

УДК 622.831:622.537.86

Э.П. Фельдман, Е.А. Винник, Я.И. Грановский, Н.А. Калугина

ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО МАТЕРИАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРЕЩИНЫ

Институт физики горных процессов НАН Украины

Рассматривается влияние трещин, содержащихся в проводящем материале, на электросопротивление материала

Введение

В работе рассматривается электросопротивление проводящего материала, содержащего трещины. Актуальность этой темы состоит в том, что изменение электросопротивления определяется структурой материала. Это особенно важно для горных пород, содержащих угольные пласты, поскольку уголь является электропроводящим материалом, хотя и обладает высоким сопротивлением. Экспериментально обнаружить сопротивление достаточно трудно, поэтому возникает необходимость предварительных теоретических расчетов и оценки изменения сопротивления угля в связи с системой трещин, содержащихся в нем. В работе [1] было исследовано влияние пор на проводящие свойства угля. Пористость угольного вещества, как правило, меньше, чем трещиноватость, что вызывает необходимость оценки относительного влияния пор, с одной стороны, и трещин, с другой стороны, на электросопротивление угля.

Описание модели.

Рассмотрим плоскопараллельную пластину толщиной d (рис. 1). К ее противоположным сторонам приложена разность потенциалов. В пластине имеются трещины, параллельные друг другу.

Расчет производится для трещин, параллельных поверхности. Для трещин, расположенных под наклоном к поверхности, полученный результат умножаем на $\cos^2\alpha$, где α – угол между нормалью к плоскости трещины и нормалью к внешней поверхности.

Для упрощения будем считать, что все трещины имеют одинаковую длину $2l$. Вычисляем изменение сопротивления, обусловленное системой трещин.

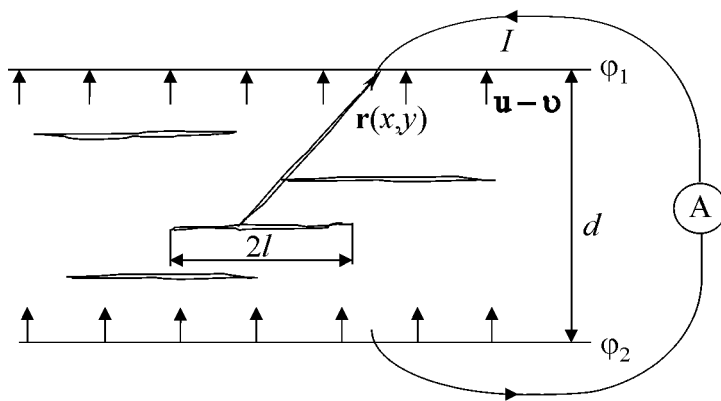


Рис. 1. Схема распределения тока в пластине с трещинами

Измеряемой величиной является ток во внешней цепи – I . По определению электросопротивление равно $R = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{I}$. Вводим усредненную по объему образца плотность тока u в отсутствие трещин. Влияние трещин проявляется в изменении (обычно уменьшении) плотности тока. Измененную плотность тока обозначаем $u-v$, где v – изменение плотности тока, обусловленное трещинами. Относительное изменение сопротивления равно:

$$\frac{R_{u-v} - R_u}{R_u} = \frac{v}{u-v} \approx \frac{\langle v \rangle}{u},$$

где $R_u = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{uS}$ – электросопротивление без трещин; $R_{u-v} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{(u-v)S}$ – электросопротивление с трещинами; $\langle v \rangle$ – усредненная нормальная компонента плотности тока.

Предварительно рассматриваем изменение плотности тока под воздействием одной трещины и производим усреднение результата.

Для решения задачи с уединенной трещиной воспользуемся гидродинамической аналогией между электрическим током и движением жидкости при потенциальном обтекании твердых тел [2] (рис. 2).

