Журнал математической физики, анализа, геометрии
2006, т. 2, № 1, с. 40–61

Линейчатые поверхности в E^n

О.А. Гончарова

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:goncharova@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2004 г.

Рассматриваются некоторые локальные и глобальные свойства линейчатых поверхностей в E^n. В частности, вычислена интегральная гауссова кривизна полной регулярной ориентируемой линейчатой поверхности. Также исследовано гауссово кручение и более подробно изучены линейчатые поверхности в E^4 с нулевым гауссовым кручением.

Розглядаються деякі локальні та глобальні властивості лінійчатих поверхонь в E^n. Зокрема, обчислено интегральну гауссову кривину повної регулярної орієнтованої лінійчатої поверхні. Також досліджено гауссовий скрут і більш детально вивчено лінійчаті поверхні в E^4 з нульовим гауссовим скрутом.

Mathematics Subject Classification 2000: 53A07.

Key words: линейчатые поверхности, гауссова кривизна, гауссово кручение.

Теория линейчатых поверхностей в E^3 является хорошо развитой областью в дифференциальной геометрии. Подробные обзоры этой теории представлены в книгах В.Ф. Кагана [1], В.И. Шуликовского [2], В. Бляшке [3], где имеются указания на более раннюю литературу. Теорией линейчатых поверхностей интересовался еще Г. Монж. Важное значение имеет эта теория в связи с применением в строительстве и архитектуре [4]. Были выделены различные классы линейчатых поверхностей (поверхности Каталана, торсовые и обобщенные винтовые поверхности и др.). Доказан ряд интересных теорем, например, теорема Каталана о том, что из всех косых линейчатых поверхностей единственной минимальной поверхностью является обыкновенная винтовая поверхность (геликоид). Некоторые линейчатые поверхности построены в книге А.В. Погорелова [5], где они называются нитяными. Линейчатые поверхности в римановых пространствах рассматривались В.А. Топоноговым [6, с. 101], А.А. Борисенко [7–10], Л.А. Масальцевым [11], В.Ю. Ровенским [12].

Линейчатая поверхность — это поверхность, образованная движением прямой линии. Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими, а каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, — направляющей кривой.

В данной работе рассмотрены некоторые локальные и глобальные свойства линейчатых поверхностей в E^4 и E^n. В частности, будет вычислен интеграл от кривизны K полной линейчатой ориентируемой поверхности. Интеграл от гауссовой кривизны полных некомпактных поверхностей рассмотрен в работах С.Э. Кон-Фоссена [13], А. Хубера [14], А.А. Борисенко [15] и др.

Пусть γ — некоторая кривая класса $C^k (k \geq 5)$ в E^n с радиус-вектором $\rho(t)$, где t — длина дуги. Пусть вдоль кривой γ задано единичное векторное поле $a(t)$ класса C^k, $k \geq 5$.

Построим в E^n линейчатую поверхность F^2 с радиус-вектором в виде

$$r(t,u) = \rho(t) + ua(t). \tag{1}$$

Кривую γ_1 на единичной сфере, которая описывается концом единичного вектора $a(t)$ при изменении параметра t, если начало его поместить в центр сферы, будем называть **индикатрисой поля образующих**. (Заметим, что аналогичная конструкция рассмотрена для трехмерных линейчатых поверхностей в работе А.А. Борисенко, мл. [16]). Длину этой кривой, если она существует, обозначим l_{γ_1}.

Теорема 1. *Если кривая γ_1 — спрямляема, то модуль интеграла от гауссовой кривизны полной регулярной ориентируемой линейчатой поверхности равен удвоенной длине l_{γ_1} индикатрисы поля образующих*

$$|\iint K ds| = 2l_{\gamma_1}.$$

Если F^2 — гомеоморфна цилиндру, то условие спрямляемости γ_1 выполнено автоматически в силу условий регулярности, наложенных на $\rho(t)$ и $a(t)$.

З а м е ч а н и е. Аналогичное соотношение получается для бесконечной полосы между двумя прямолинейными образующими.

Также в этой работе для линейчатых поверхностей в E^4 вычислим гауссово кручение $\varkappa_\Gamma$, которое является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т.е. гауссовой кривизне. Гауссово кручение двумерных поверхностей в E^4 рассматривалось в работах Ю.А. Аминова (подробнее см. в [17]). В работе найдем общий вид кручения для линейчатой поверхности в E^4, для этого запишем векторное поле $a(t)$ в виде $a(t) = \sum\limits_{i=2}^{4} a^i \xi_i$, а вектор a' — в виде

$a' = \sum\limits_{i=1}^{4} T^i \xi_i$, где a^i, T^i — коэффициенты в разложении векторов a и a' по векторам натурального базиса Френе. Тогда

$$\kappa_\Gamma = \frac{c(t) + b(t)u}{(1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2)^2},$$

где

$$c(t) = k_1 \left[\left(a^4 \frac{da^3}{dt} - a^3 \frac{da^4}{dt} \right) - k_3[(a^3)^2 + (a^4)^2] + k_2 a^2 a^4 \right],$$

$$b(t) = \sum_{k=2}^{4} \frac{dT^k}{dt} \mu_k + \sum_{i,j=1}^{4} T^i T^j \lambda_{ij}$$

и коэффициенты μ_k выражаются через T^l и a^S, а коэффициенты λ_{ij} — через a^k и кривизны k_l. Более подробное выражение для $b(t)$ приведено в формуле (8).

Так как выражение для гауссовой кривизны можно записать в виде (см. (4))

$$K = \frac{d(t)}{(1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2)^2},$$

то, если рассмотреть отношение гауссова кручения и гауссовой кривизны, получим

$$\frac{\kappa_\Gamma}{K} = \frac{c(t) + b(t)u}{d(t)} = c_1(t) + c_2(t)u,$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — некоторые функции.

Таким образом, для линейчатых поверхностей в E^4

$$\kappa_\Gamma = K(c_1(t) + c_2(t)u).$$

С помощью этого выражения можно найти линейчатые поверхности, для которых $\frac{\kappa_\Gamma}{K} = c_0 = const$. В случае $c_0 = \pm 1$ такой класс рассматривался, например, Ю.А. Аминовым [18]. Из выражения для κ_Γ следует

Утверждение 1. *Интеграл от модуля гауссова кручения по любой бесконечной полосе, ограниченной прямолинейными образующими, которые соответствуют значениям параметра $t : t_1$ и t_2, сходится.*

Действительно, в случае $a' \neq 0$

$$\iint\limits_{F^2} |\kappa_\Gamma| dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c(t) + b(t)u|}{(1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2)^{\frac{3}{2}}} du dt,$$

порядок роста знаменателя по u равен 3, а порядок роста числителя — 1, следовательно, интеграл сходится. В случае $a' = 0$ гауссово кручение $\varkappa_\Gamma = 0$.

Рассмотрим линейчатые поверхности с нулевым гауссовым кручением. Обобщенный цилиндр — это линейчатая поверхность, у которой прямолинейные образующие параллельны. В этом случае $a(t)$ есть постоянный вектор.

