

**Ю. Л. Болотин<sup>1</sup>, И. Ю. Вакульчик<sup>2</sup>, К. А. Лукин<sup>3</sup>, В. А. Черкасский<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической физики им. А. И. Ахиезера НИИ ХФТИ НАН Украины*

*1, ул. Академическая, Харьков, 61108, Украина*

<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

*4, пл. Свободы, Харьков, 61077, Украина*

<sup>3</sup>*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*

*12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: [lukin.konstantin@gmail.com](mailto:lukin.konstantin@gmail.com)

## СМЕШАННОЕ СОСТОЯНИЕ В СОСТАВНОМ КОЛЬЦЕВОМ БИЛЬЯРДЕ

Кольцевой бильярд – одна из наиболее популярных моделей для изучения фундаментальных свойств квантового и волнового хаоса в современной квантовой механике и микроволновой электродинамике. В работе рассмотрена модель, пригодная как в первой, так и во второй области: составной бильярд, состоящий из двух кольцевых бильярдов (хаотического и регулярного), соединенных узкой перемычкой (узким волноводом). С помощью численных методов исследованы распределения уровней энергии частицы (резонансных частот) и соответствующие пространственные распределения квадрата волновой функции (квадрата электрической компоненты поля). Продемонстрирована хаотизация движений в регулярном бильярде при слабом влиянии почти изолированного хаотического кольцевого бильярда. Показано существование смешанных регулярно-хаотических состояний в исследуемых бильярдах и указано их возможное применение в генераторах хаоса. Ил. 13. Библиогр.: 18 назв.

**Ключевые слова:** волновой хаос, квантовый хаос, микроволновый резонатор, микроволновый и квантовый бильярд, кольцевой бильярд.

Компоненты осциллирующих электромагнитных (ЭМ) полей описываются уравнением Гельмгольца. Для определения пространственных распределений ЭМ-поля, которые могут существовать в различных замкнутых объемах – объемных резонаторах, необходимо решить задачу на собственные колебания (спектральная задача), которая предполагает решение уравнения Гельмгольца с учетом краевых условий на границах резонатора. Решения спектральной задачи дают значения резонансных частот и пространственное распределение полей, соответствующих этим частотам. В тех случаях, когда поверхности, ограничивающие резонансный объем, совпадают с координатными поверхностями, такая задача может быть решена аналитически, а такие границы резонатора иногда называются интегрируемыми. Если же границы имеют произвольные формы, то задача не решается аналитически и эти границы называются неинтегрируемыми. Иногда такие системы называются волновыми бильярдами по аналогии с обычными бильярдами, в которых изучается динамика материальной точки при ее многократном отражении от границ. Системы, в которых рассматривается динамика квантово-механической (КМ) частицы, называются квантовыми бильярдами. Пространственно-временная эволюция КМ-частицы описывается нестационарным уравнением Шредингера для волновой функции. Стационарные распределения волновых функций описываются стационарным уравнением Шредингера, которое по форме совпадает с уравнением Гельмгольца для компонент ЭМ-поля. Более того, формулировки спектральных задач в обоих случаях – волнового и квантового бильярдов – математически эквивалентны.

Уравнения, описывающие стационарные поля двумерных волновых бильярдов, формально совпадают с двухмерным уравнением Шредингера для квантовых бильярдов. Эта эквивалентность, с одной стороны, дает возможность экспериментально моделировать и исследовать квантовые явления с помощью микроволновых резонаторов, используя методы измерения амплитудных распределений ЭМ-поля [1–4], а с другой стороны, применять обширные знания о квантовых бильярдах [5] для изучения особенностей распределения ЭМ-полей, распределения резонансных частот и расстояний между ними в электродинамических системах [3, 4].

Например, в ходе изучения микроволновых кольцевых бильярдов в работе [6] впервые экспериментально реализовано ЭМ-моделирование эффекта туннелирования КМ-частиц, усиленного хаосом. Этот эффект был впервые предсказан Бохигасом и коллегами в 1993 г. для квантовой задачи, чем вызвал усиленный интерес к квантовым кольцевым бильярдам и подобным системам [7]. Несимметричный кольцевой бильярд является одной из наиболее изученных хаотических систем [6–9].