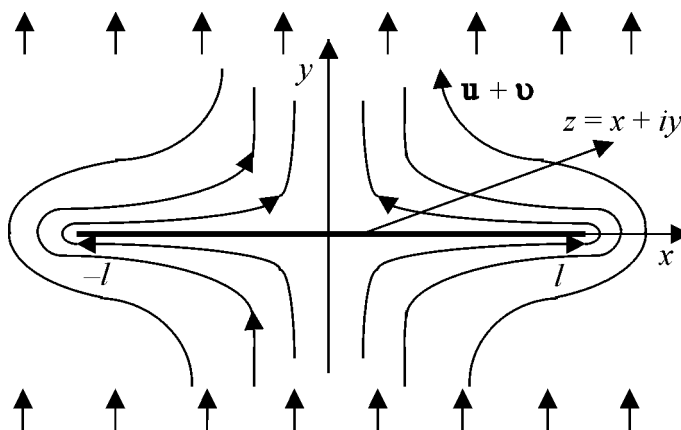


Рис. 2. Схема движения электрического тока вокруг одной трещины

Для плоского течения жидкости вводится комплексная скорость $\Phi(z)$, являющаяся аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$:

$$\Phi(z) = v_x(x, y) + iv_y(x, y),$$

где i – мнимая единица.

Для нахождения $\Phi(z)$ необходимо учесть, что:

- 1) на бесконечности она должна обращаться в нуль;
- 2) на берегах трещины нормальная компонента скорости жидкости $u + v_y(x, 0) = 0$, если $-l < x < l$ (т.е. ток не проникает в трещину).

Соответствующая краевая задача решается с помощью аппарата интегралов типа Коши. В нашем случае решение имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{u}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2} (\xi - z)}. \quad (1)$$

Очевидно, что эта функция на бесконечности обращается в нуль.

На берегах трещины, согласно теореме Сохоцкого-Плёмеля,

$$\Phi(x, \pm 0) = \frac{u}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2} (\xi - x)} \mp \frac{ux}{\sqrt{l^2 - x^2}} = -iu \mp \frac{ux}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (2)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Таким образом, $v_y(x, 0) = -u$, что в сумме с u дает нуль.

Кроме того, находим тангенциальную компоненту плотности тока на границах трещины:

$$v_x(x, 0) = \mp \frac{ux}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \quad (3)$$

Граничные условия выполняются. Формула (1) позволяет найти искомую величину $v_y(x, y)$ (т.е. выражение для вертикальной составляющей плотности тока в интегральном виде):

$$v_y(x, y) = -\frac{u}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + y^2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2}}. \quad (4)$$

Мы нашли изменение скорости жидкости, следовательно, согласно аналогии, изменение плотности тока, обусловленное одной трещиной. Теперь найдем воздействие системы трещин. Для этого введем понятие плотности числа трещин в единице объема материала, которая равна $1/r_c^2$, где r_c – среднее расстояние между центрами трещин.

Среднее изменение плотности тока вычисляется по формуле:

$$\langle v_y \rangle = \frac{1}{r_c^2} \int_{-r_c}^{r_c} dx \int_0^d dy v_y(x, y). \quad (5)$$

Ввиду статистической однородности распределения трещин по угольному пласту, $\langle v_y \rangle$ не зависит от координат x и y . Вычисление соответствующего интеграла приводит к соотношению:

$$\frac{\langle v_y \rangle}{u} = \kappa = \frac{2l}{\pi r_c} \int_{-l}^l \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{r_c}{l}\right)^2}} \operatorname{arctg} \frac{d}{l \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{r_c}{l}\right)^2}}. \quad (6)$$

Асимптотический и численный анализ результатов.

Для получения применяемых на практике оценок влияния трещин на электросопротивление введем трещиноватость $\gamma = \frac{2lh}{r_c^2}$, т.е. отношение объема, занимаемого трещинами, к объему пласта (h – раскрытие трещин).

Рассмотрим ряд частных случаев, представляющих практический интерес.