Теорема 2. *Если направляющая кривая γ и векторное поле $a(t)$ — аналитические, то полная регулярная линейчатая поверхность в E^4 с нулевым гауссовым кручением либо лежит в E^3, либо представляет собой обобщенный цилиндр.*

Если направляющая кривая γ и векторное поле $a(t)$ — регулярные класса C^k, $k \geq 5$, то полная регулярная линейчатая поверхность в E^4 с нулевым гауссовым кручением либо лежит в E^3, либо это обобщенный цилиндр, либо она представляет собой склейку конечного или бесконечного числа таких поверхностей вдоль прямолинейных образующих.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы справедливо и для полосы поверхности, заключенной между двумя параллельными образующими.

В заключение построен пример поверхности, гомеоморфной цилиндру, такой, что хотя на поверхности гауссово кручение равно нулю, но параллельное перенесение нормального вектора в нормальном расслоении вдоль замкнутой кривой, не гомотопной нулю, переводит его в новый вектор. В то же время перенос по замкнутой кривой, гомотопной нулю, возвращает его в прежнее положение.

1. Найдем первую квадратичную форму поверхности, для этого вычислим производные

$$r_t = \rho' + ua' = \xi_1 + ua', \quad r_u = a,$$

где ξ_1 — единичный касательный вектор к направляющей кривой γ, а штрих обозначает дифференцирование по t. Получаем

$$g_{11} = (r_t)^2 = (\xi_1 + ua')^2 = 1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2,$$

$$g_{12} = (r_t, r_u) = (\xi_1, a),$$

$$g_{22} = (r_u)^2 = 1.$$

Образующую, на которой три вектора ξ_1, a, a' лежат в одной плоскости, назовем **торсовой** образующей поверхности (независимость этого определения от направляющей кривой будет показана ниже); те же образующие, на которых это не имеет места, назовем **обыкновенными** образующими.

Рассмотрим условие регулярности: допустим, что имеем особую точку и линейную зависимость между r_t и r_u при некотором значении параметра $u = u_0$:

$$\lambda_1 r_t + \lambda_2 r_u = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a' = 0,$$

где $\lambda_3 = \lambda_1 u_0$ и коэффициенты λ_i одновременно не обращаются в нуль, т.е. особая точка расположена на торсовой образующей.

Утверждение 2. *Если на линейчатой поверхности, образованной регулярной кривой γ класса C^k, $k \geq 2$, и вектор-функцией $a(t)$ класса C^k, $k \geq 2$, нет торсовых образующих, то поверхность является регулярной класса C^k, $k \geq 2$.*

Однако поверхность может быть регулярной (напр., цилиндр) и полностью состоять из торсовых образующих.

Образующая называется **стационарной** при $a' = 0$. Если на поверхности существует торсовая нестационарная образующая, то на ней всегда существует особая точка.

2. Рассмотрим касательную плоскость к нашей поверхности, она определяется двумя векторами r_t и r_u. Исследуем, как будет изменяться положение касательной плоскости при ее движении вдоль прямолинейных образующих.

Утверждение 3. *Касательная плоскость линейчатой поверхности F^2 в E^n при движении вдоль обыкновенной прямолинейной образующей будет совершать оборот на угол, равный π. На торсовой образующей касательная плоскость не меняется и наоборот: если касательная плоскость при движении вдоль образующей не изменяется, то такая образующая — торсовая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать, что ξ_1 ортогонален к a. Рассмотрим единичный вектор $\tau_1 = \frac{r_t}{|r_t|} = \frac{\xi_1 + ua'}{\sqrt{1+2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2}}$. Имеем ξ_1 и a', которые ортогональны к a. Пусть прямолинейная образующая — не торсовая. Тогда векторы ξ_1 и a' — не коллинеарны. Следовательно, τ_1 вращается в плоскости, ортогональной к a, которая проходит через ξ_1 и a'. Имеем

$$\lim_{u \to \pm\infty} \tau_1 = \lim_{u \to \pm\infty} \frac{\xi_1 + ua'}{|u||a'|} = \pm \frac{a'}{|a'|}.$$

Получаем, что при движении вдоль обыкновенной образующей направление вектора τ_1 изменяется на противоположное, а так как вектор r_t вместе с a

определяют положение касательной плоскости, то из этого следует, что касательная плоскость будет совершать оборот на угол, равный π. Угол поворота — это угол между r_t и a'. Теперь рассмотрим торсовую образующую. Если $a' = 0$, то τ_1 не меняется и, следовательно, касательная плоскость постоянна вдоль образующей. Если $a' \neq 0$, то вектор r_t все равно лежит в одной и той же плоскости векторов a и a'. Это касательная плоскость поверхности, следовательно, она постоянна вдоль торсовых образующих. Приведенное рассуждение дополнительно показывает, что определение торсовой образующей не зависит от выбора направляющей кривой. Утверждение доказано.

При локальном рассмотрении, не ограничивая общности, в качестве направляющей кривой можно взять кривую, которая ортогональна к прямолинейным образующим, т.е. ξ_1 ортогонален к a. Тогда торсовая образующая определяется условием

$$a' = \mu\xi_1, \tag{2}$$

где μ — некоторое число. Особой точке на торсовой образующей будет соответствовать значение параметра

$$u = -\frac{(\xi_1, a')}{(a')^2}.$$

Введем понятие **стрикционной линии.** Вектор τ_1 при движении по u вращается в плоскости векторов ξ_1 и a' и меняет свое направление от вектора $\frac{a'}{|a'|}$ до противоположного ему $-\frac{a'}{|a'|}$. Точку C, соответствующую параметру u_C, в которой $(\tau_1, a') = 0$, называют **центральной точкой** вдоль образующей $a(t)$. Из этого определения следует, что

$$(\xi_1 + u_C a', a') = (\xi_1, a') + u_C(a')^2 = 0.$$

Отсюда

$$u_C = -\frac{(\xi_1, a')}{(a')^2}. \tag{3}$$

Заметим, что на торсовой нестационарной образующей эта формула определяет особую точку.

Так же, как и в трехмерном случае, можно определить центральную точку как предельное положение точки, из которой исходит кратчайшее расстояние к смежной образующей, поэтому ее называют **точкой стрикции**. Оба эти определения равносильны.

Стрикционной линией поверхности называется геометрическое место центральных точек всех образующих. Заметим, что о центральной точке может идти речь только по отношению к такому лучу, на котором $a' \neq 0$. Если a' обращается в нуль тождественно, то поверхность цилиндрическая.

3. Найдем теперь гауссову кривизну K поверхности с помощью формулы Фробениуса [3, с. 130], использующую коэффициенты метрики

$$K = -\frac{(a')^2 - (\xi_1, a')^2}{(1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2)^2} \,. \tag{4}$$

Интересно заметить, что числитель не зависит от u, а знаменатель зависит от u^4, если образующая нестационарная. Таким образом, при $u \to \pm\infty$ гауссова кривизна стремится к нулю. Анализируя выражение для K, получаем

Утверждение 4. *На линейчатой поверхности гауссова кривизна имеет в точках неторсовой образующей отрицательные значения; на торсовой образующей она во всех ее точках равна нулю.*

Нашей дальнейшей целью является вычисление интеграла от гауссовой кривизны K поверхности.