В данной работе мы рассматриваем более сложный квантовый бильярд: составную систему, основными частями которой являются два кольцевых бильярда, соединенных тонкой перемычкой.

**1. Постановка задачи.** Двумерные бильярды являются одним из наиболее простых классов гамильтоновых систем, проявляющих все характерные свойства хаотической динамики. Они задаются двумерным одночастичным гамильтонианом

$$H = \begin{cases} \frac{p_x^2 + p_y^2}{2}, & \text{при } \vec{r} \in \Omega, \\ \infty, & \text{при } \vec{r} \notin \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где область  $\Omega$  – внутренняя область бильярда.

Квантовый аналог классического бильярда представляет собой частицу, свободно движущуюся в области  $\Omega$  с упругими стенками. Математически это выражается стационарным уравнением Шредингера для волновой функции  $\psi(\vec{r})$

$$E\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega \quad (2)$$

с граничным условием Дирихле

$$\psi(\vec{r} \in \partial\Omega) = 0, \quad (3)$$

где  $\partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ ;  $\hbar$  – постоянная Планка;  $m$  – масса частицы.

Ввиду двумерности системы и ее обратимости во времени волновые функции всегда можно выбрать вещественными, что позволяет отождествить их с компонентой электрического поля в соответствующем микроволновом резонаторе.

Кольцевой бильярд относится к наиболее популярной системе, удобной для изучения КМ и волнового хаоса. В случае аксиально-симметричного кольцевого бильярда движение КМ-частицы происходит в области  $\Omega$ , ограниченной двумя концентрическими окружностями. Для такой системы существует два интеграла движения (для энергии и углового момента), таким образом, наблюдаемое движение КМ-частицы будет регулярным. Если же центр внутреннего диска смещается, то момент импульса перестает сохраняться и движение становится хаотическим.

В настоящей работе предлагается изучение динамических эффектов в составном кольцевом бильярде, состоящем из двух кольцевых бильярдов (один – аксиально-симметричный, другой – со смещенным центральным диском), соединенных тонкой длинной прямоугольной перемычкой (рис. 1). Смещение внутреннего диска левого бильярда обозначено через  $\delta$ . Во всех расчетах длина центральной перемычки взята равной 0,5, а толщина – 0,1.

Первый из этих бильярдов относится к классу интегрируемых, так как имеет соосные цилиндрические границы, а второй относится к классу неинтегрируемых бильярдов, так как цилиндры расположены несимметрично. Такая система представляет особый интерес для исследования, потому что проявляет одновременно хаотическое и регулярное поведение в различных областях, разделенных в конфигурационном пространстве. В квантовом случае это приводит к так

называемому смешанному состоянию – отдельные квантовые волновые функции сочетают в себе регулярные и хаотические части, сосредоточенные в различных координатных областях [10–15].

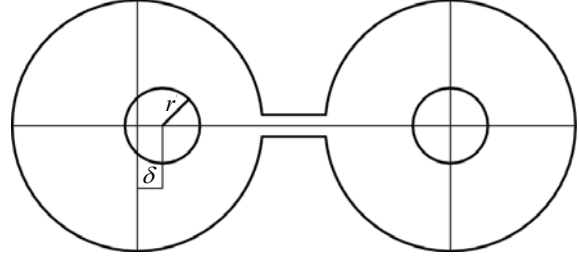


Рис. 1. Составной кольцевой бильярд. Радиусы внешних окружностей выбраны равными единице, радиусы внутренних окружностей  $r$  равны между собой

В разд. 2 кратко излагается применяемый метод численного решения, рассматриваются некоторые особенности применения его к данной задаче. В разд. 3 приводятся результаты численного моделирования для изолированных (обычных) кольцевых бильярдов, которые являются фундаментом для анализа результатов моделирования составного бильярда, представленных в разд. 4.

