-a}^a q(s) ds \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha|y-s|}}{1 + |\alpha|^3} d\alpha. \quad (8)$$

При этом использован предельный переход

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{A \alpha^4}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = |\alpha|^3 A.$$

Второе слагаемое в соотношении (8) является регулярным слагаемым, т. е. несобственный интеграл – сходящийся.

Для улучшения сходимости первого слагаемого в (8) представим его следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{-i\alpha|y-s|}}{1 + |\alpha|^3 A} d\alpha &= \frac{D_1}{\pi A} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 [\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha} + e^{-\alpha}]}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha = \\ &= \frac{D_1}{\pi A} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha + \frac{D_1}{\pi A} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 [\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}]}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение $\frac{\alpha^2}{\alpha^3 + \gamma}$, где $\gamma = \frac{1}{A} = \frac{\pi}{D_1 D_2 c}$, запишем так:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^3 + \gamma} = \frac{\alpha^2}{\alpha^3 + \gamma} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^3 + \gamma} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)}.$$

Подставляя его в (9), получим:

$$\frac{D_1}{\pi A} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha + \frac{D_1}{\pi A} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha - \gamma \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right]. \quad (10)$$

В последнем выражении воспользуемся представлением [4, 7]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = \ln \frac{1}{|y-s|} \quad (11)$$

тогда (10) примет вид

$$\frac{D_1}{\pi A} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 [\cos \alpha(y-s)]}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha = B + \frac{D_1}{\pi A} \ln \frac{1}{|y-s|} - \frac{D_1 \gamma}{\pi A} \left[\int_0^\infty \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right]. \quad (12)$$

Здесь $B = \frac{D_1}{\pi A} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha^3 + \gamma} d\alpha$.

Возвращаясь к выражению (8) для главных значений контактных напряжений $P(y)$ и по-прежнему используя (11), получим

$$P(y) = \frac{D_1}{\pi A} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-a}^a \chi(s) \left[B^* + \ln \frac{1}{|y-s|} - \gamma \int_0^\infty \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] ds + \frac{1}{2\pi A} \int_{-a}^a q(s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\alpha|y-s|}}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha ds.$$

Для нахождения неизвестной функции $\chi(y)$ реализуем условие равенства (3) контактных напряжений в зоне частичного отслоения $|y| \leq a$

$$\frac{D_1}{\pi A} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-a}^a \chi(s) \left[B^* + \ln \frac{1}{|y-s|} - \gamma \int_0^\infty \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] ds + \frac{1}{2\pi A} \int_{-a}^a q(s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\alpha|y-s|}}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha ds = 0. \quad (13)$$

Полученное уравнение (13) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение с логарифмическим ядром

$$\frac{d^2}{dy^2} \int_{-a}^a \chi(s) \left[\ln \frac{1}{|y-s|} + R(y-s) \right] ds = f(y). \quad (14)$$

Для его решения в явном виде воспользуемся методом ортогональных многочленов [7]. Сущность этого метода базируется на замечательном свойстве классических многочленов: они являются собственными функциями многих интегральных операторов. Так, многочлены Чебышева $U_{2n}(y)$ – собственные функции интегрального оператора с логарифмическим ядром.

Наличие спектральных соотношений позволяет легко построить явное решение уравнения (14) в виде разложения по собственным функциям.

Преобразуем уравнение (13) к виду (14). Предварительно с помощью замен $s = a\tau$, $y = at$, $dy = adt$, $dy^2 = a^2 dt$, $ds = a d\tau$ сведем интервал интегрирования к промежутку $[-1; 1]$.