Докажем **теорему 1**. Пусть линейчатая поверхность F^2 в E^4 — полная, регулярная класса C^3, гомеоморфная цилиндру. В этом случае проведем разрез по прямолинейной образующей. Далее рассуждения в обоих случаях проводим аналогичным образом. С помощью прямолинейных образующих и ортогональных траекторий получим односвязную область D, ограниченную кусочно-гладкой кривой, которая состоит из кривых $\Gamma_1 : u = c > 0$ и $\Gamma_2 : u = c < 0$ (Γ_1 и Γ_2 имеют противоположные ориентации) и отрезков прямолинейной образующей. В такой области D введем полугеодезическую систему координат, в которой ds^2 запишется в виде $ds^2 = g_{11}dt^2 + du^2$. Можем применить теорему Гаусса–Бонне. Так как геодезическая кривизна прямой равна нулю и сумма углов поворота касательных в угловых точках кривой, ограничивающей нашу область D, равна 2π, получаем

$$\iint\limits_D K dS = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_i} k_g ds,$$

где dS — элемент площади, k_g — геодезическая кривизна Γ_i и ds — длина дуги границы.

Вычислим геодезическую кривизну координатной линии $u = const$ по формуле

$$k_g = -\frac{(\sqrt{g_{11}})_u}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \,.$$

В случае поверхности, гомеоморфной цилиндру, получаем бесконечную полосу, которая ограничена двумя прямолинейными образующими. Пусть l — длина направляющей кривой в этом случае. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma_1} k_g ds = -\int\limits_0^l \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{(g_{11})_u}{2\sqrt{g_{11}}} dt = -\int\limits_0^l \frac{(g_{11})_u}{2\sqrt{g_{11}}} dt.$$

Вычислим предельное значение при $u \to \pm\infty$ следующего интеграла:

$$\lim_{u\to\pm\infty}\left[-\int\limits_0^l \frac{(g_{11})_u}{2\sqrt{g_{11}}}dt\right] = \lim_{u\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^l \frac{2(\xi_1, a') + 2u(a')^2}{\sqrt{1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2}}dt\right].$$

В результате имеем

$$\lim_{u\to\pm\infty}\int\limits_{\Gamma_1} k_g ds = -\int\limits_0^l \frac{(a')^2}{\sqrt{(a')^2}}dt = -\int\limits_0^l |a'|dt.$$

С учетом ориентации Γ_2 получаем

$$\lim_{u\to\pm\infty}\int\limits_{\Gamma_2} k_g ds = -\int\limits_0^l |a'|dt.$$

Таким образом, $|\int\limits_{F^2}\int KdS| = 2\int\limits_0^l |a'|dt = 2\int\limits_\gamma |da| = 2l_{\gamma_1}$.

Пусть линейчатая поверхность F^2 в E^4 — полная, регулярная класса C^3, гомеоморфная плоскости. В этом случае интеграл от гауссовой кривизны, понимаемый в несобственном смысле при $t \to \pm\infty$, будет существовать и равняться l_{γ_1}, если γ_1 — спрямляемая кривая. Если эта кривая не спрямляема, то этот интеграл не существует. Теорема доказана.

4. Теперь перейдем к рассмотрению линейчатых поверхностей в E^4.

Пусть γ — некоторая кривая в E^4 с радиус-вектором $\rho(t)$, где t — длина дуги и ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — ее натуральный базис Френе. Возьмем единичное векторное поле $a(t)$ вдоль кривой γ такое, что $a(t)$ есть линейная комбинация векторов ξ_2, ξ_3, ξ_4 в соответствующей точке кривой, т.е. $a(t) = \sum\limits_{i=2}^{4} a^i \xi_i$.

Вычислим гауссово кручение κ_Γ, которое является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т.е. гауссовой кривизне. Гауссовым кручением κ_Γ поверхности называется с точностью до знака удвоенное произведение полуосей эллипса нормальной кривизны. Его геометрический смысл следующий. Возьмем на поверхности $F^2 \subset E^4$ замкнутый контур, который ограничивает односвязную область G. Вдоль указанного контура перенесем параллельно в нормальной связности единичный нормальный вектор n. Пусть $\Delta\varphi$ означает угол между начальным положением вектора n и положением, полученным в результате параллельного переноса. Тогда $\Delta\varphi$ равен интегралу от гауссова кручения по области G.

Для вычисления κ_Γ известна формула [17, с. 162]

$$\kappa_\Gamma = \frac{(L^1_{k1}L^2_{l2} - L^1_{k2}L^2_{l1})g^{kl}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \tag{5}$$

где L^α_{ij} — коэффициенты вторых квадратичных форм. В дальнейшем для удобства вычислений воспользуемся направляющей, которая ортогональна к прямолинейным образующим.

Пусть n_1 и n_2 — базис единичных нормалей к F^2.

Лемма 1. *Гауссово кручение линейчатой поверхности (1) вычисляется по формуле*

$$\kappa_\Gamma = \frac{([r_{tt}, r_{tu}], [n_1, n_2])}{g_{11}^{3/2}},$$

где квадратные скобки обозначают бивектор. Эта лемма позволяет не находить отдельно каждую из нормалей n_1 и n_2, которые можно найти, но в довольно громоздком виде, а находить только бивектор $[n_1, n_2]$.

Доказательство. Вычислим вторые производные вектора $r(t, u)$:

$$r_{tt} = k_1\xi_2 + ua'',$$

$$r_{tu} = a', \quad r_{uu} = 0.$$

Таким образом, коэффициенты второй квадратичной формы L^1_{22} и L^2_{22} равны нулю, следовательно, кручение Гаусса будет определяться формулой

$$\kappa_\Gamma = \frac{(L^1_{11}L^2_{12} - L^1_{12}L^2_{11})g^{11}}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$= \frac{(r_{tt}, n_1)(r_{tu}, n_2) - (r_{tt}, n_2)(r_{tu}, n_1)}{(g_{11})^{3/2}} = \frac{([r_{tt}, r_{tu}], [n_1, n_2])}{(g_{11})^{3/2}}.$$

Лемма доказана.

Введем обозначения

$$A = [\xi_1, a], \quad B = [a', a], \quad \alpha = (a', \xi_1), \quad \beta = (a')^2.$$

Выражение для $[n_1, n_2]$ можно найти из того условия, что бивектор $[n_1, n_2]$ является дополнительным к бивектору $q = \frac{[r_t, r_u]}{|[r_t, r_u]|}$:

$$[r_t, r_u] = [\xi_1, a] + u[a', a] = A(t) + uB(t),$$

где $A(t) = [\xi_1, a]$ и $B(t) = [a', a]$.

