

## ОБ АНОМАЛЬНОМ ВЛИЯНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.А. Буц

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина

E-mail: vbuts@kipt.kharkov.ua

Рассмотрен ряд новых интересных для приложений динамических систем, для которых наличие малых возмущений приводит к существенному изменению их динамики.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что малые возмущения, в особенности малые флуктуации, могут существенно (качественно) изменить эволюцию многих динамических систем. Следует также отметить фундаментальную роль малых возмущений для развития всего физического мышления. Действительно, еще Борном [1] было показано, что все физические системы (за исключением линейных осцилляторов) обладают той особенностью, что сколь угодно малая неопределенность начальных условий приводит к тому, что по истечении некоторого интервала времени динамика системы становится непредсказуемой.

В настоящей работе мы рассмотрим несколько новых интересных для приложений динамических систем, для которых наличие малых возмущений приводит к существенному изменению их динамики.

### 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВЫСОКИХ НОМЕРОВ ГАРМОНИК НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

Известно, что в вакууме осциллятор эффективно излучает высокие номера гармоник только в том случае, если он имеет большую энергию. Так, для синхротронного излучения максимум его приходится на гармонику с номером  $\nu \sim \gamma^3$  [2] (Рис.1,а). Если осциллятор нерелятивистский, то его излучение, в основном, происходит на основной частоте. Интенсивность излучения на второй гармонике в  $(r/\lambda)^2$  раз меньше (Рис.1,б). Здесь  $r$  – амплитуда осциллятора;  $\lambda$  – длина излучаемой волны.

В работах [3-7] показано, что в периодически неоднородной среде ситуация может быть качественно иной. В такой среде малая неоднородность может приводить к тому, что эффективность излучения на высших гармониках нерелятивистским осциллятором может быть очень высока. В частности, на Рис.2 представлена зависимость интенсивности излучения осциллятора ( $r = r_0 \cdot \sin \Omega t$ ) в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + q \cdot \cos(\vec{k}\vec{r})$  от номера гармоники  $n$ . Видно, что мощность излучения растет с ростом номера гармоники. Причем, максимум этого излучения при  $\beta = 0.1$  ( $\gamma = 1.005$ ),  $q = 10^{-4}$  приходится на номер  $n = 1000$ . Важно отметить, что для получения такого же излучения на этой гармонике осциллятор в вакууме должен иметь энергию  $\gamma > 500$ . Таким образом, малое периодическое возмущение диэлектрической проницаемости среды ( $q = 10^{-4}$ ), в которой происходит излучение осциллятора, может приводить к качественному изменению

спектра излучения такого осциллятора. Его спектр становится подобен спектру излучения релятивистского осциллятора в однородной среде.

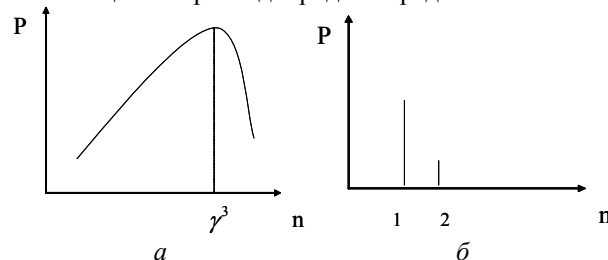


Рис.1. Спектры излучения релятивистских (а) и нерелятивистских (б) осцилляторов

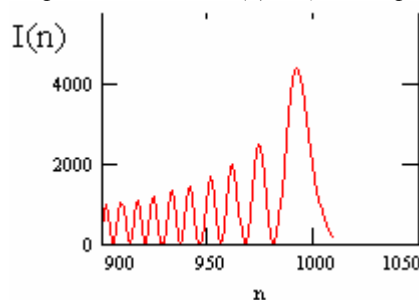


Рис.2. Зависимость интенсивности излучения нерелятивистского осциллятора в неоднородной среде от номера гармоники

Такая особенность спектра излучения нерелятивистских осцилляторов была изучена детально в эксперименте в СВЧ-диапазоне [6]. В эксперименте также показана возможность возбуждения мягкого рентгеновского излучения. На основе этой особенности излучения были предложены лазеры нового типа – лазеры на нерелятивистских электронах [7].

