Металлофиз. новейшие технол. / Metallofiz. Noveishie Tekhnol.
2014, т. 36, № 8, сс. 1023–1033
Оттиски доступны непосредственно от издателя
Фотокопирование разрешено только
в соответствии с лицензией

PACS numbers: 62.23.St, 75.30.Ds, 75.40.Gb, 75.50.Tt, 75.75.Jn, 75.90.+w

Спінові коливання у феромагнетній нанооболонці типу «нанорис»

Ю. І. Горобець, В. В. Куліш[*]

Інститут магнетизму НАН та МОН України,
бульв. Акад. Вернадського, 36-б,
03680, МСП, Київ-142, Україна
[*]*Національний технічний університет України «КПІ»,*
просп. Перемоги, 37,
03056 Київ, Україна

Теоретично досліджуються дипольно-обмінні спінові коливання в композитній наночастинці типу «нанорис» (витягнутий еліпсоїд обертання). Розглядається нанорис з немагнетним ядром та оболонкою з одноосьового феромагнетику, що має локальний тип «легка вісь». Спінова динаміка в такій системі описується лінеаризованим рівнянням Ландау–Ліфшиця (у магнетостатичному наближенні) з доданками, що враховують магнетну диполь-дипольну взаємодію, обмінну взаємодію та ефекти анізотропії. Після виключення намагнетованости з рівняння Ландау–Ліфшиця одержано рівняння для магнетного потенціялу описаних вище спінових коливань. Для випадку тонкої оболонки з відношенням півосей еліпсоїда, близьким до одиниці, одержано також дисперсійне співвідношення для таких спінових коливань.

Теоретически исследуются дипольно-обменные спиновые колебания в композитной наночастице типа «нанорис» (вытянутый эллипсоид вращения). Рассматривается нанорис с немагнитным ядром и оболочкой из одноосного ферромагнетика, имеющего локальный тип «лёгкая ось». Спиновая динамика в такой системе описывается линеаризованным уравнением Ландау–Лифшица (в магнитостатическом приближении) со слагаемыми, учитывающими магнитное диполь-дипольное взаимодействие, обменное взаимодействие и эффекты анизотропии. После исключения намагниченности из уравнения Ландау–Лифшица получено уравнение для магнитного потенциала описанных выше спиновых колебаний. Для случая тонкой оболочки с отношением полуосей эллипсоида, близким к единице, получено также дисперсионное соотношение для таких спиновых колебаний.

Dipole–exchange spin excitations in composite ‘nanorice’-type nanoparticle (as oblate spheroid) are theoretically investigated. A nanorice with a nonmagnetic core and a shell composed of a uniaxial ferromagnet with the local 'easy axis' type is considered; dissipation effects are neglected. Spin dynamics in the above-mentioned nanosystem is described by the linearized Landau–Lifshitz equation (within the magnetostatic approximation) with the addends, which allow for the magnetic dipole–dipole interaction, the exchange interaction, and the anisotropy effects. Considering the system symmetry, a prolate spheroidal co-ordinate system is used. After using one of the Maxwell equations, magnetization in the Landau–Lifshitz equation is eliminated, and an equation for the magnetic potential of the above-mentioned spin excitations is obtained. A solution for the above-mentioned equation is proposed in the form of a combination of the generalized spheroidal functions; this combination cannot be considered as the solution of the equation in general case, however, it can be considered as an approximate solution for the case of a thin shell with the internal ellipsoid semi-axes ratio close to one. For the above-described case, a dispersion relation for such spin excitations is also found.

Ключові слова: композитна наноструктура, нанорис, спінове збудження, дипольно-обмінна теорія.

(Отримано 7 липня 2014 р.)