Значит, $[n_1, n_2]$, с точностью до нормирующего множителя $\lambda(t,u)$, тоже можно записать в виде

$$\lambda[n_1, n_2] = M(t) + uN(t).$$

Найдем, чему равно выражение $[r_{tt}, r_{tu}]$:

$$[r_{tt}, r_{tu}] = [k_1\xi_2 + ua'', a'] = k_1[\xi_2, a'] + u[a'', a'].$$

Таким образом,

$$\kappa_\Gamma = \frac{1}{(g_{11})^{3/2}\lambda}(k_1[\xi_2, a'] + u[a'', a'], M + uN)$$

$$= \frac{1}{(g_{11})^{3/2}\lambda}[k_1([\xi_2, a'], M) + u(([a'', a'], M) + k_1([\xi_2, a'], N)) + u^2([a'', a'], N)]. \quad (6)$$

Выражение в скобках есть полином второго порядка по u. Вычислим его коэффициенты.

Используя формулы Френе, запишем выражение для первой производной вектора a:

$$a' = \sum_{i=2}^{4}\left(\frac{da^i}{dt}\xi_i + a^i{\xi_i}'\right) = \xi_1(-k_1a^2) + \xi_2\left(\frac{da^2}{dt} - k_2a^3\right)$$

$$+\xi_3\left(\frac{da^3}{dt} + k_2a^2 - k_3a^4\right) + \xi_4\left(\frac{da^4}{dt} + k_3a^3\right) = \sum_{i=1}^{4} T^i\xi_i,$$

где T^i — коэффициенты в разложении вектора a'.

Вычислим

$$A = [\xi_1, a] = [\xi_1, \sum_{i=2}^{4} a^i\xi_i] = [\xi_1, \xi_2]a^2 + [\xi_1, \xi_3]a^3 + [\xi_1, \xi_4]a^4$$

$$= \sum_{i=2}^{4} a^i[\xi_1, \xi_i] = \sum_{i=2}^{4} A^{1i}[\xi_1, \xi_i],$$

$$B = [a', a] = [\sum_{i=1}^{4} T^i\xi_i, \sum_{j=2}^{4} a^j\xi_j] = (T^1a^2 - T^2a^1)[\xi_1, \xi_2]$$

$$+(T^1a^3 - T^3a^1)[\xi_1, \xi_3] + (T^1a^4 - T^4a^1)[\xi_1, \xi_4] + (T^2a^3 - T^3a^2)[\xi_2, \xi_3]$$

$$+ \ldots = \sum_{i=1, i<j}^{4}(T^ia^j - T^ja^i)[\xi_i, \xi_j] = \sum_{i=1, i<j}^{4} B^{ij}[\xi_i . \xi_j].$$

Заметим, что компоненты дополнительных бивекторов $p = \{p^{ij}\}$ и $q = \{q^{ij}\}$ связаны соотношением

$$p^{ij} = \varepsilon^{ijkl} q^{kl},$$

где ε^{ijkl} — символ Кронекера.

Найдем координаты векторов M и N. Так как вектор $[n_1, n_2] = M(t) + uN(t)$ является дополнительным к вектору $[r_t, r_u] = A(t) + uB(t)$, то M и N связаны с координатами векторов A и B, с точностью до пропорциональности, следующими соотношениями:

$$M = \begin{pmatrix} M^{12} \\ M^{13} \\ M^{14} \\ M^{23} \\ M^{24} \\ M^{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^{14} \\ -A^{13} \\ A^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a^4 \\ -a^3 \\ a^2 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} N^{12} \\ N^{13} \\ N^{14} \\ N^{23} \\ N^{24} \\ N^{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{34} \\ -B^{24} \\ B^{23} \\ B^{14} \\ -B^{13} \\ B^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^3a^4 - T^4a^3 \\ -(T^2a^4 - T^4a^2) \\ T^2a^3 - T^3a^2 \\ T^1a^4 \\ -T^1a^3 \\ T^1a^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можем вычислить коэффициенты в формуле для гауссового кручения (5).

Рассмотрим коэффициент $c(t) = (k_1[\xi_2, a'], M)$, подставив выражение для координат a' и M, получим

$$c(t) = (k_1 \sum_{i=1}^{4} [\xi_2, \xi_j] T^j, M) = k_1(T^3a^4 - T^4a^3). \tag{7}$$

Теперь рассмотрим $b(t)$ — коэффициент при u. Нам понадобится выражение для второй производной вектора a:

$$a'' = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{dT^i}{dt} \xi_i + T^i {\xi_i}' \right) = \xi_1 \left(\frac{dT^1}{dt} - k_1 T^2 \right) + \xi_2 \left(\frac{dT^2}{dt} + k_1 T^1 - k_2 T^3 \right)$$

$$+ \xi_3 \left(\frac{dT^3}{dt} - k_3 T^4 + k_2 T^2 \right) + \xi_4 \left(\frac{dT^4}{dt} + k_3 T^3 \right) = \sum_{i=1}^{4} Q^i \xi_i.$$

Вычислим

$$([a'', a'], M) = \left(\sum_{i=1, i<j}^{4} (Q^i T^j - Q^j T^i)[\xi_i, \xi_j], M \right)$$

$$= (Q^2T^3 - Q^3T^2)a^4 - (Q^2T^4 - Q^4T^2)a^3 + (Q^3T^4 - Q^4T^3)a^2.$$

Вычислив и подставив выражения для N^{ij}, получим

$$([\xi_2, a'], N) = (\sum_{i=1}^{4} [\xi_2, \xi_i] T^i, N) = -T^1N^{12} + T^3N^{23} + T^4N^{24} = 0.$$

Подставим выражения для Q^i, N^{ij}, имеем

$$b(t) = \left(T^4 \frac{dT^3}{dt} - T^3 \frac{dT^4}{dt} \right) a^2 + T^2 \left(\frac{dT^4}{dt} a^3 - \frac{dT^3}{dt} a^4 \right)$$

$$+T^2T^4(k_2a^2 + k_3a^4) - (T^2)^2 k_2 a^4 + T^2T^3k_3a^3 - k_3a^2((T^3)^2 + (T^4)^2)$$

$$+(T^3a^4 - T^4a^3) \left(\frac{dT^2}{dt} + k_1T^1 - k_2T^3 \right). \qquad (8)$$

Рассмотрим $f(t)$ — коэффициент при u^2.

Подставим выражения для $[a'', a']$ и N^{ij}, получим

$$f(t) = ([a'', a'], N) = (Q^1T^2 - Q^2T^1)(T^3a^4 - T^4a^3)$$

$$-(Q^1T^3 - Q^3T^1)(T^2a^4 - T^4a^2) + (Q^1T^4 - Q^4T^1)(T^2a^3 - T^3a^2)$$

$$+(Q^2T^3 - Q^3T^2)T^1a^4 - (Q^2T^4 - Q^4T^2)T^1a^3 + (Q^3T^4 - Q^4T^3)T^1a^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем, что коэффициент $f(t)$ тождественно равен нулю.

Найдем коэффициент $\lambda(t, u) = |M(t) + uN(t)|$.

Из координат бивекторов M и N следует, что квадрат коэффициента $\lambda(t, u)$ равен $\lambda^2(t, u) = M^2 + 2u(M, N) + u^2N^2 = A^2 + 2u(A, B) + u^2B^2$.