### 3. АНОМАЛЬНОЕ ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ДИНАМИКУ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В УСЛОВИЯХ АВТОРЕЗОНАНСА

Наиболее эффективное взаимодействие электромагнитных волн с заряженными частицами происходит, если выполняется одно из условий их резонансного взаимодействия. Условия резонансов формулируются в линейной теории взаимодействия частиц с полем электромагнитных волн. Учет особенностей нелинейной динамики частиц быстро нарушает условия резонансов. Это связано с тем, что условия резонансного взаимодействия почти во всех случаях только в линейной области совпадают с интегралами движения заряженных частиц. В общем случае, линии интегралов не совпадают с резонансами. Однако существует одно важное исключение. Это случай, когда выполняются условия авто-

резонанса. В условиях авторезонанса кривые интегралов совпадают с линиями резонансов как в линейной, так и в нелинейной областях взаимодействия. То есть линейная и нелинейная динамика частиц такова, что частица, которая попала в область параметров, удовлетворяющих условиям авторезонанса, не покидает эту область. Такая особенность динамики частиц очень привлекательна для использования ее как при ускорении заряженных частиц, так и при генерировании электромагнитных волн. Нужно сказать, что несмотря на эту привлекательность, схемы ускорения и генерирования до сих пор не нашли своего должного использования. Не исключено, что те трудности, с которыми столкнулись исследователи при реализации такого механизма, обусловлены тем фактом, что динамика частиц при авторезонансе, как показано в работе [8], аномально чувствительна к малым флуктуациям. Действительно, в работе [8] рассмотрена динамика частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны (Рис.3). При этом учитывается тот факт, что внешнее магнитное поле (или внешняя электромагнитная волна) имеет флуктуирующую компоненту  $\vec{H}_e = \vec{H}_0 + \vec{H}$ .

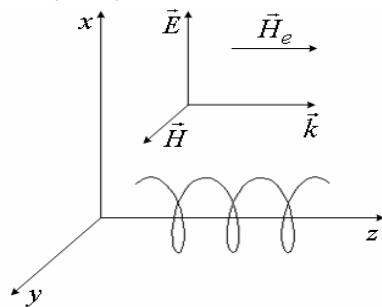


Рис.3. Структура полей и траектория частицы

В цитируемой работе получены следующие выражения для изменения энергии частицы, которая обусловлена наличием этой малой добавки:

$$\langle \gamma^2 \rangle = (\varepsilon \cdot W_n D \cdot \tau) / \left( 2\gamma_0 \frac{\partial R}{\partial \gamma} \right), \quad (1)$$

где  $R_s = kv_z + \frac{s\omega_H}{\gamma} - 1 \rightarrow 0$ ;  $\varepsilon = eE / mc\omega$ ;

$$\langle \vec{H}(\tau) \vec{H}(\tau_1) \rangle = 2D\delta(\tau - \tau_1).$$

Из этой формулы видно, что как только мы приближаемся к условиям авторезонанса ( $\partial R / \partial \gamma \rightarrow 0$ ), изменение энергии частицы под действием малых флуктуаций оказывается аномально большим.

Еще более сильное влияние флуктуаций возникает в том случае, когда под действием этих флуктуаций происходит диффузия циклотронных резонансов. Выше мы привели влияние флуктуаций внешнего магнитного поля на динамику частиц. К аналогичному же результату приводят и флуктуации других параметров рассматриваемой системы, например, флуктуации напряженности электромагнитной волны.

#### 4. ДИНАМИКА ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА

Выше была рассмотрена динамика заряженной частицы в условиях авторезонанса. В этом случае взаимодействие происходит в вакууме, и волновой

вектор волны направлен вдоль внешнего постоянно-го магнитного поля. Следует сказать, что динамика частиц во внешнем магнитном поле и в поле волны содержит много важных особенностей. В частности, в работе [10] была рассмотрена динамика ведущих центров заряженных частиц, которые движутся в постоянном магнитном поле и в поле волны, волновой вектор которой перпендикулярен внешнему магнитному полю. Координаты ведущих центров связаны с обычными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = \xi - \frac{P_{\perp}}{\omega_H} \sin \theta, \quad y = \eta + \frac{P_{\perp}}{\omega_H} \cos \theta.$$

