Физика и техника высоких давлений 2015, том 25, № 3–4

PACS: 02.10.De, 02.40.Hw, 03.30.+p, 45.20.–d

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. II. БАЗИСНЫЕ КВАТЕРНИОНЫ. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины

Статья поступила в редакцию 5 мая 2014 года

Исследованы геометрические характеристики мировой линии (экстремали) и установлены зависимости норм скоростей изменения базисных кватернионов от геометрических параметров траектории движения материальной точки в гиперпространстве. В рамках физической алгебры получены выражения для кватернионов импульса, силы и их моментов; показано, что они определяются касательным кватернионом при его естественной параметризации.

Ключевые слова: кватернион положения, мировая линия, энергия, импульс, сила

Досліджено геометричні характеристики світової лінії (екстремалі) і встановлено залежності норм швидкостей зміни базісних кватерніонів від геометричних параметрів траєкторії руху матеріальної точки в гіперпросторі. У рамках фізичної алгебри отримано вирази для кватерніонів імпульсу, сили та їхніх моментів; показано, що вони визначаються дотичним кватерніоном при його природній параметризації.

Ключові слова: кватерніон положення, світова лінія, енергія, імпульс, сила

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена физическая алгебра, возникающая при совместном применении алгебры гиперкомплексных структур Гамильтона и векторного исчисления Гиббса. В рамках этой алгебры точка в гиперпространстве характеризуется кватернионом положения $r(s)$ ([1], формула (27)), нормой которого в (1 + 3)-пространстве является интервал между событиями s ([1], формула (29)). Если события в гиперпространстве бесконечно близки, то изменение интервала между событиями в инерциальной системе отсчета [2, с. 16] равно норме бесконечно малого изменения кватерниона положенния

$$\mathrm{d}s = \left\|\mathrm{d}r\right\| = \sqrt{\mathrm{d}\tau^2 - \left|\mathrm{d}\mathbf{r}\right|^2} = \mathrm{d}\tau\sqrt{1-u^2}\ , \tag{1}$$

где $\tau = ct/l$, c и l – соответственно предельная скорость и характерное значение длины для рассматриваемой задачи, t – время; $u = v/c$ – безразмерная скорость движения точки, $v = |\mathbf{v}|$ – модуль размерной скорости движения точки в 3-мерном пространстве. Из формулы (1) видно, что изменение интервала между событиями: а) равно промежутку времени, если система координат покоится ($u = 0$) или движется со скоростью, значительно меньшей скорости c ($u \ll 1$); б) принадлежит области вещественных чисел (времениподобная область гиперпространства) тогда, когда скорость движения точки не превышает скорость c ($u < 1$, теорема 2 из [1]); в) равно нулю (кватернион положения гиперточки становится изохронным ($\mathrm{d}s = \left\|\mathrm{d}r\right\| = 0$)), если скорость перемещения точки достигает величины скорости c ($u = 1$); г) становится комплексной величиной (частица переходит в пространственноподобную область гиперпространства), если гиперточка перемещается со скоростью, превышающей скорость c ($u > 1$).

Бесконечно малое изменение евклидова расстояния L в гиперпространстве равно

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}\tau\sqrt{1+u^2}\,, \tag{2}$$

следовательно, величины (1) и (2) связаны между собой соотношением

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}s\sqrt{\frac{1+u^2}{1-u^2}}\,, \tag{3}$$

т.е. интервал между событиями является такой же характеристикой мировой линии, как и ее длина. При малых скоростях движения ($u \ll 1$) евклидово расстояние и интервал между событиями практически неразличимы.

Рассмотрим поведение тройки базисных кватернионов инерциальной системы отсчета, если в качестве естественного параметра мировой линии выбрать интервал между событиями s.