С учетом сказанного получим

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\pi A} \frac{d^2}{adt^2} \int_{-1}^1 \chi(a\tau) \left[\ln \frac{1}{a} + \ln \frac{1}{|t-\tau|} + B^* - \gamma \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a(t-\tau) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi A} \int_{-1}^1 q(a\tau) \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a|t-\tau|}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha d\tau = 0 \quad |t| \leq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем обозначение $\int_{-1}^1 q(a\tau) d\tau = P^*$, что эквивалентно утверждению о постоянстве

нагрузки на участке частичного отслоения покрытия. Тогда второе слагаемое (15) можно представить в виде

$$\frac{P^*}{2\pi A} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\gamma + |\alpha|^3} \int_{-1}^1 \cos \alpha a(t-\tau) d\tau = \frac{P^*}{\pi a^2} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a t \sin \alpha a}{\alpha(\gamma + |\alpha|^3)} d\alpha, \quad (16)$$

С учетом (16) интегро-дифференциальное уравнение (15) запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\pi a} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \chi(a\tau) \left[\ln \frac{1}{a} + \ln \frac{1}{|t-\tau|} + B * -\gamma \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a(t-\tau) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] d\tau = \\ = \frac{P^*}{\pi a^2} \int_0^\infty q(a\tau) \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a t \sin \alpha a}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Разыскиваем решение $\chi(a\tau)$ уравнения (17) в виде следующего разложения по многочленам Чебышева:

$$\chi(a\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(\tau) \sqrt{1-\tau^2} \chi_n \quad (18)$$

Подставив (18) в уравнение (17), получим

$$\frac{D_1}{\pi a} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(\tau) \chi_n \left[\ln \frac{1}{t-\tau} - \gamma \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a(t-\tau) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] d\tau = \frac{-P^*}{D_1 a} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a t \sin \alpha a}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha \quad (19)$$

Используя спектральное соотношение [7]:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\tau|} \sqrt{1-\tau^2} V_{2n}(\tau) d\tau = -\pi(2n+1) V_{2n}(t),$$

а также равенство нулю слагаемых, не содержащих переменную t при дифференцировании, запишем (19) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) V_{2n}(t) \chi_n + \gamma \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}(\tau) \sqrt{1-\tau^2} \chi_n \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a(t-\tau) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha d\tau = \\ = \frac{P^*}{D_1 a} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha a t \sin \alpha a}{\gamma + |\alpha|^3} d\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

Ортогонализируем уравнение (20), для чего домножим обе части на многочлен Чебышева $U_{2m}(t)$ с весовой функцией $\sqrt{1-t^2}$ и проинтегрируем на отрезке $[-1; 1]$. Учитывая соотношение $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{2m}(t) U_{2n}(t) dt = \delta_{nm} \frac{\pi}{2}$ [7] и процедуру дифференцирования второго слагаемого, уравнение (20) относительно искомых коэффициентов χ_n запишем как

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \chi_m (2m+1) - \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{2n}(\tau) U_{2m}(\tau) \sqrt{1-\tau^2} \sqrt{1-t^2} \int_0^\infty \frac{\alpha a^2 \cos \alpha a(t-\tau)}{(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha dt d\tau = \\ = \frac{P^*}{D_1 a} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a}{\alpha(\gamma + \alpha^3)} \int_{-1}^1 U_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} \cos \alpha a t d\alpha dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Выражение (21) представим в виде, удобном для дальнейших преобразований, используя следующее свойство интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha a^2 \cos \alpha a(t-\tau)}{(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| e^{-i\alpha a t} \cdot e^{i\alpha a \tau}}{|\alpha|^3 + \gamma} d\alpha,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \chi_m(2m+1) - \frac{\gamma a^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 U_{2n}(\tau) \sqrt{1-\tau^2} e^{i a \alpha \tau} d\tau \int_{-1}^1 U_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} e^{-i a \alpha t} dt \int_0^{\infty} \frac{a^2 d\alpha}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} = \\ = \frac{P *}{D_1 a} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{\alpha(\gamma + \alpha^3)} \int_{-1}^1 U_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} \cos \alpha a t d\alpha dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Преобразуем выражение (22), используя соотношения [7]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} \cos \alpha a t dt = 2 \int_0^1 U_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} \cos \alpha a t dt = \frac{(-1)^m \pi r(2m+2) y_{1+2n}(at)}{(2m)! a \alpha} \\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_{2n}(\tau) e^{-i a \alpha \tau} d\tau = \frac{\pi \delta(2+2n) J_{1+2n}(at)}{a \alpha (2n)!}. \end{aligned}$$