Тогда для определения координат ведущего центра можно получить следующие уравнения:

$$\dot{\xi} = -2 \cdot \varepsilon \cdot [V(0) - (\varepsilon \cdot \sin \theta_1) / 2(\omega_H - 1)] \cdot \sin \theta_1;$$

$$\dot{\theta}_1 = [\omega_H - 1] + \frac{\varepsilon}{2V} \sin \theta_1. \quad (2)$$

Следует заметить, что система (2) обладает одной важной особенностью, а именно, для нее не выполняется теорема о непрерывной зависимости решений от параметров системы. Действительно, видно, что как только величина  $\omega_H$  проходит значение, равное единице, то второе слагаемое в квадратных скобках первого уравнения системы (2) претерпевает разрыв. Этот же факт отражается и на решениях этой системы. Для усредненной величины ведущего центра по угловой переменной получим следующее выражение:

$$\langle \xi \rangle = \varepsilon^2 \cdot \tau / 2(\omega_H - 1). \quad (3)$$

Из этой формулы видно, что для частиц, масса которых такова, что  $\omega_H > 1$ , ведущий центр будет двигаться в одном направлении. Для частиц, масса которых слегка отличается ( $\omega_H < 1$ ), он будет двигаться в прямо противоположном направлении. Эта зависимость иллюстрируется Рис.4.

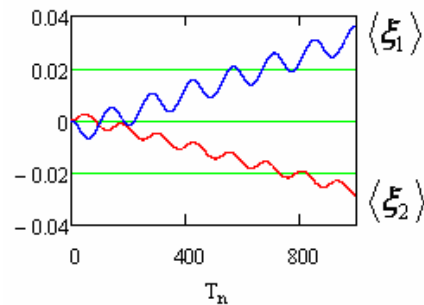


Рис.4. Эволюция ведущего центра для частиц разных масс при  $\varepsilon = 0.001$

Отметим, что чем меньше различие масс частиц и чем ближе циклотронная частота к единице, тем быстрее разбегаются частицы.

#### 5. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ С «ОДНОЙ» СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В подавляющем большинстве физических исследований в той или иной форме формулируется требование, чтобы выполнялись условия теоремы единственности. Действительно, в большинстве случаев нас интересует получение вполне предсказуемого детерминированного результата исследований.

В такой постановке задачи вне внимания исследователей оказываются динамические системы, которые имеют особые решения. Отметим, что главной отличительной чертой особых решений от традиционных является тот факт, что в точках этих решений теорема единственности нарушается. Если принять во внимание наличие динамических систем с особыми решениями, то открываются некоторые новые возможности для создания принципиально новых систем с необычными качествами.

В качестве характерного примера рассмотрим динамику системы, которая описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_0 = x_1; \quad \dot{x}_1 = \left( \frac{x_1^2}{2x_0} \right) - 0,5 \cdot x_0. \quad (4)$$

Фазовый портрет системы (4) представлен на Рис.5. Интегральными кривыми в этом случае являются окружности:  $\varphi = (x_0 - R)^2 + x_1^2 - R^2 = 0$ . Причем, центры окружностей располагаются на оси  $x_1 = 0$ , а радиусы этих окружностей равны расстоянию этих центров до нулевой точки ( $x_0 = 0; x_1 = 0$ ). Эта точка является общей для всех окружностей. Кроме того, эта точка является особым решением системы (4).

Что мы можем сказать, глядя на систему (4)? Это достаточно простая система. Она имеет всего одну степень свободы. Она имеет аналитическое решение (хотя и неявное). Поэтому трудно себе представить, что динамика такой системы может оказаться сложной, непредсказуемой. Однако в действительности это так. В этом можно убедиться, например, численными методами. Мы изучили эту систему численными методами. Динамика ее оказалась полностью хаотической. Появление хаоса связано с наличием особого решения. В целом, динамика выглядит следующим образом. Изображающая точка на фазовой плоскости первоначально движется по одной из окружностей.