1. ВСТУП

Спінові хвилі, тобто хвилі намагнетованости у магнетовпорядкованих матеріялах [1, 2], активно досліджуються у останні десятиріччя — як теоретично, так і експериментально. Спінові хвилі є об'єктом дослідження для нових галузей фізики — магноніки [2] та спінтроніки [3] — та є перспективними для численних практичних застосувань, зокрема, для створення нових пристроїв зберігання, передачі та обробки даних [4, 5].

Особливо актуальним та перспективним з точки зору практичних застосувань є дослідження спінових коливань у наноструктурах. Відомо, що магнетні властивості наноструктур залежать суттєво від їх форми та розмірів, тому спінові хвилі досліджуються у наносистемах різних конфіґурацій окремо. Так, у останні роки досліджуються спінові хвилі у тонких феромагнетних плівках [6], мікроннорозмірних магнетних квантових точках [7–9], нанодротах [10–12] та інших наноструктурах.

У останні роки дослідники наноструктур приділяють особливу увагу композитним наноструктурам. Композитні наноструктури характеризуються низкою унікальних властивостей, не притаманних суцільним наноструктурам. Відомо, що при дослідженні композитних наноструктур — як теоретичному, так і експериментальному — увага приділяється, перш за все, наноструктурам зі сферичною та циліндричною симетрією, а також багатошаровим плівкам. Такі наноструктури, як нанорис (композитні наночастинки у формі еліпсоїду обертання, що складаються з ядра з одного матеріялу та оболонки з іншого [13]) залишаються відносно малодослідженими. Проте, такі наносистеми проявляють унікальні властивості, що не спостерігаються у наночастинок з більшим ступенем симетрії. До останнього часу синтезувались немагнетні наночастинки такого типу, їх дослідження обмежувалось переважно оптичними властивостями, зокрема пов'язаними з плазмонним резонансом [13]. Проте, у останні роки були синтезовані також магнетні наночастинки такого типу, зокрема нанорис з немагнетним ядром та феромагнетним покриттям [14–16]. Цей факт робить дослідження магнетних властивостей нанорису, зокрема спінових збуджень у таких наночастинках, актуальним.

Дана робота присвячена теоретичному дослідженню дипольно-обмінних спінових коливань в оболонці композитної наночастинки типу «нанорис» (витягнутий еліпсоїд обертання). Наночастинка, що досліджується, складається з немагнетного ядра та оболонки з одноосьового феромагнетику. Для описаних вище спінових коливань одержано рівняння для магнетного потенціялу у магнетостатичному наближенні з урахуванням магнетної диполь-дипольної взаємодії, обмінної взаємодії та ефектів анізотропії. Рівняння розв'язано наближено для випадку нанорису з тонкою оболонкою, відношення півосей внутрішньої межі якої близьке до одиниці. Одержано дисперсійне співвідношення для такого випадку.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо нанооболонку у формі витягнутого еліпсоїду обертання, що складається з немагнетного ядра (еліпсоїд обертання з півосями $R_{\parallel}^{(1)}$ та $R_{\perp}^{(1)}$) та феромагнетної оболонки (зовнішня границя якої є еліпсоїдом обертання з півосями $R_{\parallel}^{(2)}$ та $R_{\perp}^{(2)}$).

Введемо сфероїдальну систему координат (ξ, η, φ) (див. Додаток). Вважатимемо, що феромагнетик, з якого складається оболонка, має локально тип «легка вісь», так що рівноважна намагнетованість $\mathbf{M}_0$ всюди у оболонці спрямована уздовж осі ξ (криволінійність якої у межах оболонки вважаємо несуттєвою) та постійна за модулем. Будемо також вважати, що феромагнетик характеризується наступними параметрами: константа обмінної енергії α, константа одновісної анізотропії β (вважається постійною), гіромагнетне відношення γ (вважається постійним). Згасання для спінових хвиль у оболонці вважаємо несуттєвим, нехтуючи релаксаційним доданком у рівнянні Ландау–Ліфшиця.