2. Геометрические характеристики мировой линии

Исследуем свойства касательного кватерниона, так как он определяет сопряженные характеристики к кватерниону положения и два других базисных кватерниона гиперпространства. Касательный кватернион $\kappa = \kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}$ определяется нормированным значением бесконечно малого изменения кватерниона положения [1] и имеет вид

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}r}{\left\|\mathrm{d}r\right\|} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + \gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}\,, \tag{4}$$

причем его норма равна единице ($\left\|\kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}\right\|^2 = \kappa_0^2 - |\boldsymbol{\kappa}|^2 = 1$). Гиперструктура $\kappa = \kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}$ лежит в пространстве, касательном к мировой линии, при этом ее скалярная и векторная части задаются формулами

$$\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_0 \mathbf{u} \qquad (5)$$

($\boldsymbol{\kappa}$ – касательный вектор к мировой линии) и определяются безразмерной скоростью движения $\mathbf{u}$ и ее модулем $u = |\mathbf{u}|$. Вектор $\boldsymbol{\kappa}$ будет ортом ($|\boldsymbol{\kappa}| = 1$), если гиперточка будет двигаться по мировой линии со скоростью $u = \sqrt{2}/2$. Изменения времени $\mathrm{d}\tau$ и радиус-вектора $\mathrm{d}\mathbf{r}$ равны

$$\mathrm{d}\tau = \kappa_0 \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa} ds = \kappa_0 \mathbf{u} \mathrm{d}s. \qquad (6)$$

Согласно формулам (8) и (9) работы [1] базисные кватернионы нормали $n = n_0 + \gamma\mathbf{n}$ и бинормали $b = b_0 + \gamma\mathbf{b}$ задаются выражениями

$$n = \frac{K_2}{K_3\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} + \frac{K_1}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} + \frac{K_2}{K_3}\kappa, \qquad (7)$$

$$b = \frac{K_1}{K_3\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} - \frac{K_2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} + \frac{K_1}{K_3}\kappa, \qquad (8)$$

где первая и вторая производные равны $\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\kappa_0}{\mathrm{d}s} + \gamma\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}}{\mathrm{d}s}$ и $\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\kappa_0}{\mathrm{d}s^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\kappa}}{\mathrm{d}s^2}$. В этих равенствах $\frac{\mathrm{d}\kappa_0}{\mathrm{d}s} = \kappa_0^4 uw$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\kappa_0}{\mathrm{d}s}\mathbf{u} + \kappa_0^2\mathbf{w}$, $\frac{\mathrm{d}^2\kappa_0}{\mathrm{d}s^2} = \kappa_0^5\left(4\kappa_0^2u^2w^2 + w^2 + u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau}\right)$, $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\kappa}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\kappa_0}{\mathrm{d}s^2}\mathbf{u} + 3\kappa_0\frac{\mathrm{d}\kappa_0}{\mathrm{d}s}\mathbf{w} + \kappa_0^3\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}\tau}$ ($w = |\mathbf{w}| = \frac{l}{c^2}a$ – безразмерное ускорение, $a = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ – модуль размерного ускорения точки).

Норма кватерниона $\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}$ равна

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right\| = \kappa_0^3 w\sqrt{4u^2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1}, \qquad (9)$$

где ϕ – угол между направлениями скорости и ускорения частицы. Она вещественна при выполнении неравенств совокупности $\left[\begin{array}{l} 2u\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \le -1 \\ 2u\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \ge 1 \end{array}\right.$. В силу ограниченности синуса скорость перемещения частицы должна принадлежать интервалу [0.5; 1]. В этом случае подкоренное выражение (45) неотрицательно, а тригонометрическая функция $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ принимает значения из интервалов

$\left[-1;-\dfrac{1}{2u}\right]$ или $\left[\dfrac{1}{2u};1\right]$. При малых скоростях движения частицы ($0 \le u < 0.5$) норма $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right\|$ является мнимой величиной.

Для исследования геометрии мировой линии предположим, что базисные кватернионы $\kappa = \kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}$, $n = n_0 + \gamma\mathbf{n}$ и $b = b_0 + \gamma\mathbf{b}$ с единичными нормами ($\|\kappa\| = \|n\| = \|b\| = 1$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида (1) из [1]. Тогда квадраты норм естественных скоростей изменения кватернионов равны

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right\|^2 = \omega_{10}^2 - \omega_1^2 \\ \left\|\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\right\|^2 = \omega_{20}^2 - \omega_2^2\,, \\ \left\|\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\right\|^2 = \omega_{30}^2 - \omega_3^2 \end{cases} \tag{10}$$

где частоты собственных колебаний ω_{i0} кватернионов $\kappa = \kappa_0 + \gamma\boldsymbol{\kappa}$, $n = n_0 + \gamma\mathbf{n}$ и $b = b_0 + \gamma\mathbf{b}$ и частоты колебаний фазовых множителей ω_i равны

$$\begin{aligned} &\omega_{10}^2 = K_1^2 + K_2^2\,, \quad \omega_1^2 = z_1 \mathrm{Sc}(nb^*)\,, \\ &\omega_{20}^2 = K_1^2 + K_3^2\,, \quad \omega_2^2 = z_2 \mathrm{Sc}(b\kappa^*)\,, \\ &\omega_{30}^2 = K_2^2 + K_3^2\,, \quad \omega_3^2 = z_3 \mathrm{Sc}(\kappa n^*)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