тогда (21) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{2} \chi_m(2m+1) - \gamma \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \frac{\delta(2+2n) \delta(2+2m)}{(2n)!(2m)!} \int_0^{\infty} \frac{J_{1+2n}(a\alpha) J_{1+2m}(a\alpha)}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \\ = \frac{(-1)^m P * \pi \delta(2m+2)}{D_1 a^2 (2m)!} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cdot J_{1+2m}(a\alpha)}{\alpha^2(\gamma + \alpha^3)} d\alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

Несобственные интегралы в уравнении (23) являются быстро сходящимися интегралами, для которых можно использовать численную реализацию по формулам Симпсона. Введем следующие обозначения:

$$f_m = \frac{(-1)^m P * \pi \delta(2m+2)}{D_1 a^2 (2m)!} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{\alpha^2(\gamma + \alpha^3)} J_{1+2m}(a\alpha) d\alpha; \quad (24)$$

$$d_{mn} = \frac{\gamma \pi^2 \delta(2+2n) \delta(2+2m)}{(2n)!(2m)!} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{\alpha^2(\gamma + \alpha^3)} J_{1+2m}(a\alpha) d\alpha. \quad (25)$$

В результате приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно χ_m

$$\chi_m(2m+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} d_{mn} = f_m. \quad (26)$$

Данную систему решают приближенно, используя метод редукции, т. е. заменяя систему (26) на конечную

$$\chi_m^* \sqrt{2m+1} + \sum_{n=0}^N \frac{\chi_n^* d_{mn}}{\sqrt{2n+1} \sqrt{2m+1}} = \frac{f_m}{\sqrt{2m+1}}, \quad m = \overline{0, N} \quad (27)$$

и добиваясь нужной точности увеличением числа N . Здесь $\chi_m^* = \sqrt{2m+1} \chi_m$, где

$$\chi_m = \frac{\chi_m^*}{\sqrt{2m+1}}.$$

Подставляя полученные значения χ_m в формулы (18), (12) и (13), находим контактные напряжения

$$P(y) = \frac{D_1}{\pi A} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_m \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} U_{2m}(sa) \left[B^* + \ln \frac{1}{y-s} - \gamma \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(y-s) - e^{-\alpha}}{\alpha(\alpha^3 + \gamma)} d\alpha \right] ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi A} \int_{-a}^a q(as) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(y-s)}}{\alpha(\gamma + \alpha^3)} d\alpha ds. \quad (28)$$

Коэффициенты интенсивности [6, 7, 8] определим из выражения (28), выделяя слагаемое при сингулярной части ядра, в качестве которого выбирается логарифмическое ядро. Имеются в виду выражения:

$$\frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|y-s|} \sqrt{1-s^2} U_{2m}(s) ds = P_m^*(y), \quad (29)$$

тогда

$$K_I^+ = \frac{D_1}{\pi A} \lim_{y \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi(y-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m P_m^*(y), \quad (30)$$

$$K_I^- = \lim_{y \rightarrow 1-0} \sqrt{2\pi(y-1)} P^*(y). \quad (31)$$

Чтобы выполнить предельные переходы (30), (31) необходимо продолжить спектральное соотношение $P^*(y)$ на интервал $|y| > 1$. С этой целью воспользуемся соотношением [5]:

$$\frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{y-s} \sqrt{1-s^2} U_{2m}(s) ds = \frac{(2)^{2m+2} \partial(3/2 + 2m)^2}{2(2m)! \pi (y-1)^{2m+2}} (-1)^{2m+1} \frac{\partial(2m+2)(2m+1)!}{\partial(3/2 + 2m)}$$

$$\left[\frac{\partial(-1/2)}{\partial(3/2 + 2m)(2m)!} F\left(3/2 + 2m; 2n + 2; 3/2; \frac{y+1}{y-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-y-1}{1-y}\right)^{-1/2} \frac{\partial(1/2)}{\partial(3/2 + 2m)\partial(2m+2)} F\left(3/2 + 2m; 2m + 2; \frac{y+1}{y-1}\right) \right] =$$

$$= \frac{2^{2m+2} (2m+2)^2}{(y-1)^{2m+2} (2m)!} F\left(3/2 + 2m; 2m + 2; 3/2; \frac{y+1}{y-1}\right) -$$

$$- \frac{2^{2m+1} (2m+1)}{(y-1)^{2m+2}} \sqrt{\frac{1-y}{-y-1}} F\left(3/2 + 2m; 2m + 1; 1/2; \frac{y+1}{y-1}\right), \quad |y| > 1. \quad (32)$$