**2. Методы численного анализа.** Для нетривиальных форм границы области  $\Omega$  получить аналитическое решение уравнения (2) невозможно, поэтому необходимо применение численных методов. Вначале для удобства перепишем уравнение (2), заменив энергию на квадрат волнового числа (тут и далее вводится система единиц  $2m = \hbar^2 = 1$ ):

$$(k^2 + \Delta)\psi(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Omega. \quad (4)$$

Существует множество численных методов решения уравнения Шредингера, однако не все они могут быть эффективно применены для квантовых бильярдов. Основная особенность этих систем – отсутствие потенциалов внутри резонаторов – может быть использована для построения эффективных алгоритмов численного решения. Широко используемый класс таких алгоритмов – метод интеграла по границе. Его эффективность основана на использовании того, что собственная волновая функция уравнения (4) полностью задается значением нормальной производной на границе области. Введем нормальную производную как функцию параметра длины вдоль границы  $s$

$$u(s) = \frac{\partial}{\partial n}\psi(\vec{r}(s)), \quad \vec{r}(s) \in \partial\Omega. \quad (5)$$

Волновая функция в любой точке выражается через нормальную производную на границе с помощью функции Грина уравнения (4) следующим образом [16]:

$$\psi(\vec{r}) = \oint_{\partial\Omega} G_k(\vec{r}, \vec{r}(s)) u(s) ds. \quad (6)$$

Удобство заключается в том, что функция Грина не зависит от формы области  $\Omega$  и всегда может быть выбрана как

$$G_k(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (7)$$

где  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода. Используя нормальную производную, уравнение (4) с граничным условием (3) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$u(s) = -2 \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} G_k(\vec{r}(s), \vec{r}(s')) u(s') ds'. \quad (8)$$

Для нормальной производной функции Грина получаем

$$\frac{\partial}{\partial n} G_k = \frac{ik}{4} \frac{\vec{n}(s) \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))}{|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')|} \times H_1^{(1)}(k|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')|). \quad (9)$$

Таким образом, двумерная задача сведена к одномерной, которую проще решать численно. Для этого приближенно представим интеграл по границе в уравнении (8) в виде конечной суммы. Получим конечную систему однородных линейных уравнений

$$\sum_k A_{ik} u_k = 0. \quad (10)$$

Для решения (10) необходимо найти значения волнового числа  $k$ , при которых определитель системы  $\det(\mathbf{A})$  обнуляется. Эти значения  $k$  и дадут искомые значения энергии состояний.

На этом этапе возникает затруднение: значение полученного определителя ни для каких значений  $k$  не равно нулю, так как он является комплексным числом, и одновременно мнимая и вещественная части не обнуляются. Кроме того, для расчета волновых функций необходимо нахождение значений нормальной производной  $u_k$  в точках дискретизации. Для решения этих проблем удобно предварительно произвести сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\dagger, \quad (11)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  – унитарные матрицы;  $\mathbf{S}$  – диагональная вещественная матрица, состоящая из сингулярных значений матрицы  $\mathbf{A}$ . Минимумы первого (минимального) сингулярного значения как функции волнового числа соответствуют искомым собственным значениям, а соответствующие столбцы матрицы  $\mathbf{U}$  задают значения нормальной производной. Кроме того, этот подход позволяет выявлять значения энергий, вблизи которых есть квазивырожденные состояния. Если вблизи полученного значения энергии имеет резкий минимум

не только первое сингулярное значение, но и второе, – значит, вблизи этой энергии есть два состояния.

Примеры вычисления сингулярных значений приведены на рис. 2 и 3. Видно, что вблизи  $k = 77$  оба сингулярных значения имеют резкий минимум, что свидетельствует о наличии более чем одного состояния, а при уменьшении шага и увеличении точности вычислений действительно можно выявить два значения волнового числа  $k$ . На данном примере можно видеть, что использование сингулярного разложения дает возможность обнаружить квазивырождения и найти все квазивырожденные уровни со значительной экономией вычислительных ресурсов. Первоначально происходит поиск всех минимальных значений первого сингулярного значения. В случае обнаружения минимума второго сингулярного значения выполняется повторный поиск искомым значений волнового числа с меньшим шагом и с большей степенью дискретизации матрицы  $\mathbf{A}$ , что повышает точность.