величины z_i –

$$\begin{cases} z_1 = 2K_1K_2 = \sqrt{\omega_{10}^4 - \left(\omega_{20}^2 - \omega_{30}^2\right)^2} \\ z_2 = 2K_1K_3 = \sqrt{\omega_{20}^4 - \left(\omega_{30}^2 - \omega_{10}^2\right)^2}\,, \\ z_3 = 2K_2K_3 = \sqrt{\omega_{30}^4 - \left(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2\right)^2} \end{cases} \tag{12}$$

а фазовые множители – $\mathrm{Sc}(nb^*) = n_0b_0 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}$, $\mathrm{Sc}(b\kappa^*) = b_0\kappa_0 - \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}$, $\mathrm{Sc}(\kappa n^*) = \kappa_0 n_0 - \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{n}$.

Из формул (10)–(12) следует, что вид мировой линии и процесс движения по ней определяют: 1) собственные частоты колебаний базисных кватернионов ω_{i0} и характеристики z_i, которые связаны с кривизной и кручениями пространства–времени; 2) фазовые множители (например, $\mathrm{Sc}(nb^*) = 0.5(nb^* + (nb^*)^*)$), обнуление которых приводит к тому, что нормы естественных скоростей изменения базисных кватернионов равны своим собственным частотам. Из формулы (12) следует, что аналогичная картина наблюдается и тогда, когда обнуляется один из геометрических факторов K_i (две из трех характеристик z_i обращаются в нуль).

Таким образом, физико-геометрические свойства мировой линии существенно зависят от изменения потенциального рельефа, по которому происходит движение материальных точек. Поэтому исследуем механику материальной точки в гиперкомплексном пространстве с учетом указанных особенностей их траекторий движения.

3. Механика материальной точки

а) *Поступательное движение*. Размерную скорость движения материальной точки (например, атома какого-либо вещества) в гиперпространстве вычислим по формуле (с учетом (5))

$$V = c\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2}} + \gamma\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-u^2}} = c\kappa_0(1+\gamma\mathbf{u}) = c\kappa\,, \tag{13}$$

а ее кватернион энергии-импульса (частица имеет массу покоя m_0) –

$$P = m_0 V = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-u^2}} + \gamma\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{E}{c} + \gamma\mathbf{P} = m_0 c\kappa = P_0\kappa\,, \tag{14}$$

где $E = mc^2$ – энергия, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ – импульс атома, а $P_0 = \frac{E_0}{c} = m_0 c$ – его импульс в состоянии покоя,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \tag{15}$$

– масса движущейся частицы. Норма кватерниона (14) равна

$$\|P\|^2 = PP^* = P^*P = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{P}|^2 = P_0^2\|\kappa\|^2 = P_0^2 = \frac{E_0^2}{c^2}\,. \tag{16}$$

При малых скоростях движения ($u << 1$, $m \approx m_0\left(1+\frac{1}{2}u^2\right)$) энергия атома равна

$$E = mc^2 \approx E_0 + \frac{m_0 v^2}{2} = E_0 + K\,, \tag{17}$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия частицы в неподвижной системе отсчета, $K = \frac{m_0 v^2}{2}$ – кинетическая энергия атома. Отметим, что формулы (1), (15)–(17) совпадают с соответствующими формулами специальной теории относительности [2]. Разделив выражение (14) на импульс в состоянии покоя $P_0 = \frac{E_0}{c} = m_0 c$, получим касательный кватернион κ, который запишем в физическом представлении

$$P = \frac{P}{P_0}\kappa = \frac{E}{E_0} + \gamma\frac{\mathbf{P}}{m_0 c} = \varepsilon + \gamma\mathbf{p}\,, \tag{18}$$

где безразмерные величины энергии $\varepsilon = \kappa_0$ и импульса $\mathbf{p} = \kappa_0\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}$. Последнее равенство показывает, что импульс частицы определяет поток энергии.