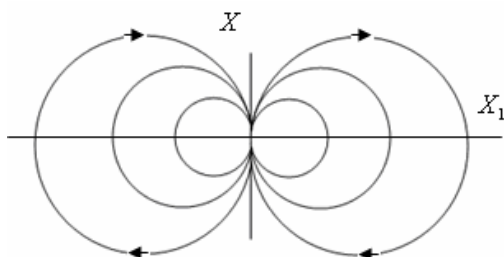


Рис.5 Фазовый портрет системы (4)

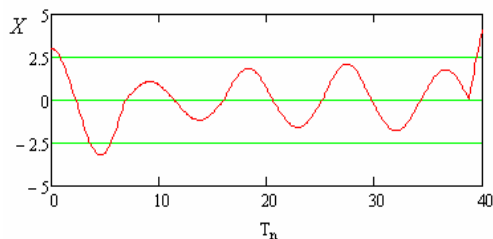


Рис.6. Зависимость от времени переменной  $x_0$ . Видны переходы изображающей точки с одной окружности на другую

Как только эта точка достигает особого решения, то дальнейшая ее траектория будет определяться сколь угодно малыми (но всегда имеющимися)

флуктуациями. В нашем случае в роли таких флуктуаций выступают флуктуации численных алгоритмов. Достаточно изменить точность вычислений, как сразу же меняется траектория изображающей точки. В результате при прохождении особого решения изображающая точка случайным образом перескакивает с одной окружности на другую окружность. Все это выглядит как абсолютно случайный процесс. Таким образом, включение в рассмотрение динамических систем с особыми решениями открывает новые возможности для построения систем с хаотической динамикой. В этом смысле можно даже говорить о хаотической динамике систем с одной степенью свободы. Однако при этом, конечно, нужно понимать, что причиной хаоса во всех этих случаях будет наличие пусть и сколь угодно малых флуктуационных сил. Поэтому выше в названии раздела мы слово «одной» взяли в кавычки.

Покажем теперь, как может быть построено множество систем с одной степенью свободы, аналогичных системе (4), динамика которых будет хаотической. Пусть у нас имеется интегральная кривая, которая задана уравнением:  $\varphi(x_0, x_1) = 0$ . Тогда система уравнений, интегралом которой будет эта интегральная кривая, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= F_1(\varphi, x_0, x_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} M(x_0, x_1); \\ \frac{dx_1}{dt} &= F_2(\varphi, x_0, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} M(x_0, x_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $F_s(\varphi, x_0, x_1)$  – произвольные функции, которые обладают свойством;  $F_s(0, x_0, x_1) = 0$ ;  $M(x_0, x_1)$  – произвольная функция.

Используя систему (5), можно построить большое разнообразие динамических систем, обладающих нужными свойствами. В качестве примера рассмотрим случай, когда интегральными кривыми является семейство окружностей с радиусом  $R$ :

$$\varphi = (x_0 - R)^2 + x_1^2 - R^2 = 0. \quad (6)$$

Множество интегральных кривых (6) представлено на Рис.5.

Выбором функций  $F_s$  и  $M$  можно добиться исключения параметра  $R$  из системы уравнений (5). Действительно, выберем эти функции в виде:  $F_1 = 0$ ;  $F_2 = \varphi \cdot f(x_0, x_1)$ ;  $M = -x_0 \cdot f(x_0, x_1)$ , здесь  $f(x_0, x_1)$  – произвольная функция. Подставляя эти выражения в систему (5), получаем множество систем уравнений, в которых параметр  $R$  уже исключен:

$$\frac{dx_0}{dt} = 2x_0 \cdot x_1 \cdot f(x_0, x_1); \quad \frac{dx_1}{dt} = (x_1^2 - x_0^2) \cdot f(x_0, x_1). \quad (7)$$

Выбирая функцию  $f(x_0, x_1)$  в виде  $f(x_0, x_1) = 1/2x_0$ , получаем систему уравнений (4).