Нехай в описаній вище феромагнетній оболонці розповсюджуються спінові коливання (стоячі хвилі) з малими збуреннями намагнетованости $\mathbf{M}$ та, відповідно, внутрішнього магнетного поля $\mathbf{H}^{(i)}$. Таким чином, для збурення $\mathbf{m}$ густини магнетного моменту виконується $|\mathbf{m}| << |\mathbf{M}_0|$, для збурення $\mathbf{h}$ магнетного поля — $|\mathbf{h}| << |\mathbf{H}_0^{(i)}|$, де

$\mathbf{H}_0^{(i)}$ — рівноважне значення внутрішнього магнетного поля.

Задача даної роботи полягає у знаходженні диференційного рівняння для магнетного потенціялу, а також дисперсійного співвідношення для описаних вище спінових коливань.

3. БАЗОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Оскільки ми вважаємо відхили намагнетованости **m** та магнетного поля всередині феромагнетику **h** від їх рівноважних значень малими, для опису спінових коливань у системі, описаної у попередньому розділі, ми можемо використати лінеаризоване рівняння Ландау–Ліфшиця без релаксаційного доданку. Таке рівняння має наступний вигляд [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma [\mathbf{M}_0 \times (\mathbf{h} + \alpha \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i^2} + \beta \mathbf{n}(\mathbf{mn}) - M_0^{-2}(\mathbf{M}_0 \mathbf{H}_0^{(i)} + \beta (\mathbf{M}_0 \mathbf{n})^2)\mathbf{m})]; \quad (1)$$

тут **n** — одиничний вектор у напрямку осі анізотропії системи.

Нехай нанооболонка, яку ми розглядаємо, обмежено двома еліпсоїдами обертання $\xi = \xi_1$ та $\xi = \xi_2$, так що півосі внутрішньої межі оболонки дорівнюють

$$R_{\parallel}^{(1)} = a\xi_1, \quad R_{\perp}^{(1)} = a\sqrt{\xi_1^2 - 1}, \quad (2)$$

а зовнішньої —

$$R_{\parallel}^{(2)} = a\xi_2, \quad R_{\perp}^{(2)} = a\sqrt{\xi_2^2 - 1}. \quad (3)$$

Згідно з обраною моделлю, рівноважна намагнетованість $\mathbf{M}_0$ спрямована всюди уздовж орту $\mathbf{e}_\xi$ та, відповідно, уздовж напрямку **n**. При відсутності зовнішнього поля рівноважне магнетне поле всередині феромагнетної оболонки буде також спрямовано уздовж цього напрямку: $-4\pi\hat{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0 = \mathbf{H}_0^{(i)} \parallel \mathbf{e}_\xi$; тут $\hat{\mathbf{N}}$ — тензор знемагнетувальних коефіцієнтів. За цієї умови підставимо у рівняння (1) величини **m** та **h** у вигляді періодичних за часом коливань:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0(\xi, \eta, \varphi) \exp(i\omega t), \quad \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_0(\xi, \eta, \varphi) \exp(i\omega t). \quad (4)$$

Зважаючи на те, що $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0^{(i)} \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{m}_0 \perp \mathbf{e}_\xi$, ми одержимо:

$$i\omega \mathbf{m}_0 = \gamma [M_0 \mathbf{e}_\xi \times (\mathbf{h}_0 + \alpha \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{m}_0}{\partial x_i^2} - (\beta + H_0^{(i)}/M_0)\, \mathbf{m}_0)]. \quad (5)$$

Для виключення збурення намагнетованости з рівняння Ландау–Ліфшиця ми маємо доповнити його ще одним співвідношенням між величинами **m** та **h**. Для цього використаємо магнетостатичне наближення [1], вважаючи поле **h** потенціяльним: $\mathbf{h} = -\nabla\Phi$, $\mathbf{h}_0 = -\nabla\Phi_0$, де Φ — магнетний потенціял поля **h**, Φ_0 — потенціял амплітуди цього поля $\mathbf{h}_0$, так що $\Phi = \Phi_0(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$. З Максвеллового рівняння $\mathrm{div}(\mathbf{h}) = -4\pi\mathrm{div}(\mathbf{m})$ одержуємо шукане співвідношення

$$\mathrm{div}(\mathbf{m}) = \Delta\Phi/(4\pi). \qquad (6)$$

Використовуючи систему рівнянь (5) та (6), знайдемо рівняння для магнетного потенціялу Φ_0, а також дисперсійне рівняння для спінових хвиль, яких ми розглядаємо.