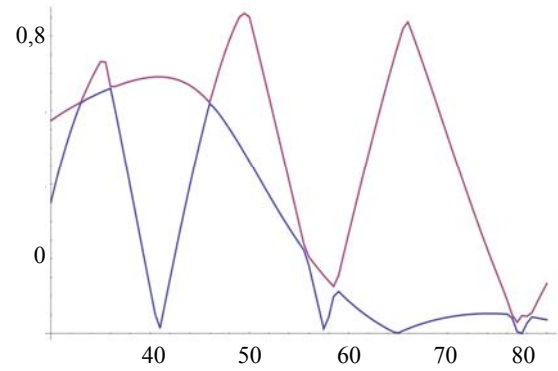


Рис. 2. Зависимость первого и второго сингулярного значения от волнового числа для симметричного бильярда ( $r = 0,2$ )

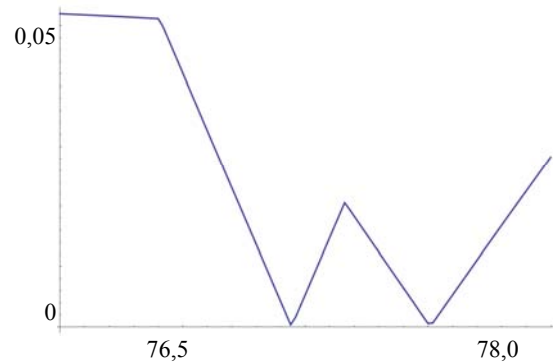


Рис. 3. Уточненный расчет первого сингулярного значения в окрестности минимума второго сингулярного значения (см. рис. 2)

### 3. Изолированный кольцевой бильярд.

Сначала применим метод, описанный в разд. 2, для простого (изолированного) кольцевого бильярда.

На рис. 4, 5 изображены примеры двух волновых функций, соответствующих низким состояниям (тут и далее использованы параметры  $r = 0,3$ ,  $\delta = 0,2$ , интенсивность белого цвета обозначает абсолютную величину волновой функции в каждой точке). Классифицировать эти состояния как регулярные или хаотические в строгом смысле нельзя, так как сами эти понятия по отношению к квантовым состояниям можно использовать, только связывая их с классической динамикой. Однако, используя менее строгие критерии, такие как поведение нормальной производной, можно в нестрогом смысле классифицировать все состояния.

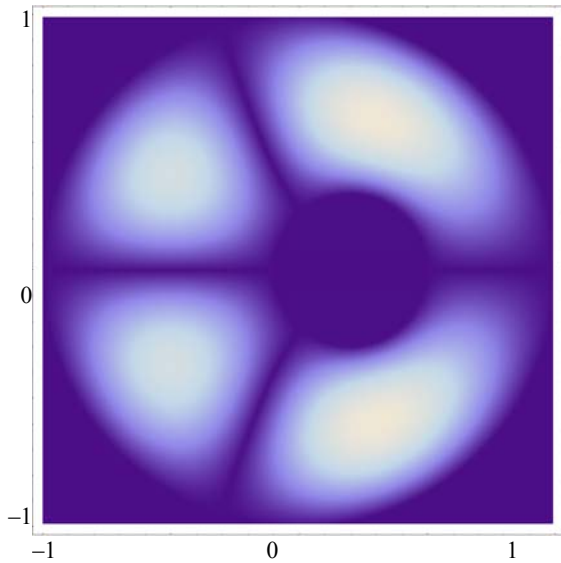


Рис. 4. Волновая функция нижнего антисимметричного состояния ( $k = 4,45$ ) кольцевого бильярда