Вычислим

$$A^2 = ([\xi_1, a])^2 = (\xi_1, \xi_1)(a, a) - (\xi_1, a)(\xi_1, a) = 1,$$

$$(A, B) = ([\xi_1, a], [a', a]) = (\xi_1, a')(a, a) - (\xi_1, a)(a, a') = (\xi_1, a'),$$

$$B^2 = ([a', a])^2 = (a', a')(a, a) - (a', a)(a, a') = (a')^2.$$

Получаем, что коэффициент $\lambda(t, u) = \sqrt{1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2} = \sqrt{g_{11}}$.

Итак, выражение для гауссового кручения имеет вид

$$\kappa_\Gamma = \frac{c(t) + b(t)u}{(1 + 2u(\xi_1, a') + u^2(a')^2)^2}.$$

Полученная формула позволяет сделать ряд общих выводов. Если $a' \neq 0$, то знаменатель этого выражения есть полином по u четвертой степени. Поэтому, **если κ_Γ постоянно, то оно тождественно равно нулю**. Если $a' = 0$, то $b(t) = c(t) = 0$ и, следовательно, $\kappa_\Gamma = 0$.

Легко видеть, что в общем случае κ_Γ не равно нулю, но при $u \to \pm\infty$ гауссово кручение стремится к нулю. Если $b(t) \neq 0$, то на каждой прямолинейной образующей существует единственная точка, в которой $\kappa_\Gamma = 0$. Совокупность этих точек образует некоторую линию, которая делит поверхность на две части, где $\kappa_\Gamma > 0$ и $\kappa_\Gamma < 0$ (аналог параболической линии). Можно сказать, что эта кривая есть параболическая линия для кривизны нормальной связности. Если $b(t) = 0$, то κ_Γ сохраняет знак.

5. Рассмотрим линейчатые поверхности в E^4 с нулевым гауссовым кручением.

Утверждение 5. *Пусть γ — некоторая кривая в E^4 с радиус-вектором $\rho(t)$, где t — натуральный параметр, единичное векторное поле $a(t)$ — линейная комбинация векторов натурального базиса ξ_2, ξ_3, ξ_4. Тогда линейчатая поверхность в E^4 с кручением Гаусса, равным нулю, либо лежит в E^3, либо определяется системой двух дифференциальных уравнений первого порядка на коэффициенты $a^i(t)$, а именно:*

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{a^3}{a^4}\right) - k_3 + k_2\frac{a^2a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{a^2}{a^4}\right) - k_3\frac{a^2a^3}{(a^2)^2+(a^4)^2} - k_2\frac{a^3a^4}{(a^2)^2+(a^4)^2} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Условие $\kappa_\Gamma = 0$ можно переписать в виде системы двух уравнений:

$$c(t) = k_1(T^3a^4 - T^4a^3) = 0,$$

$$b(t) = \left(T^4\frac{dT^3}{dt} - T^3\frac{dT^4}{dt}\right)a^2 + T^2\left(\frac{dT^4}{dt}a^3 - \frac{dT^3}{dt}a^4\right)$$
$$+T^2T^4(k_2a^2 + k_3a^4) - (T^2)^2k_2a^4 + T^2T^3k_3a^3 - k_3a^2((T^3)^2 + (T^4)^2) = 0.$$

Рассмотрим случай $k_1 = 0$, т.е. направляющая кривая — прямая, ξ_1 — постоянный вектор. В этом случае векторы a и a' ортогональны к ξ_1. Находя нормали, коэффициенты вторых квадратичных форм и используя для вычисления гауссового кручения формулу (5), получаем, что $\kappa_\Gamma = 0$ в том случае, если векторное произведение $(a'', a, a') = 0$. Отсюда следует, что $a(t) \in E^2$, а рассматриваемая линейчатая поверхность принадлежит E^3.

Рассмотрим случай $T^3a^4 - T^4a^3 = 0$. Заметим, что отсюда следует

$$\frac{a^3}{a^4} = \frac{T^3}{T^4}\,. \tag{11}$$

Подставив выражения для T^j, получим

$$\left(a^4\frac{da^3}{dt} - a^3\frac{da^4}{dt}\right) - k_3[(a^3)^2 + (a^4)^2] + k_2a^2a^4 = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай $a^3 = 0$, $a^4 = 0$. Тогда условие $T^3a^4 - T^4a^3 = 0$ выполнено тождественно, а из уравнения $b(t) = 0$ получим $k_3k_2(a^2)^2 = 0$, но $|a|^2 = 1 = (a^2)^2 \neq 0$, поэтому либо $k_2 = 0$ (γ — плоская кривая), либо $k_3 = 0$, т.е. кривая γ и поле $a(t)$ принадлежат E^3, следовательно, рассматриваемая линейчатая поверхность принадлежит E^3.

Проанализируем случай $a^3 \neq 0$, $a^4 = 0$. Из условия $T^3a^4 - T^4a^3 = 0$ следует, что $k_3 = 0$, таким образом, поверхность F^2 принадлежит E^3.

Рассмотрев случай $a^3 \neq 0$, $a^4 \neq 0$, разделив уравнение (12) на $(a^3)^2+(a^4)^2$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{a^3}{a^4}\right) - k_3 + k_2\frac{a^2a^4}{(a^3)^2 + (a^4)^2} = 0.$$

Рассмотрим уравнение $b(t) = 0$, которое сводится к дифференциальному уравнению первого порядка, покажем это.

Продифференцируем уравнение $T^3a^4 - T^4a^3 = 0$:

$$\frac{d(T^3a^4 - T^4a^3)}{dt} = \frac{dT^3}{dt}a^4 + T^3\frac{da^4}{dt} - \frac{dT^4}{dt}a^3 - T^4\frac{da^3}{dt} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{dT^4}{dt}a^3 - \frac{dT^3}{dt}a^4 = T^3\frac{da^4}{dt} - T^4\frac{da^3}{dt}\,.$$

Подставив это выражение в $b(t)$ и предположив, что $(T^3)^2 + (T^4)^2 \neq 0$, разделив все на $(T^3)^2 + (T^4)^2$, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{T^3}{T^4}\right)a^2 - k_3a^2 + \frac{1}{(T^3)^2 + (T^4)^2}$$

$$\times\left[\left(\frac{da^4}{dt}T^3 - \frac{da^3}{dt}T^4\right)T^2 + T^2T^4(k_2a^2 + k_3a^4) - (T^2)^2k_2a^4 + T^2T^3k_3a^3\right] = 0.$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках, которое равно

$$T^2T^3\left(\frac{da^4}{dt} + k_3a^3\right) - T^2T^4\left(\frac{da^3}{dt} - k_2a^2 - k_3a^4\right) - (T^2)^2k_2a^4$$

$$= T^2T^3\left(\frac{da^4}{dt}+k_3a^3\right) - T^2T^4\left(\frac{da^3}{dt}+k_2a^2-k_3a^4\right) + 2T^2T^4k_2a^2 - (T^2)^2k_2a^4.$$