4. РІВНЯННЯ ДЛЯ МАГНЕТНОГО ПОТЕНЦІЯЛУ

Одержимо рівняння для магнетного потенціялу Φ_0 спінової хвилі, виключивши з системи (5), (6) збурення густини намагнетованости $\mathbf{m}_0$. Записавши систему (5), (6) у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{i\omega}{\gamma M_0}\mathbf{m}_0 = [\mathbf{e}_\xi \times (-\nabla\Phi_0 + \alpha\Delta\mathbf{m}_0 - (\beta + H_0^{(i)}/M_0)\mathbf{m}_0)], \\ \mathrm{div}(\mathbf{m}_0) = \Delta\Phi_0/(4\pi), \end{cases} \qquad (7)$$

векторно помножимо перше рівняння системи зліва на орт $\mathbf{e}_\xi$. Ми одержимо

$$-\frac{i\omega}{\gamma M_0}[\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{m}_0] = -\nabla\Phi_0 + \alpha\Delta\mathbf{m}_0 - \left(\beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0}\right)\mathbf{m}_0 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\mathbf{e}_\xi. \quad (8)$$

Візьмемо диверґенцію від обох частин рівняння. Підставляючи $\mathrm{div}(\mathbf{m}_0)$ з другого рівняння системи (7), маємо

$$\begin{gathered} -\frac{i\omega}{\gamma M_0}\mathrm{div}([\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{m}_0]) = -\Delta\Phi_0 + \frac{4}{a^2(\xi^2 - \eta^2)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\xi^2 - 1)\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right) + \\ +(\alpha\Delta - [\beta + H_0^{(i)}/M_0])\Delta\Phi_0/(4\pi). \end{gathered} \qquad (9)$$

Тепер застосуємо до обох частин рівняння (9) оператор $\alpha\Delta - (\beta + H_0^{(i)}/M_0)$. Після перетворень шукане диференційне рівняння для магнетного потенціялу запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{gathered} \left(\omega^2/(\gamma^2 M_0^2) - \left(\beta - \alpha\Delta + H_0^{(i)}/M_0\right)\left(\beta + 4\pi - \alpha\Delta + H_0^{(i)}/M_0\right)\right)\Delta\Phi_0 + \\ +4\pi\left(\beta - \alpha\Delta + H_0^{(i)}/M_0\right)\frac{4}{a^2(\xi^2 - \eta^2)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\xi^2 - 1)\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right) = 0. \end{gathered} \qquad (10)$$

Таким чином, ми одержали рівняння для магнетного потенціялу спінового коливання у феромагнетній оболонці, яку ми розглядаємо. Використаємо це рівняння для знаходження дисперсійного співвідношення такого спінового коливання.

5. ДИСПЕРСІЙНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ

При дослідженні спінових хвиль у циліндричній нанотрубці або нанодроті розв'язок аналогічного до (10) рівняння шукається у вигляді лінійної комбінації циліндричних функцій. Як ми побачимо, використати повністю аналогічний підхід, шукаючи розв'язок (10) у вигляді комбінації сфероїдальних функцій, в загальному випадку не можна. Проте, це можливо зробити наближено за деяких умов.