В общем случае нет необходимости в наличии особых решений. Достаточно, чтобы в фазовом пространстве изучаемой системы была область, в которой теорема единственности нарушается. Кроме того, важно, чтобы траектория изучаемой системы достаточно часто попадала в эту область фазового пространства.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несколько слов следует сказать о механизме аномального влияния малых периодических возмущений диэлектрической проницаемости среды, в которой происходит излучение нерелятивистских осцилляторов. В среде с такой диэлектрической проницаемостью структура поля содержит медленные виртуальные волны [11]. Именно синхронизм этих медленных виртуальных волн с нерелятивистскими частицами приводит к эффективному излучению высоких номеров гармоник. Кроме того, обратим внимание, что даже для излучения мягкого рентгеновского излучения ( $\lambda \sim 10^{-8}$  см) достаточно энергии всего 10 кэВ. Поэтому большинство реальных электронных потоков содержат частицы, которые могут излучать такие кванты. Эта особенность аномального влияния малых возмущений дала возможность сформулировать концепцию лазеров на свободных нерелятивистских электронах [7]. Аналогичные особенности аномального влияния малых периодических возмущений потенциалов, в которых движутся заряженные частицы, также могут быть использованы как для генерирования коротковолнового излучения, так и для ускорения заряженных частиц.

Важные результаты как для общей теории, так и для приложений, содержатся в Разд.5, в котором было показано, что если мы откажемся от условий единственности решений во всем фазовом пространстве изучаемой динамической системы, то в таких системах могут появиться режимы с хаотическим поведением. Наиболее простыми системами при этом являются системы с одной степенью свободы, которые мы рассмотрели выше. Однако совершенно очевидно, что в системах с большим числом степеней свободы такой механизм возникновения хаотических режимов также будет проявляться. При этом динамика таких систем в реальных и численных экспериментах может демонстрировать неожиданное поведение. Такие случаи нужно иметь в виду, и в большинстве случаев избегать их. Однако эта же особенность может быть целенаправленно использована для построения нового типа динамических систем с хаотическим поведением.

## ABOUT ANOMALOUS INFLUENCE OF SMALL PERTURBATIONS

*V.A. Buts*

A number of new dynamic systems, interesting to the applications is considered, for which presence the small perturbation results in essential change of their dynamics.

## ПРО АНОМАЛЬНИЙ ВПЛИВ МАЛИХ ЗБУРЮВАНЬ

*V.O. Буц*

Розглянуто ряд нових цікавих для використання динамічних систем, для яких наявність малих збурювань приводить до істотної зміни їхньої динаміки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Макс Борн. Возможно ли предсказание в классической механике? // *Успехи физических наук*. 1959, т.69, в.2, с.173-187.
2. А.А. Соколов, И.М. Тернов. *Релятивистский электрон*. Москва: «Наука», 1974, с.392.
3. V.A. Buts. Excitation of the harmonics by the oscillators flux in periodically heterogeneous medium // *Intense Microwave Pulses*. V.31, July-1August 1997, San Diego, California, v.31 158, p.202-208.
4. В.А. Буц. Коротковолновое излучение нерелятивистских заряженных частиц // *Журнал технической физики*. 1999, т.69, в.5, с.132-134.
5. В.А. Буц. «Длинноволновое» излучение заряженных частиц в средах с периодической неоднородностью // *Радиотехника*. 1997, №9, с.9-12.
6. А.Н. Антонов, В.А. Буц, О.Ф. Ковпик, Е.А. Корнилов, В.Г. Свиченский. Возбуждение высоких номеров гармоник нерелятивистскими осцилляторами // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2005, т.10, №4, с.39-44.
7. В.А. Буц, А.М. Егоров. Лазеры на нерелятивистских электронах // *Успехи современной радиотехники*. 2006, №7, с.3-17.
8. В.А. Буц, С.С. Моисеев. Аномальное влияние флуктуаций вблизи критических состояний плазмы // *Журнал технической физики*. 1990, т.60, в.12, с.35-42.
9. V.A. Buts. Two features of dynamics of the charged particles in external magnetic field and in field of electromagnetic wave // *Problems of Atomic Science and Technology. Series «Plasma Physics»*. 2006, №12, p.166-168.
10. V.A. Buts. Dynamics of charged particles in a field of intensive electromagnetic waves // *Problems of Atomic Science and Technology. Series «Nuclear Physics Investigations»* (47), 2006, №3, p.55-59.
11. В.Л. Гинзбург, В.Н. Цытович. Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния // *Успехи физических наук*. 1978, т.126, в.4, с.553-572.

*Статья поступила в редакцию 24.09.2011 г.*