Располагая этим соотношением, легко подсчитать коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) K_I^{\pm} . В силу симметрии данной задачи и пользуясь формулами (24), (25), (27), (29), (30), (31) и (32), находим

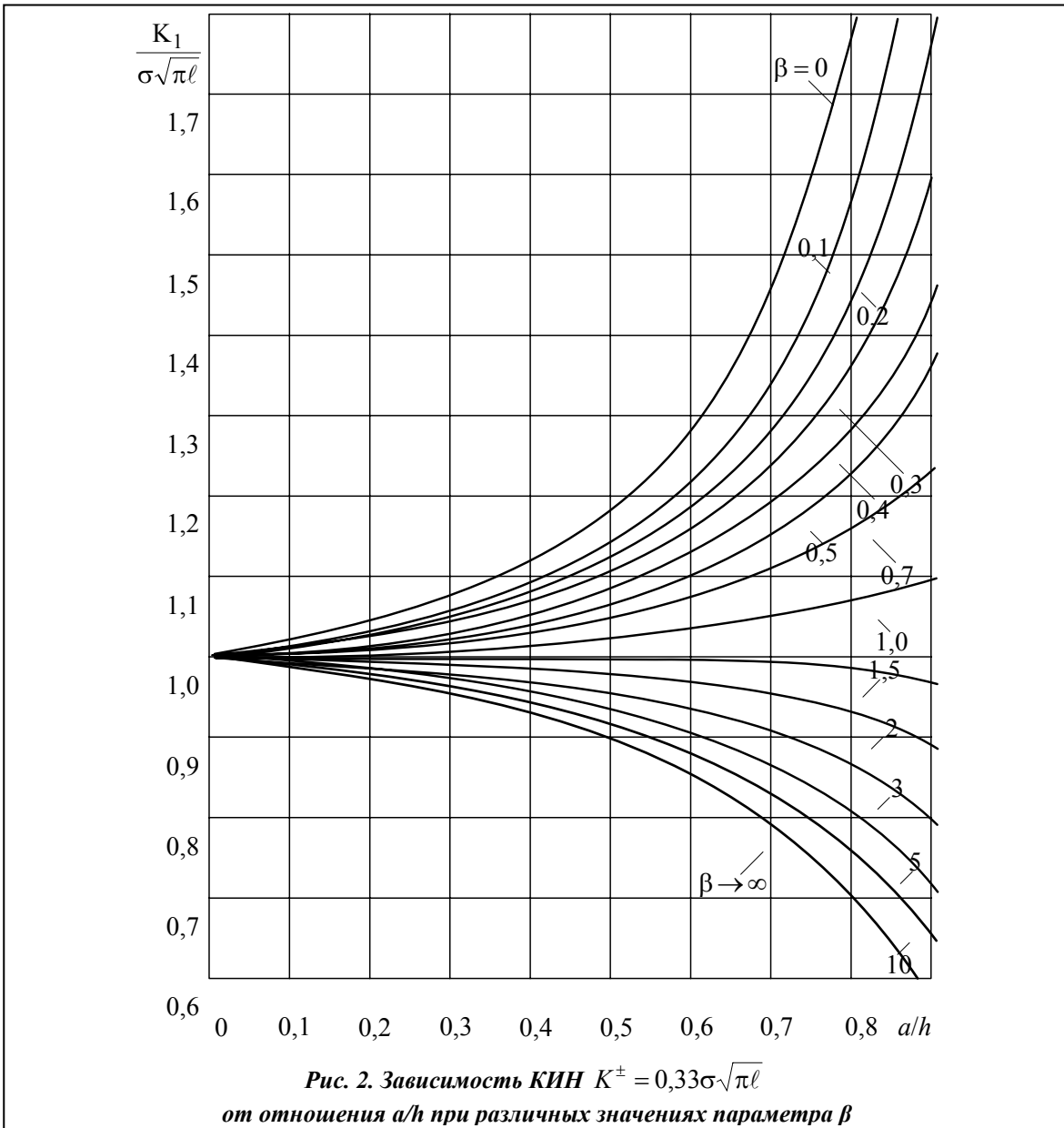
$$K_I^{\pm} = \frac{2D_1}{\sqrt{\pi A}} \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m \frac{2^{2m+1} (2m+1)^2}{(-2)^{2m+2} m!}. \quad (33)$$

Коэффициенты χ_m в уравнении (33) являются решением бесконечной системы (27).