Определим механический момент импульса частицы кватернионом $L = L_0 + \gamma\mathbf{L}$, причем векторная часть $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Из кватернионов положения (формула (27) работы [1]) и импульса (18) (с учетом формулы (19) работы [1] и равенства $[A, B^*] = -[A, B]$) можно создать две гиперкомплексные структуры механического момента импульса, при этом их скалярные части будут прямо пропорциональны фазам плоских волн, первая из которых распространяется в противоположном направлении по отношению к радиус-вектору $\mathbf{r}$, а вторая – вдоль его направления. Эти кватернионы имеют вид:

1) с фазовой скоростью волны, противоположно направленной к вектору $\mathbf{r}$,

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(rP + r^*P^*\right)^* = \mathrm{Sc}\left(rP\right) - \frac{1}{2}\left[r, P\right] = \varepsilon\tau + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \gamma\left[\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right]; \tag{19}$$

2) с фазовой скоростью волны, сонаправленной с вектором $\mathbf{r}$,

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(rP^* + r^*P\right) = \mathrm{Sc}\left(rP^*\right) + \frac{1}{2}\left[r, P^*\right] = \varepsilon\tau - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \gamma\left[\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right]. \tag{20}$$

Разница кватернионов (19) и (20) равна

$$\Delta L_{12} = L_1 - L_2 = 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\,. \tag{21}$$

Обозначим через φ угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и импульсом частицы $\mathbf{p}$. Если этот угол принадлежит промежутку от $0 + 2\pi n$ (n – целое число, $\mathbf{r} \uparrow\uparrow \mathbf{p}$, $\mathbf{L} = 0$) до $\pi + 2\pi n$ ($\mathbf{r} \uparrow\downarrow \mathbf{p}$, $\mathbf{L} = 0$), то изменение кватернионного момента импульса ΔL_{12} принимает непрерывный ряд значений от $2|\mathbf{p}||\mathbf{r}|$ до $-2|\mathbf{p}||\mathbf{r}|$, а параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, характеризуется положительной площадью ($|\mathbf{L}| = |\mathbf{p}||\mathbf{r}|\sin\varphi$, $\sin\varphi \ge 0$). Дальнейшее увеличение угла φ от $\pi + 2\pi n$ до $2\pi + 2\pi n$ порождает обратный переход значений ΔL_{12} от $-2|\mathbf{p}||\mathbf{r}|$ до $2|\mathbf{p}||\mathbf{r}|$, но площадь указанного параллелограмма будет отрицательной ($\sin\varphi \le 0$), что указывает на существование запрещенных значений кватернионов (19) и (20). Таким образом, критический угол, при котором выражения (19) и (20) теряют физический смысл, равен $\varphi_c = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Для этого значения угла φ векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ коллинеарные и противоположно направленные, а механический момент импульса $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}] = 0$. При значениях угла φ, равных $2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)$ ($|\mathbf{L}| = |\mathbf{p}||\mathbf{r}| = \max$), векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ перпендикулярны друг к другу, а кватернионы (19) и (20) равны между собой.

Сила F, действующая на частицу в гиперпространстве, равна

$$F = \frac{c}{l}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}E}{c\mathrm{d}t\sqrt{1-u^2}} + \gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t\sqrt{1-u^2}} = \frac{\mathrm{d}E}{c\mathrm{d}t_0} + \gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t_0} = F_0 + \gamma\mathbf{F}, \qquad (22)$$

здесь $\mathrm{d}t_0 = \mathrm{d}t\sqrt{1-u^2}$ – временной промежуток в покоящейся системе отсчета. В консервативной системе (отсутствует скалярная сила $F_0 = 0$, ответственная за диссипацию энергии, т.е. механическая энергия сохраняется) действует только векторная сила, поэтому $F = \gamma\mathbf{F}$. При малых скоростях движения ($u << 1$, $m \approx m_0$, $\mathbf{p} \approx m_0\mathbf{v}$) вектор $\mathbf{F}$ принимает вид силы в теории Ньютона [4] $\mathbf{F} \approx \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m_0\mathbf{a}$. Обращение силы $\mathbf{F}$ в нуль приводит к сохранению импульса частицы $\mathbf{P}$.