Отже, запишемо розв'язок рівняння (10) у вигляді комбінації сфероїдальних функцій:

$$\Phi_0(\xi,\eta,\varphi) = R(\xi)S(\eta)\exp(\pm im\varphi), \tag{11}$$

тут λ — константа розділення змінних. Такий вигляд Φ_0 задовольняє Гельмгольцовому рівнянню:

$$\Delta\Phi_0 = -k^2\Phi_0. \tag{12}$$

Оскільки мета даного дослідження — знайти параметер, який має сенс хвильового числа, перенормуємо функції R та S наступним чином: $R(\xi) = R_1(ka\xi)$, $S(\eta) = S_1(ka\eta)$, так що

$$\Phi_0(\xi,\eta,\varphi) = R_1(ka\xi)S_1(ka\eta)\exp(\pm im\varphi), \tag{13}$$

а функції R_1 та S_1 задовольняють рівнянням:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left((\xi^2-1)\dfrac{dR_1}{d\xi}\right) + \left(-\dfrac{\lambda}{(ka)^2} + (\xi^2-1) - \dfrac{1}{(ka)^2}\dfrac{m^2}{\xi^2-1}\right)R_1 = 0, \\ \dfrac{d}{d\eta}\left((1-\eta^2)\dfrac{dS_1}{d\eta}\right) + \left(\dfrac{\lambda}{(ka)^2} + (1-\eta^2) - \dfrac{1}{(ka)^2}\dfrac{m^2}{1-\eta^2}\right)S_1 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Підстановка розв'язку (13) у рівняння (10) трансформує його наступним чином:

$$-\left(\omega^2/(\gamma^2M_0^2) - \left(\beta + \alpha k^2 + H_0^{(i)}/M_0\right)\left(\beta + 4\pi + \alpha k^2 + H_0^{(i)}/M_0\right)\right)k^2\Phi_0 + \tag{15}$$

$$+4\pi\left(\beta - \alpha\Delta + H_0^{(i)}/M_0\right)\frac{4}{a^2(\xi^2-\eta^2)}[\lambda - (ka)^2(\xi^2-1) + m^2/(\xi^2-1)]\Phi_0 = 0.$$

Як ми бачимо, функції вигляду (13) не є розв'язком (10), оскільки одержане рівняння (15) містить змінну величину $\frac{\lambda-(ka)^2(\xi^2-1)+m^2/(\xi^2-1)}{a^2(\xi^2-\eta^2)}$. Проте ми можемо вважати (13) наближеним розв'язком (10) у випадках, коли ця змінна величина є наближено постійною. Проаналізуємо цю можливість.

Нехай оболонка є досить тонкою для того, щоб можна було вважати $(\xi_2-\xi_1)/\xi_1 \ll 1$ (що еквівалентно умові $(R_\parallel^{(2)}-R_\parallel^{(1)})/R_\parallel^{(1)} \ll 1$), і не є витягнутою настільки, щоб не можна було вважати $\xi_1^2 \gg 1$ (що еквівалентно умові $((R_\parallel^{(1)})^2-(R_\perp^{(1)})^2)/(R_\parallel^{(1)})^2 \ll 1$). За таких умов величину $\frac{\lambda-(ka)^2(\xi^2-1)+m^2/(\xi^2-1)}{a^2(\xi^2-\eta^2)}$ можна вважати наближено постійною. Справді, в такому випадку ми можемо записати

$$\frac{\lambda-(ka)^2(\xi^2-1)+m^2/(\xi^2-1)}{a^2(\xi^2-\eta^2)} \approx \frac{\lambda\xi_0^2-(ka)^2\xi_0^4+m^2}{a^2\xi_0^4} = \text{const}, \tag{16}$$