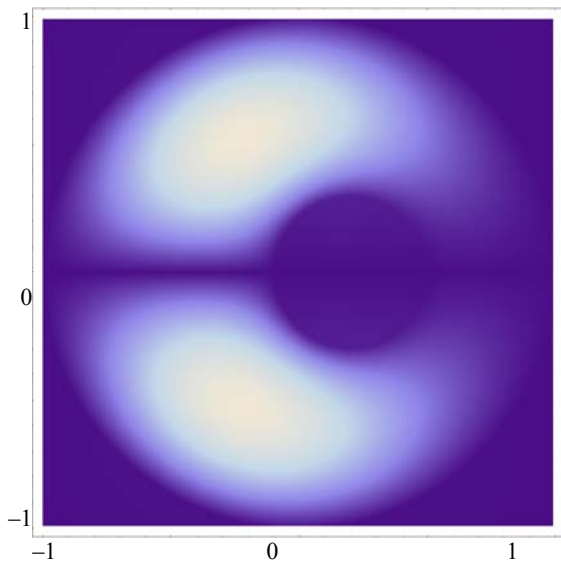


Рис. 5. Волновая функция антисимметричного состояния ( $k = 5,67$ ) кольцевого бильярда

Анализ нормальной производной как функции параметра длины вдоль границы (рис. 6) позволяет в некотором смысле отнести волновую функцию к регулярным. Видно, что нормальная производная близка к периодической функции с простым периодом.

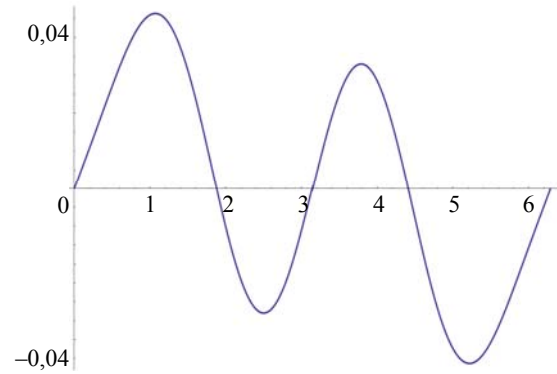


Рис. 6. Нормальная производная волновой функции, изображенной на рис. 5. Изображена ее часть на внешней границе

Начиная со значений энергии  $E \sim 100$  проявляется влияние хаоса на волновые функции. На рис. 7 изображено одно из первых состояний с выраженным хаотическим поведением. Более характерное хаотическое состояние приведено на рис. 8. Нормальная производная волновой функции этого состояния (рис. 9) является уже более сложной, с более резкими скачками, явно выделенными областями с различным поведением. Можно сказать, что она имеет более широкий фурье-спектр.