Момент силы, действующей на гиперточку, задается производной по интервалу между событиями от кватернионного момента импульса $L = L_0 + \gamma\mathbf{L}$:

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}s} + \gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}s} = M_0 + \gamma\mathbf{M}, \qquad (23)$$

где векторный момент силы $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$, а сила $\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}s}$. Если скалярная часть кватерниона (23) равна нулю, то в процессе движения материальной точки в гиперпространстве сохраняется величина $L_{01} = \varepsilon\tau + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$ или $L_{02} = \varepsilon\tau - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$. При обращении в нуль векторной составляющей кватерниона момента силы ($\mathbf{M} = 0$) сохраняется механический момент импульса $\mathbf{L}$ частицы.

Рассмотрим случай, когда кватернионный момент импульса определен однозначно (угол φ между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и импульсом частицы $\mathbf{p}$ равен $\varphi_0 = 2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)$, а механический момент импульса достигает максимального значения $|\mathbf{L}| = |\mathbf{p}||\mathbf{r}| = \max$) и задается формулой

$$L = \varepsilon\tau + \gamma[\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \qquad (24)$$

т.е. при вращательном движении. Совпадение состояний, которые описываются формулами (19) и (20), указывает на вырожденность движения частицы с механическим моментом (24). Любое бесконечно малое отклонение угла φ от критического значения $\varphi_0 = 2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)$ переводит частицу в одно из состояний (19) или (20). Кроме того, согласно гипотезе де Бройля [3] о корпускулярно-волновом дуализме материальных объектов можно записать ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – постоянная Планка), что

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}, \qquad (25)$$

т.е. любому материальному объекту можно поставить в соответствие волну с определенной частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Покажем, что равенства

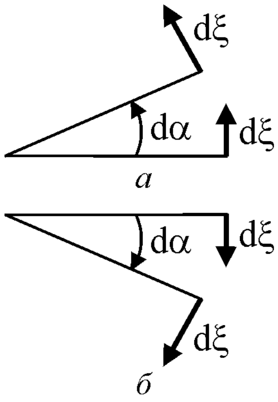

Рис. Левый (*а*) и правый (*б*) углы

(25) возникают в случае пропорциональности изменений кватернионов положения (см. формулу (27) работы [1]) и вращения.

б) *Вращение*. Для описания угловых характеристик вращательного движения введем в рассмотрение ориентированный угол (см. рис.) с помощью кватерниона вращения

$$\Phi = \alpha + \gamma \xi , \tag{26}$$

где α определяет величину угла, а ξ – вектор-ориентир угла. Вычислим размерную производную по интервалу между событиями от выражения (26) (скорость вращения) в покоящейся системе отсчета:

$$\Omega = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{c\mathrm{d}t_0} + \gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{c\mathrm{d}t_0} = \frac{\omega}{c} + \gamma \mathbf{k} , \tag{27}$$

здесь ω – циклическая частота вращения, $\mathbf{k}$ – волновой вектор ($\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t_0} = c\mathbf{k}$ – угловая скорость). Если кватернионы (14) и (27) пропорциональны, то выполняются равенства (25):

$$P = \hbar\Omega . \tag{28}$$

Вращательные моменты скорости частицы равны

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{l}{2}\left(r\Omega + r^*\Omega^*\right)^* = \omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \gamma[\mathbf{r}\times\mathbf{k}], \\ \Psi_2 &= \frac{l}{2}\left(r\Omega^* + r^*\Omega\right) = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \gamma[\mathbf{r}\times\mathbf{k}], \end{aligned} \tag{29}$$

следовательно, механический и вращательный моменты связаны между собой равенством

$$L_i = \hbar\Psi_i \ \ (i = 1, 2) . \tag{30}$$

Формулы (28) и (30) показывают, что гипотезе де Бройля [3] соответствует пропорциональность бесконечно малых изменений кватернионов положения (см. формулу (27) работы [1]) и вращения (26), которые связаны между собой соотношением

$$\mathrm{d}r = a\mathrm{d}\Phi , \tag{31}$$

где $a = \frac{\hbar}{m_0 c l}$ – безразмерный коэффициент пропорциональности. Из равенства (31) следует, что бесконечно малые изменения времени и радиус-вектора точки на мировой линии задаются равенствами

$$c\mathrm{d}t_0 = al\mathrm{d}\alpha , \quad \mathrm{d}\mathbf{r} = al\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} . \tag{32}$$

Из формул (32) находим, что безразмерная скорость движения материальной точки

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{c\mathrm{d}t_0} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{33}$$