де величина $\xi_0=\sqrt{(\xi_1^2+\xi_2^2)/2}$ — усереднене значення ξ всередині оболонки. При цьому рівняння (15) перепишеться

$$\begin{gathered}-\Big(\omega^2/(\gamma^2M_0^2)-\big(\beta+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)\big(\beta+4\pi+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)\Big)k^2+\\+4\pi\big(\beta+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)\big(\lambda\xi_0^2-(ka)^2\xi_0^4+m^2\big)/(a^2\xi_0^4)=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Конкретизуємо вигляд константи розділення змінних. Зауважимо, що параметр k має сенс ефективного хвильового числа для спінових коливань у «радіяльному» (уздовж координати ξ) напрямку і, отже, для тонкої оболонки має порядок $1/d$, де d — середня товщина оболонки. Якщо оболонка є досить тонкою для того, щоб можна було покласти $a/d \gg 1$, тоді $ka \gg 1$, і ми можемо використовувати наступне розвинення константи розділення змінних (див., наприклад, [17]):

$$\lambda=\lambda_{lm} \approx -(ka)^2+ka(2(l-m)+1), \tag{18}$$

тут l, m — відповідні квантові числа. Підставляючи такий вигляд λ у рівняння (17) та зауваживши, що $\xi_0^4 \gg \xi_0^2$, одержуємо

$$\begin{gathered}-\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2M_0^2}-\big(\beta+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)\big(\beta+4\pi+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)\right)k^2+\\+4\pi\frac{ka(2(l-m)+1)\xi_0^2-(ka)^2\xi_0^4+m^2}{a^2\xi_0^4}\big(\beta+\alpha k^2+H_0^{(i)}/M_0\big)=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Звідси одержуємо дисперсійне співвідношення для спінового збудження у наступному вигляді:

$$\omega = \frac{\gamma M_0}{k}\left(\alpha^2 k^6 + 2\alpha\tilde{\beta}k^4 + 4\pi\frac{\alpha(2(l-m)+1)}{a\xi_0^2}k^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\tilde{\beta}^2 + \frac{4\pi\alpha m^2}{a^2\xi_0^4}\right)k^2 + \frac{4\pi}{a^2\xi_0^4}(\tilde{\beta}a(2(l-m)+1)\xi_0^2 k + \tilde{\beta}m^2)\right)^{1/2}; \tag{20}$$

тут ми позначили $\tilde{\beta} = \beta + H_0^{(i)}/M_0$.

Зауважимо, зважаючи на те, що довжина спінової хвилі має бути більше або порядку за довжину обмінної взаємодії (яка складає порядку кількох нанометрів для типових феромагнетиків), для нанооболонок, середня товщина яких порядку обмінної довжини або ненабагато її перевищує (що виконується для типових оболонок), можливе збудження тільки однієї ненульової радіяльної моди з $k \approx 2\pi/(b-a)$.

6. ВИСНОВКИ

Таким чином, в роботі досліджено дипольно-обмінні спінові коливання (стоячі спінові хвилі) у феромагнетній нанооболонці у формі витягнутого еліпсоїду обертання («нанорис»). Розглянуто випадок, коли феромагнетик, з якого складається оболонка, є одноосьовим та має локальний тип «легка вісь». Одержано рівняння для магнетного потенціялу малих спінових збуджень у такій системі з урахуванням магнетної диполь-дипольної взаємодії, обмінної взаємодії та ефектів анізотропії. Для нанорису, оболонка якого є тонкою (у поздовжньому напрямку) порівняно з його поздовжніми розмірами, а відношення півосей близьке до одиниці (так що $((R_{\parallel}^{(1)})^2 - (R_{\perp}^{(1)})^2)/\ /(R_{\parallel}^{(1)})^2 \ll 1$), одержано дисперсійне співвідношення для описаних вище спінових коливань.

ДОДАТОК

Сфероїдальні координати

При знаходженні розв'язку рівняння Ландау–Ліфшиця для спінових коливань у нанооболонці, що має форму еліпсоїду обертання, ми користуємося сфероїдальними координатами (див., наприклад, [17]). У цьому розділі наведено основні співвідношення для цих координат.