На рис. 2 представлены зависимости КИН $\frac{K_I}{P(y)\sqrt{\pi a}}$ от отношения h/a при различных значениях параметра

$$\beta = \frac{D_1}{D_2} \left(\mu_1 = \mu_2 = 0,3; D_1 = \frac{E_1 h}{12(1-\mu_1^2)}; D_2 = \frac{2(1-\mu_2^2)}{E_2} \right),$$

где D_1 – жесткость покрытия; D_2 – жесткость основного материала.



Напряженно-деформированное состояние системы покрытие - матрица рассчитывалось, исходя из решения следующей задачи.

Для установления расчетных зависимостей между технологическими параметрами обработки и явлением отрыва покрытий при условии их недостаточно прочного сцепления предлагается следующая модель.

Система уравнений, определяющих тепловое и напряженно-деформированное состояние феррокерамического изделия с покрытием при механической обработке, содержит уравнение нестационарной теплопроводности [4]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_k^2 \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial y^2} \right), \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (k=1) \quad h \leq x \leq \infty, \quad (k=2) \quad (34)$$

и уравнение упругости Ламе в перемещениях

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial x} \frac{1}{1-2\mu} + \Delta \tilde{U}_k = b_k^T \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \tilde{U}_k(x, y) = \frac{U_k}{2G_k}; \quad \bar{V}_k(x, y) = \frac{V_k}{2G_k}; \quad (k=1,2), \quad (35)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial y} \frac{1}{1-2\mu_k} + \Delta \tilde{V}_k = b_k^T \frac{\partial T_k}{\partial y}; \quad b_k^T = \frac{4G_k(1+\mu_k)}{1-2\mu_k} \alpha_t^{(k)}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (36)$$

где: $T_k(x, y, \tau)$ – температура в точке с координатами (x, y) и в любой момент времени τ (при $k = 1$ – в покрытии, при $k = 2$ – в основном материале); a – температуропроводность материала; α_t^k – температурный коэффициент линейного расширения; μ_k, G_k – постоянные Ламе; U_k, V_k – компоненты вектора перемещений точки (x, y) ; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; h – толщина покрытия.

Начальные условия для данной задачи можно взять в виде

$$T(x, y, 0) = 0. \quad (37)$$

Граничные условия для температурных и деформационных полей, учитывающие теплообмен с поверхности вне зоны контакта круга с деталью и интенсивного тепловыделения в зоне обработки выглядят так:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{q(y, \tau)}{\lambda}, \quad |y| < l, \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \gamma T_1 = 0, \quad |y| > l, \quad (38)$$

$$\sigma_x(x, y, \tau)|_{x=0} = \tau_{xy}(x, y, \tau)|_{x=0} \quad (39)$$

где: $q(y, \tau)$ – интенсивность теплового потока, выделяемого в зоне контакта инструмента с обрабатываемой поверхностью; λ_1 – коэффициент теплопроводности шлифуемого материала; l – длина зоны контакта круга с обрабатываемой поверхностью; γ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, σ_x, τ_{xy} – нормальные и касательные напряжения.

Условия сопряжения покрытия с основным материалом для температурных полей

$$T_1(h-0, y, \tau) = T_2(h+0, y, \tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(h-0, y, \tau) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(h+0, y, \tau), \quad (40)$$

для деформационных полей и полей напряжения

$$U_1(h-0, y) = U_2(h+0, y), \quad V_1(h-0, y) = V_2(h+0, y), \quad \sigma_x^1(h-0, y) = \sigma_x^2(h+0, y). \quad (41)$$