1. $\frac{r_c}{l} \gg 1$ – малые редкие трещины, тогда $\kappa = \frac{l^2}{r_c^2} \operatorname{arctg} \frac{d}{r_c}$.

В зависимости от толщины пластины имеем 2 варианта:

а) толщина пластины велика по сравнению со средним расстоянием $\frac{d}{r_c} \gg 1$, тогда $\kappa = \frac{\pi}{4} \gamma \frac{l}{h}$;

б) толщина пластины мала по сравнению со средним расстоянием $\frac{d}{r_c} \gg 1$,

тогда $\kappa = \gamma^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d\sqrt{l}}{2h\sqrt{2h}}$.

2. $\frac{r_c}{l} \ll 1$ – большие трещины на малых расстояниях друг от друга, тогда $\kappa = \frac{4l}{\pi r_c} \operatorname{arctg} \frac{d}{l}$.

Если толщина образца велика по сравнению с длиной трещины $\frac{d}{l} \gg 1$, тогда $\kappa = \sqrt{\frac{2\gamma l}{h}}$.

При малой толщине образца $\frac{d}{l} \ll 1$ имеем $\kappa = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\gamma l}{h}} \frac{d}{l}$.

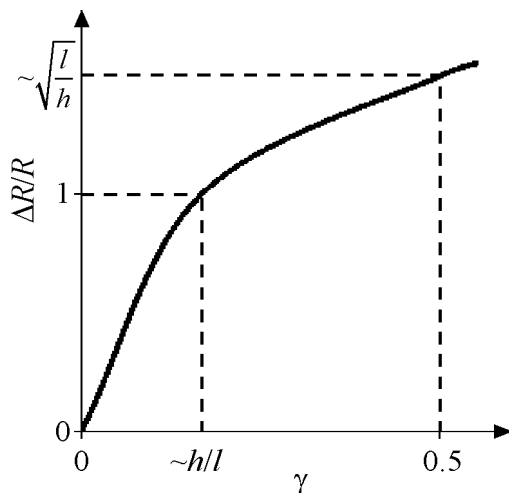


Рис. 3. Изменение сопротивления в зависимости от трещиноватости проводящего материала

На рис. 3 изображена зависимость изменения сопротивления от трещиноватости: в окрестности h/l (при малой трещиноватости) существует линейная зависимость, которая далее переходит в более слабую корневую зависимость.

Выводы

- 1) Изменение сопротивления за счет трещин существенно превосходит сопротивление, обусловленное порами, при одинаковых значениях пористости и трещиноватости.
- 2) При большой плотности трещин линейная зависимость сопротивления от трещиноватости переходит в более слабую корневую зависимость.
- 3) При малой толщине образца возникает нестандартная зависимость электросопротивления от толщины образца.

1. *Фельдман Э.П.* Влияние пористости и размера пор на электросопротивление угля [Текст] / Э.П. Фельдман, Я.И. Грановский, Н.А. Калугина, Е.А. Винник. // *Фізико-технічні проблеми гірничого виробництва: Збірка наукових праць.* – Вип. 13 / Під загальною редакцією А.Д.Алексєєва. – Донецьк: Інститут фізики гірничих процесів НАН України, 2010.
2. *Ландау Л.Д.* Гидродинамика [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // *Теоретическая физика.* – М.: Гостехтеоретиздат, 1953, Т. 4. – 788 с.

Фельдман Е.П., Винник О.О., Грановський Я.Й., Калугіна Н.О.

ЕЛЕКТРООПІР ПРОВІДНОГО МАТЕРІАЛУ, ЩО МІСТИТЬ ТРИЩИНИ

Розглядається вплив тріщин, які містяться в провідному матеріалі, на електроопір матеріалу.

E.P. Feldman, E.A. Vinnik, Y.I. Granovsky, N.O. Kalugina

ELECTRORESISTANCE OF A CONDUCTIVE MATERIAL WITH CRACKS

Influence of cracks in a conductive material on electric resistance of the material is examined.