Сфероїдальні координати (u, w, φ) пов'язані з Декартовими (x, y, z) співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\,u \sin w \cos\varphi, \\ y = a\,\mathrm{sh}\,u \sin w \sin\varphi, \\ z = a\,\mathrm{ch}\,u \cos w, \end{cases} \tag{21}$$

де a — постійний параметер. Межі, в яких можуть змінюватися ці координати:

$$u \in (-\infty, +\infty), \quad w \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \tag{22}$$

В роботі ми використовуємо інший варіянт сфероїдальних координат (ξ, η, φ), пов'язаних з Декартовими наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\cos\varphi, \\ y = a\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\sin\varphi, \\ z = a\xi\eta. \end{cases} \tag{23}$$

Ці координати змінюються в наступних межах:

$$\xi = \mathrm{ch}\,u \in [1, +\infty), \quad \eta = \cos w \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \tag{24}$$

Координата φ еквівалентна полярному куту у сферичних координатах. Рівняння $\xi = \mathrm{const}$ описує еліпсоїд обертання з півосями $R_\parallel = a\xi$, $R_\perp = a(\xi^2 - 1)^{1/2}$ ($R_\parallel$ — піввісь, спрямована уздовж вісі обертання еліпсоїду Oz, $R_\perp$ — піввісь, спрямована ортогонально до Oz), причому

$$a^2 = R_\parallel^2 - R_\perp^2. \tag{25}$$

Рівняння $\eta = \mathrm{const}$ є рівнянням гіперболоїду і має вигляд

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} = c^2, \tag{26}$$

тут b, c — константи. Верхня ($z > 0$) частина гіперболоїду — гіпербола, що обирається при $\eta > 0$, нижня — при $\eta < 0$. Коефіцієнти Ляме для сфероїдальних координат мають вигляд:

$$h_1 = a\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}},\ h_2 = a\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}},\ h_3 = a\xi\eta. \tag{27}$$

При перетворенні рівняння Ландау–Ліфшиця у роботі використовується також запис Ляпласового оператора у сфероїдальних координатах. Він має наступний вигляд:

$$\Delta = \frac{4}{a^2(\xi^2-\eta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \quad (28)$$

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны* (Москва: Наука: 1967).
2. V. V. Kruglyak, S. O. Demokritov, and D. Grundler, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **43**, No. 26: 264001 (2010).
3. S. D. Bader and S. S. P. Parkin, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, **1**: 71 (2010).
4. S. Neusser and D. Grundler, *Adv. Mater.*, **21**, No. 28: 2927 (2009).
5. T. Schneider, A. A. Serga, B. Leven, B. Hillebrands, R. L. Stamps, and M. P. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.*, **92**, No. 2: 022505 (2008).
6. M. Bauer, O. Büttner, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A. N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, No. 17: 3769 (1998).
7. K. Yu. Guslienko and A. N. Slavin, *J. Appl. Phys.*, **87**, No. 9: 6337 (2000).
8. F. G. Aliev, J. F. Sierra, A. A. Awad, G. N. Kakazei, D.-S. Han, S.-K. Kim, V. Metlushko, B. Ilic, and K. Yu. Guslienko, *Phys. Rev. B*, **79**, No. 17: 174433 (2009).
9. J. Jorzick, S. O. Demokritov, C. Mathieu, B. Hillebrands, B. Bartenlian, C. Chappert, F. Rousseaux, and A. N. Slavin, *Phys. Rev. B*, **60**, No. 22: 15194 (1999).
10. R. Arias and D. L. Mills, *Phys. Rev. B*, **63**, No. 13: 134439 (2001).
11. R. Skomski, M. Chipara, and D. J. Sellmyer, *J. Appl. Phys.*, **93**, No. 10: 7604 (2003).
12. S. M. Chérif, Y. Roussigné, C. Dugautier, and P. Moch, *J. Magn. Magn. Mater.*, **222**, No. 3: 337 (2000).
13. H. Wang, D. W. Brandl, F. Le, P. Nordlander, and N. J. Halas, *Nano Lett.*, **6**, No. 4: 827 (2006).
14. S. I. Cha, C. B. Mo, K. T. Kim, and S. H. Hong, *J. Mater. Res.*, **20**, No. 8: 2148 (2005).
15. R. Rajendran, R. Muralidharan, R. S. Gopalakrishnan, M. Chellamuthu, S. U. Ponnusamy, and E. Manikandan, *Eur. J. Inorganic Chem.*, **2011**, No. 35: 5384 (2011).
16. H. Chen, D. C. Colvin, B. Qi, T. Moore, J. He, O. T. Mefford, F. Alexis, J. C. Goreb, and J. N. Anker, *J. Mater. Chem.*, **22**, No. 25: 12802 (2012).
17. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции* (Ред. В. С. Булдырев) (Москва: Наука: 1976).