Выражения в круглых скобках — не что иное, как коэффициенты T^4 и T^3, получаем

$$T^2T^3T^4 - T^2T^4T^3 + 2T^2T^4k_2a^2 - (T^2)^2k_2a^4 = 2T^2T^4k_2a^2 - (T^2)^2k_2a^4.$$

Итак, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{T^3}{T^4}\right)a^2 - k_3a^2 + \frac{1}{(T^3)^2+(T^4)^2}\left[2T^2T^4k_2a^2-(T^2)^2k_2a^4\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left(arctg\frac{T^3}{T^4}\right)a^2 - k_3a^2 + \frac{1}{(T^4)^2\left(\frac{(T^3)^2}{(T^4)^2}+1\right)}\left[2T^2T^4k_2a^2-(T^2)^2k_2a^4\right] = 0.$$

Используя выражения (11) и (9), имеем

$$\left(-k_2\frac{a^2a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2}\right)a^2 + \frac{1}{(T^4)^2\left(\frac{(a^3)^2}{(a^4)^2}+1\right)}\left[2T^2T^4k_2a^2-(T^2)^2k_2a^4\right]$$
$$= -k_2\frac{(a^2)^2a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2} + 2k_2\frac{T^2}{T^4}\frac{a^2(a^4)^2}{(a^3)^2+(a^4)^2)} - k_2\frac{(T^2)^2}{(T^4)^2}\frac{(a^4)^3}{(a^3)^2+(a^4)^2} = 0.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим

$$-\frac{k_2a^4}{(T^4)^2[(a^3)^2+(a^4)^2]}((T^4)^2(a^2)^2 - 2T^2T^4a^2a^4 + (T^2)^2(a^4)^2)$$
$$= -\frac{k_2a^4}{(T^4)^2[(a^3)^2+(a^4)^2]}(T^4a^2-T^2a^4)^2 = 0.$$

Можем предполагать, что $k_2a^4 \neq 0$. Тогда

$$T^4a^2 - T^2a^4 = 0. \tag{13}$$

Подставим выражения для T^j:

$$\left(\frac{da^2}{dt}-k_2a^3\right)a^4 - \left(\frac{da^4}{dt}+k_3a^3\right)a^2 = 0. \tag{14}$$

Сгруппировав и разделив на $(a^2)^2+(a^4)^2$, получим дифференциальное уравнение первого порядка на коэффициенты $a^i(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(arctg\frac{a^2}{a^4}\right) - k_3\frac{a^2a^3}{(a^2)^2+(a^4)^2} - k_2\frac{a^3a^4}{(a^2)^2+(a^4)^2} = 0.$$

Утверждение доказано.

Так как вектор a — единичный, то коэффициенты a^i можем записать в виде

$$\begin{aligned} a^2 &= \sin\varphi, \\ a^3 &= \cos\varphi\sin\psi, \\ a^4 &= \cos\varphi\cos\psi. \end{aligned}$$

Подставим выражения для a^i в полученную систему: первое уравнение рассмотрим в виде (12), второе — в виде (14), получим систему уравнений:

$$\frac{d\psi}{dt} - k_3 + k_2 tg\varphi cos\psi = 0, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} - k_2 sin\psi = 0. \tag{16}$$

Лемма 2. *Коэффициенты T^2, T^3, T^4 равны нулю в силу системы (15)–(16).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим

$$T^4 = \frac{da^4}{dt} + k_3 a^3 = -sin\varphi cos\psi\frac{d\varphi}{dt} - cos\varphi sin\psi\frac{d\psi}{dt} + cos\varphi sin\psi k_3.$$

Из (15) и (16) найдем, чему равны $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\psi}{dt}$, и, подставив в выражение для T^4, получим $T^4 = 0$. Аналогичным образом получаем, что T^2 и T^3 также равны нулю. Лемма доказана.

Следовательно, производная вектора a имеет специальный вид

$$a' = T^1\xi_1,$$

где $T^1 = -k_1 sin\varphi$.

Рассмотрим случай $T^1 = 0$. Получаем цилиндрическую поверхность, состоящую из стационарных образующих, которая регулярна. Но если $T_1 = 0$, то $a' = T^1\xi_1 = 0$, т.е. вектор a(t) — постоянный вектор. Пусть он будет сонаправлен с единичным вектором e^4, ортогональным к E^3.

Имеем $(a, \xi_1) = 0$, следовательно, $(a, \xi_1) = (a, \frac{\partial r}{\partial s}) = \frac{\partial}{\partial s}(a, r) = 0$. Получаем $(a, r) = const$, значит, кривая γ лежит в E^3. Таким образом, поверхность представляет собой обобщенный цилиндр, прямолинейная образующая которого лежит в E^3.

Проанализируем случай $T^1 \neq 0$. Получаем поверхность, состоящую из торсовых образующих (см. (2)). На каждой торсовой образующей существует особая точка, множество всех таких точек образуют особую кривую $\sigma(t)$.

Рассмотрим произвольную кривую, принадлежащую нашей поверхности, радиус-вектор которой имеет вид

$$r(t, u(t)) = \rho(t) + u(t)a(t).$$

Обозначим штрихом производную функции $r(t, u(t))$ по t. Для особой кривой $\sigma(t)$ имеем условие $r_t = 0$, т.е. $r_t = \rho' + ua' = 0$, $u = -\frac{\rho'}{a'}$. Отсюда следует, что $u(t) \in C^4$ и, следовательно, кривая $\sigma(t) \in C^4$.

Найдем касательный вектор к этой кривой

$$r' = \rho' + ua' + u'a.$$

Таким образом, получаем

$$r' = u'a.$$

Следовательно, касательный вектор к особой кривой $\sigma(t)$ сонаправлен с вектором a. Таким образом, нашу линейчатую поверхность можно рассматривать как торсовую поверхность в E^4, образованную касательными к особой кривой. Выясним, какой вид имеет эта особая кривая $\sigma(t)$. Для этого рассмотрим нашу поверхность как торсовую поверхность. Пусть $\zeta_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ — натуральный базис $\sigma(t)$. Тогда радиус-вектор поверхности запишется в виде

$$r(t, v) = \eta(t) + v\zeta_1(t),$$

где $\eta(t)$ — радиус-вектор особой кривой $\sigma(t)$.