Из равенства (33) получим следующие соотношения:

$$\text{а) } \frac{\mathrm{d}\alpha}{c\mathrm{d}t_0}\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\xi}{c\mathrm{d}t_0} \text{ или } \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v} = \mathbf{k}\text{, т.е. } \mathbf{v} \parallel \mathbf{k};$$

$$\text{б) } \mathbf{v}\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t_0}\mathrm{d}\mathbf{r} = \omega\mathrm{d}\mathbf{r}\text{, т.е. } \mathbf{v} \parallel \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Скалярное произведение полученных соотношений а) и б) приводит к выражению $u^2\mathrm{d}\alpha = \mathbf{k}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, интегрирование которого по любой замкнутой траектории движения порождает неравенство ($u^2 = \le 1$, n – целое число полных оборотов)

$$\oint \mathbf{k}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint u^2\mathrm{d}\alpha \le \oint \mathrm{d}\alpha = 2\pi n. \tag{34}$$

При вращении по окружности линейная скорость представляется в виде суммы нормальной $\mathbf{v}_n$ и тангенциальной $\mathbf{v}_\tau$ составляющих: $\begin{cases}\mathbf{v}_n = \mathbf{v}\cos\alpha \\ \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}\sin\alpha\end{cases}$.

Для малых углов $\mathrm{d}\alpha$ эти скорости равны $\begin{cases}\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_\tau \approx \mathbf{v}\mathrm{d}\alpha\end{cases}$. В пространстве скоростей эти формулы описывают движение по спирали (самоподобной линии [5, с. 16]) к полюсу полярной системы координат или от него в зависимости от направления скорости **v**. Таким образом, пропорциональность кватернионов положения и вращения не только отображает корпускулярно-волновой дуализм частиц, но и указывает на спиральный тип движения частицы в пространстве скоростей.

Механическое поведение систем с большим числом частиц существенно отличается от перемещений одиночных атомов. Поэтому для описания их эволюции в следующей работе будет развит кватернионный дифференциальный анализ.

4. Заключение

Естественная параметризация кватерниона положения материальной точки в гиперпространстве позволяет ввести в рассмотрение базисные кватернионы, причем их векторные части соответствуют базисной тройке векторов Серре–Френе. При малых скоростях движения точки по мировой линии норма скорости изменения касательного кватерниона имеет комплексный характер. Это указывает на то, что частота собственных осцилляций касательного кватерниона не превышает частоту колебаний связанных с ним кватернионов нормали и бинормали.

Физические характеристики материальной точки (скорость, импульс, момент импульса, сила и момент силы) определяются касательным кватернионом и его производными по интервалу между событиями. Неоднозначность в определении момента импульса указывает на существование двух состояний, для которых радиус-вектор и импульс частицы являются коллинеарными, при этом их направления совпадают или противоположны. Превышение углом между радиус-вектором и импульсом частицы значения развернутого угла приводит к отрицательному значению модуля векторной части кватерниона момента импульса. Для описания непрямолинейного движения вводится кватернион вращения, пропорциональность которого кватерниону положения отвечает введению гипотезы де Бройля. Таким образом, физический изоморфизм алгебры Гамильтона верно отображает поведение реальных объектов. В заключение отметим, что для изучения поведения достаточно большого числа частиц, суммарное поведение которых приводит к возникновению среды в том или ином агрегатном состоянии, требуется развитие гиперкомплексного дифференциального исчисления.

1. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 1–2, 5 (2015).
2. *Л.Д. Ландау*, *Е.М. Лифшиц*, Теоретическая физика, Т. II. Теория поля, Наука, Москва (1973).
3. *А. Гааз*, Волны материи и квантовая механика, Либроком, Москва (2010).
4. *Я.Л. Геронимус*, Теоретическая механика (очерки об основных положениях), Наука, Москва (1973).
5. *С.В. Терехов*, Фракталы и физика подобия, Цифровая типография, Донецк (2011).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF HYPERSPACE. II. BASIC QUATERNIONS. MECHANICA OF A MATERIAL POINT

The geometrical characteristics of the world line (extremals) are investigational and the relations of the norms of rate-of-change of the base quaternions and the geometrical parameters of the trajectory of a motion of a material point in hyperspace are set. Within the framework of physical algebra, expressions are got for the quaternions of impulse, force and their moments; it is shown that they are determined by a tangent quaternion during its natural parametrization.

Keywords: quaternion of position, world line, energy, impulse, force

Fig. Left (*а*) and right (*б*) corners