REFERENCES

1. A. I. Akhiezer, V. G. Bar'yakhtar, and S. V. Peletminskiy, *Spinovye Volny (Spin Waves)* (Moscow: Nauka: 1967) (in Russian).
2. V. V. Kruglyak, S. O. Demokritov, and D. Grundler, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **43**, No. 26: 264001 (2010).
3. S. D. Bader and S. S. P. Parkin, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, **1**: 71 (2010).

4. S. Neusser and D. Grundler, *Adv. Mater.*, **21**, No. 28: 2927 (2009).
5. T. Schneider, A. A. Serga, B. Leven, B. Hillebrands, R. L. Stamps, and M. P. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.*, **92**, No. 2: 022505 (2008).
6. M. Bauer, O. Büttner, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A. N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, No. 17: 3769 (1998).
7. K. Yu. Guslienko and A. N. Slavin, *J. Appl. Phys.*, **87**, No. 9: 6337 (2000).
8. F. G. Aliev, J. F. Sierra, A. A. Awad, G. N. Kakazei, D.-S. Han, S.-K. Kim, V. Metlushko, B. Ilic, and K. Yu. Guslienko, *Phys. Rev. B*, **79**, No. 17: 174433 (2009).
9. J. Jorzick, S. O. Demokritov, C. Mathieu, B. Hillebrands, B. Bartenlian, C. Chappert, F. Rousseaux, and A. N. Slavin, *Phys. Rev. B*, **60**, No. 22: 15194 (1999).
10. R. Arias and D. L. Mills, *Phys. Rev. B*, **63**, No. 13: 134439 (2001).
11. R. Skomski, M. Chipara, and D. J. Sellmyer, *J. Appl. Phys.*, **93**, No. 10: 7604 (2003).
12. S. M. Chérif, Y. Roussigné, C. Dugautier, and P. Moch, *J. Magn. Magn. Mater.*, **222**, No. 3: 337 (2000).
13. H. Wang, D. W. Brandl, F. Le, P. Nordlander, and N. J. Halas, *Nano Lett.*, **6**, No. 4: 827 (2006).
14. S. I. Cha, C. B. Mo, K. T. Kim, and S. H. Hong, *J. Mater. Res.*, **20**, No. 8: 2148 (2005).
15. R. Rajendran, R. Muralidharan, R. S. Gopalakrishnan, M. Chellamuthu, S. U. Ponnusamy, and E. Manikandan, *Eur. J. Inorganic Chem.*, **2011**, No. 35: 5384 (2011).
16. H. Chen, D. C. Colvin, B. Qi, T. Moore, J. He, O. T. Mefford, F. Alexis, J. C. Goreb, and J. N. Anker, *J. Mater. Chem.*, **22**, No. 25: 12802 (2012).
17. I. V. Komarov, L. I. Ponomarev, and S. Yu. Slavyanov, *Sferoidal'nye i Kulonovskie Sferoidal'nye Funktsii (Spheroidal and Coulomb Spheroidal Functions)* (Ed. V. S. Buldyrev) (Moscow: Nauka: 1976) (in Russian).