Через $\sigma(t)$ проходят две части поверхности, которые соответствуют положительному и отрицательному значениям параметра v. Чтобы выяснить, как они расположены, рассмотрим пересечение поверхности с плоскостью π, перпендикулярной к кривой $\sigma(t)$. Пусть π проходит через точку $P_0 \in \sigma(t)$, и пусть точке P_0 соответствуют значения $t = v = 0$. В пересечении получим пространственную кривую $\sigma_1(t)$, состоящую из двух частей α_1 и α_2. Найдем связь между параметрами t и v. Для этого запишем уравнение пересечения нашей поверхности с плоскостью π:

$$(r(t, v), \zeta_1(0)) = 0. \tag{17}$$

Пусть P_0 — начало координат. Запишем разложение векторов $\eta(t)$ и $\zeta_1(t)$ в окрестности точки P_0:

$$\eta(t) = \eta'(0)t + \eta''(0)\frac{t^2}{2!} + \eta'''(0)\frac{t^3}{3!} + \eta^{(4)}(0)\frac{t^4}{4!} + o(t^4),$$

$$\zeta_1 = \eta'(t) = \zeta_1(0) + \eta''(0)t + \eta'''(0)\frac{t^2}{2!} + \eta^{(4)}(0)\frac{t^3}{3!} + o(t^3).$$

Вычислим производные вектора $\eta(t)$ до четвертого порядка включительно:

$$\eta'(t) = \zeta_1(t),$$

$$\eta''(t) = \zeta_2(t)k_1,$$

$$\eta'''(t) = \zeta_1(t)(-k_1^2) + \zeta_2(t)(k_1') + \zeta_3(t)(k_1k_2),$$

$$\eta^{(4)}(t) = \zeta_1(t)(-3k_1k_1') + \zeta_2(t)(-k_1^3 - k_1k_2^2 + k_1'')$$
$$+\zeta_3(t)(2k_1'k_2 + k_1k_2') + \zeta_4(t)(k_1k_2k_3).$$

Тогда выражение для радиус-вектора нашей поверхности запишется в виде

$$r(t,v) = \zeta_1(0)t + \zeta_2(0)k_1\frac{t^2}{2!} + \zeta_1(0)(-k_1^2)\frac{t^3}{3!} + \zeta_2(0)(k_1')\frac{t^3}{3!}$$
$$+\zeta_3(0)(k_1k_2)\frac{t^3}{3!} + \zeta_1(0)(-3k_1k_1')\frac{t^4}{4!} + \zeta_2(0)(-k_1^3 - k_1k_2^2 + k_1'')\frac{t^4}{4!}$$
$$+\zeta_3(0)(2k_1'k_2 + k_1k_2')\frac{t^4}{4!} + \zeta_4(0)(k_1k_2k_3)\frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$
$$+v\left[\zeta_1(0) + \zeta_2(0)k_1t + \zeta_1(0)(-k_1^2)\frac{t^2}{2!} + \zeta_2(0)(k_1')\frac{t^2}{2!} + \zeta_3(0)(k_1k_2)\frac{t^2}{2!}\right.$$
$$+\zeta_1(0)(-3k_1k_1')\frac{t^3}{3!} + \zeta_2(0)(-k_1^3 - k_1k_2^2 + k_1'')\frac{t^3}{3!}$$
$$\left.+\zeta_3(0)(2k_1'k_2 + k_1k_2')\frac{t^3}{3!} + \zeta_4(0)(k_1k_2k_3)\frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right].$$

Подставив это выражение в (17), получим

$$t + v + o(t) = 0;$$

с точностью до бесконечно малых можем считать

$$v = -t.$$

В плоскости π выберем систему координат: пусть ось x направлена по ζ_2, ось y — по ζ_3, ось z — по ζ_4, тогда для точек пересечения имеем

$$x = (r(t,-t), \zeta_2(0)),$$
$$y = (r(t,-t), \zeta_3(0)),$$
$$z = (r(t,-t), \zeta_4(0)).$$

Получим выражение для радиус-вектора кривой $\sigma_1(t)$:

$$x = -k_1 \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$
$$y = -k_1 k_2 \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$
$$z = -k_1 k_2 k_3 \frac{t^4}{8} + o(t^4).$$

Легко видеть, что кривизна этой кривой при $t \to 0$ стремится к бесконечности, т.е. это особая точка кривой. Множество таких точек образуют ребро возврата на поверхности. Таким образом, в случае $T^1 \neq 0$, мы получаем нерегулярную поверхность.

Предполагая, что кривая γ и векторное поле $a(t)$ — аналитические, рассмотрим аналитические функции $k_3 = k_3(t)$ и $a^4 = a^4(t)$. Если $k_3(t) = 0$ в окрестности U какой-то точки, то из аналитичности следует, что $k_3(t) \equiv 0$. Тогда кривая γ лежит в некотором E^3. В таком случае из системы (12)–(14) получаем

$$\left(a^4 \frac{da^3}{dt} - a^3 \frac{da^4}{dt}\right) + k_2 a^2 a^4 = 0.$$
$$\left(a^4 \frac{da^2}{dt} - a^2 \frac{da^4}{dt}\right) - k_2 a^3 a^4 = 0.$$

Откуда следует, что $\frac{da^4}{dt} = 0$, таким образом, $T^4 = 0$. Подставляя это выражение в систему, получим: либо $a^4 = 0$, либо $T^2 = \frac{da^2}{dt} - k_2 a^3 = 0$ и $T^3 = \frac{da^3}{dt} + k_2 a^2 = 0$. Если $a^4 = 0$ в окрестности U, то $a^4 \equiv 0$ и поверхность F^2 целиком лежит в E^3.

Если T^2, T^3, $T^4 = 0$, то $a' = T^1 \xi_1$. Если $T^1 = 0$, то $a' = const$, т.е. F^2 — обобщенный цилиндр. Если $T^1 \neq 0$, то соответствующий кусок F^2 — торсовая поверхность, на которой имеются особенности (см. выше). Заметим, что особенность существует на каждой прямолинейной торсовой образующей. Но мы рассматриваем регулярную поверхность. Если $k_3(t) \not\equiv 0$, то линейчатая поверхность не лежит в E^3, поэтому является обобщенным цилиндром. Таким образом, в аналитическом случае F^2 либо лежит в E^3, либо является обобщенным цилиндром.

Теперь рассмотрим случай, когда кривая γ и векторное поле $a(t)$ — регулярные класса C^k, $k \geq 5$. Функции $k_3 = k_3(t)$ и $a^4 = a^4(t)$ могут обращаться в нуль на интервалах. Обозначим U_α — замкнутые интервалы, на которых $k_3 = k_3(t) = 0$, и V_β — замкнутые интервалы, на которых $a^4 = a^4(t) = 0$. Рассмотрим пересечение $U_\alpha \bigcap V_\beta = D_{\alpha\beta}$. Если $D_{\alpha\beta}$ — интервал, а не точка, то на этом интервале кривая γ лежит в E^3 и $a^4 = a^4(t) = 0$, следовательно, кусок поверхности F^2, соответствующий этому интервалу целиком лежит в E^3. Кусок поверхности F^2, соответствующий дополнению к $D_{\alpha\beta}$, не лежит в E^3 и представляет собой обобщенный цилиндр. Эти два куска поверхности F^2 склеиваются между собой по прямолинейной образующей, которая у них общая. Заметим, что к поверхности, лежащей в E^3, вдоль другой прямолинейной образующей может подклеиваться другой обобщенный цилиндр, причем у первого и второго цилиндров прямолинейные образующие могут быть не параллельны. Точки накопления на направляющей кривой точек с $k_3 = 0$ и $a^4 = 0$, если они есть, в общем случае приводят к бесконечному числу подклеек поверхностей указанных выше двух типов. Действительно, в окрестности каждой такой точки накопления можно найти последовательность интервалов, для которых соответствующие куски поверхностей принадлежат к одному из указанных типов. Заметим, что по условию теоремы поверхность регулярна, включая прямолинейную образующую, проходящую через точку накопления. Таким образом, доказана теорема 2.