Решение поставленной задачи (34)–(41) методами, изложенными в работе [4], позволили получить в явном виде выражения для расчета температуры как в покрытии, так и в основном материале в виде

$$T_1(x, y, \tau) = \frac{cV_{kp}}{\pi\lambda_1 l \sqrt{Vg}} \int_0^\tau \int_{-l}^l e^{-\frac{(x-\eta)^2 + (y-\eta)^2}{4a_1^2(\tau-t)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} + \gamma e^{\gamma^2(\tau-t)} [1 + \Phi(\gamma\sqrt{\tau-t})] \right\} d\eta dt, \quad (42)$$

$$T_2(x, y, \tau) = \frac{cV_{kp}}{\pi\lambda_2 l \sqrt{Vg}} \int_0^\tau \int_{-l}^l \frac{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} e^{-\frac{Vg(y-\eta)}{2a_2}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}} K_{1/2} \left(\frac{Vg}{2a_2} \sqrt{(y-\eta)^2 + x^2} \right) d\eta dt, \quad x > h. \quad (43)$$

Температурные напряжения определяются формулами

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = -\frac{\alpha_t^{(1)} E_1}{1-\mu_1} T_1(x, y, \tau) + b_1^* \frac{x}{h} + b_0^*, \quad (44)$$

$$\sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = -\frac{\alpha_t^{(2)} E_2}{1-\mu_2} T_2(x, y, \tau) + m_1^{-1} \left(m_h b_{11}^* \frac{x}{h} + b_0^* \right), \quad (45)$$

где

$$b_1^* = \frac{6m_1}{N_0^*} [2(m_1 + m_h)N_2^* - (m_h^2 - m_1)N_1^*], \quad (46)$$

$$b_0^* = \frac{2m_1}{N_0^*} [2(m_1 + m_h^3)N_1^* - 3(m_h^2 - m_1)N_2^*], \quad (47)$$

$$N_1^* = \frac{1}{h} \left[\frac{\alpha_t^{(1)} E_1}{1 - \mu_1} \int_0^h T_1(x, y, \tau) dx + \frac{\alpha_t^{(2)} E_2}{1 - \mu_2} \int_h^\delta T_2(x, y, \tau) dx \right], \quad (48)$$

$$N_2^* = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\alpha_t^{(1)} E_1}{1 - \mu_1} \int_0^h T_1(x, y, \tau) dx + \frac{\alpha_t^{(2)} E_2}{1 - \mu_2} \int_h^\delta T_2(x, y, \tau) dx \right], \quad (49)$$

$$N_0^* = 4(m_1 + m_h)(m_1 + m_h^3) - 3(m_h^2 - m_1)^2; \quad m_1 = \frac{1 - \mu_2}{1 - \mu_1} \frac{E_1}{E_2}; \quad m_h = \frac{\delta}{h}. \quad (50)$$

Полученные зависимости (42)–(50) позволяют моделировать процесс шлифования изделий с покрытием с учетом прогнозирования качества обработанных поверхностей.

Таким образом, на приведенной модели показано влияние напряженного состояния, возникающего в упругом теле, и взаимодействие трещиноподобного дефекта с границей тела. Оценка напряженно-деформированного состояния упругого тела с указанными дефектами проведена с помощью разработанного с этой целью нового метода, основанного на теории функций комплексного переменного и сингулярных интегральных уравнений, позволяющих с единых позиций решать весь спектр упругих задач для тел с неоднородностями типа трещин или включений.

Как показано в работе [7], при решении задач о концентрации напряжений возле дефектов формируются сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, ядра которых ведут себя как степенные функции со степенью $-3/4$, у краев отслоившегося включения, а в окрестности трещиноподобных дефектов – со степенью $-1/2$. Выяснено, что в случае слоистых тел имеется такое соотношение между упругими постоянными полуплоскостей, когда напряжения у отслоившегося включения имеют логарифмо-степенную особенность.

Литература

1. Батырев А. А. Сингулярные интегральные уравнения в задачах синтеза сигналов // Крайові задачі диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернівець. нац. ун-ту. – 2005. – С. 17–26.
2. Гахов Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 196 с.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
4. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2003. – 682 с.
5. Якимов А. В. Теплофизика механической обработки / А. В. Якимов, П. Т. Слободяник, А. В. Усов. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1991. – 240 с.
6. Осив П. Н. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / П. Н. Осив, И. В. Прокопчук, М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
7. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 428 с.
8. Панасюк В. В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.

Поступила в редакцию
01.06.09