6. В дополнение рассмотрим один пример. Пусть линейчатая поверхность в E^4 с кручением Гаусса, равным нулю, имеет направляющую кривую γ, лежащую в E^3, и прямолинейную образующую, параллельную постоянному вектору e_4. Тогда радиус-вектор этой поверхности имеет вид

$$\rho(t, u) = \rho(t) + ue_4.$$

На поверхности с нулевым гауссовым кручением параллельное перенесение в нормальном расслоении вдоль любого пути в односвязной области не зависит от пути перенесения, т.е. если мы возьмем замкнутую кривую в односвязной области и перенесем вдоль такой кривой вектор n, то он вернется в первоначальное положение.

Рассмотрим теперь случай замкнутой кривой, негомотопной нулю, т.е. которая не стягивается в точку. В качестве такой кривой возьмем кривую $\gamma \subset E^3$. Построим параллельно переносимое поле в нормальном расслоении вдоль γ. Нормалями к поверхности будут $n_1 = \xi_2$, $n_2 = \xi_3$. Для того чтобы ξ_2 и ξ_3 были однозначно определены, предположим, что $k_1 \neq 0$. Заметим, что векторы натурального базиса не являются параллельно переносимыми, если кручение кривой γ не равно нулю. Действительно, коэффициент кручения этого базиса равен k_2:

$$\mu_{21|1} = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} \xi_3\right) = (-k_1\xi_1 + k_2\xi_3, \xi_3) = k_2.$$

Построим параллельно переносимый базис. Зададим

$$n = cos\theta n_1 + sin\theta n_2,$$

$$m = -sin\theta n_1 + cos\theta n_2.$$

Этот базис будет параллельно переносим тогда и только тогда, когда $\left(\frac{\partial n}{\partial s}, m\right) = 0$, что сводится к уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + k_2 = 0.$$

Пусть L — длина кривой γ. Рассмотрим приращение угла θ между параллельно переносимым в нормальном расслоении нормальным векторным полем n и вектором ξ_2. Это приращение определяется формулой $\Delta\theta = -\int\limits_0^L k_2 dt$.

Если интеграл от кручения кривой γ не кратен 2π (а такие кривые легко указать), то после параллельного перенесения вектор n не вернется в свое первоначальное положение. Если интеграл от кручения кривой — рациональное число $\frac{p}{q}$, то вектор n вернется в свое первоначальное положение после q оборотов, а если — иррациональное, то никогда не вернется. Заметим, что в случае тора Клиффорда при параллельном перенесении вектора в нормальном расслоении вдоль любой замкнутой кривой (гомотопной и негомотопной нулю), вектор возвращается в первоначальное положение. В рассмотренном примере возникает явление, которое можно назвать **"странным"кручением**.

Выражаю благодарность моему научному руководителю д-ру физ.-мат. наук, проф. Ю.А. Аминову за помощь в работе над статьей. Также выражаю благодарность д-ру физ.-мат. наук, чл.-корр. НАНУ А.А. Борисенко и канд. физ.-мат. наук В.А. Горькавому за сделанные замечания.

References

[1] *V.F. Kagan*, The foundation of the surfaces theory in the tensor presentation. OGIZ, Moscow–Leningrad, 1947. (Russian)

[2] *V.I. Shulikovskij*, The classical differential geometry in the tensor presentation. Fizmatgiz, Moscow, 1963. (Russian)

[3] *W. Blaschke*, The differential geometry and geometrical foundation of the theory of relativity by Einsteins. ONTI, Moscow–Leningrad, 1935. (Russian)

[4] *S.N. Krivoshapko*, Torses and shells. (Reference book). Univ. People Friendship Publ. House, Moscow, 1991. (Russian)

[5] *A.V. Pogorelov*, The extrinsic geometry of convex surfaces. Nauka, Moscow, 1969. (Russian)

[6] *V.A. Toponogov*, The Riemannian spaces with curvature limited from below. — *Usp. Mat. Nauk* **14** (1985), No. 1(85), 87–130. (Russian)

[7] *A.A. Borisenko*, On the constraction of continuous surface with stright line. — *Ukr. Geom. Sb.* **14** (1973), 21–24. (Russian)

[8] *A.A. Borisenko*, On the parabolic surfaces in Euclidean space. — *Ukr. Geom. Sb.* **25** (1982), 3–5. (Russian)

[9] *A.A. Borisenko*, On the cylindrical many-dimensional surfaces in Lobachevsky space. — *Ukr. Geom. Sb.* **33** (1990), 18–27. (Russian)

[10] *A.A. Borisenko*, The intrinsic and the extrinsic geometry of many-dimensional submanifolds. Publ. House "Ekzamen", Moscow, 2003. (Russian)

[11] *V.Yu. Rovenskij*, The condition of decompositions ruled and parabolic surfaces in S^m and CP^m. — *Ukr. Geom. Sb.* **32** (1989), 103–115. (Russian)

[12] *L.A. Masalstev*, On helicoidal surfaces in Euclidean space. — *Ukr. Geom. Sb.* **26** (1983), 100–103. (Russian)

[13] *S.E. Con-Fossen*, Some questions of the differential geometry in the "large". Publ. House Fiz.-mat. Lit., Moscow, 1959. (Russian)

[14] *I.Ya. Bakelman, A.L. Verner, and B.E. Cantor*, Introduction in the differential geometry in the "large". Nauka, Moscow, 1973. (Russian)

[15] *A.A. Borisenko*, On compact surfaces of nonpositive extrinsic curvature in the spherical space. — *Ukr. Geom. Sb.* **17** (1975), 33–35. (Russian)

[16] *A.A. Borisenko, jr.*, The construction of globally-minimal submanifolds by method of calibrate. Doct. diss., MGU, Moscow, 1996. (Russian)

[17] *Yu.A. Aminov*, The geometry of submanifolds. Naukova Dumka, Kiev, 2002. (Russian)

[18] *Yu.A. Aminov*, The surfaces in E^4 with Gauss curvature coincident with Gauss torsion up to the sign. — *Mat. Zametki* **56** (1994), 1211–1245. (Russian)

Ruled surfaces in E^n

O.A. Goncharova

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering
National Academy of Sciences of Ukraine
47 Lenin Ave., Kharkov, 61103, Ukraine
E-mail:goncharova@ilt.kharkov.ua

Received December 22, 2004

Some local and global properties of ruled surfaces in E^n is devoted to a study. In particular, the total Gauss curvature of the complete regular orientable ruled surface was calculated. Also, Gaussian torsion was investigated, and ruled surfaces in E^4 with zero Gaussian torsion were stadied in detail.

Mathematics Subject Classification 2000: 53A07.

Key words: ruled surfaces, Gauss curvature, Gauss torsion.