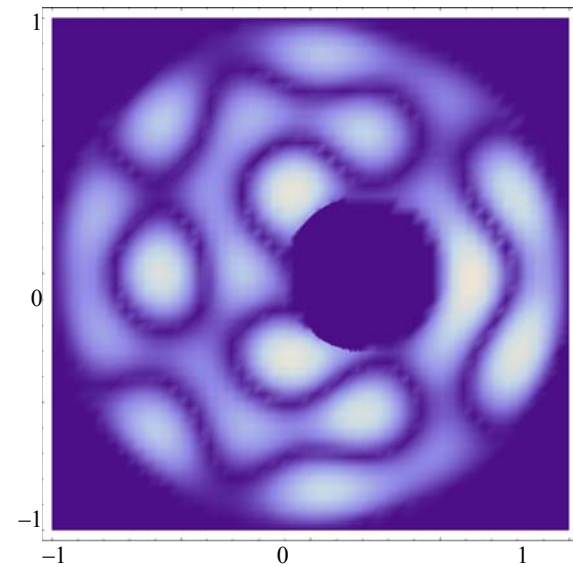


Рис. 7. Волновая функция состояния ( $k = 12,2$ ) кольцевого бильярда

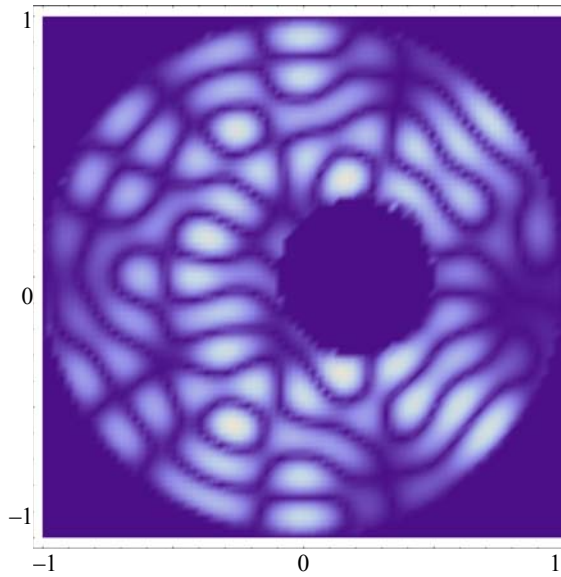


Рис. 8. Волновая функция состояния ( $k = 23,4$ ) кольцевого бильярда

#### 4. Составной кольцевой бильярд.

Перейдем к рассмотрению составного бильярда. Его фазовое пространство состоит из двух достаточно изолированных областей, соответствующих одиночным бильярдам (кроме части пространства, соответствующей перемычке). Поэто-

му следует ожидать, что большая часть уровней будет близка к уровням изолированных бильярдов с соответствующими параметрами, хотя они и будут немного смещены. Ясно, что эти состояния должны быть локализованы в левой или правой части составного бильярда.

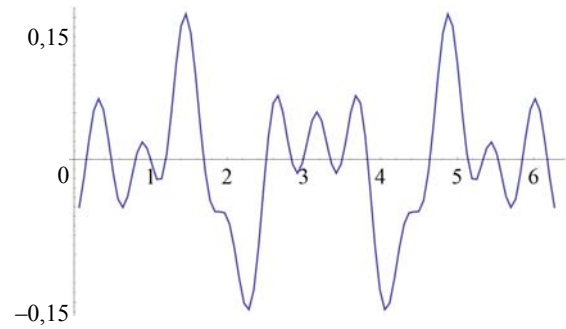


Рис. 9. Нормальная производная волновой функции, изображенной на рис. 8

На рис. 10 мы видим состояние составного бильярда, соответствующее состоянию одиночного, изображенного на рис. 4. Его уровень энергии отличается от соответствующего уровня в изолированном бильярде приблизительно на 2 %, но в целом совпадение очевидно.

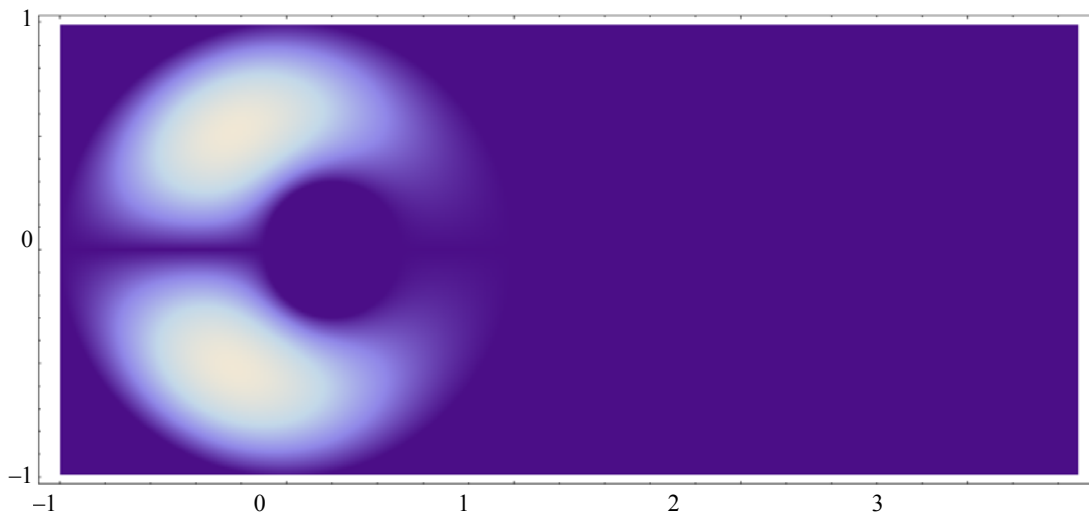


Рис. 10. Волновая функция состояния в составном кольцевом бильярде, соответствующего состоянию изолированного бильярда на рис. 4

Однако далеко не все состояния составного бильярда локализованы в одной из его частей. Первый пример перекрывающихся состояний: состояния, соответствующие классическим орбитам шепчущей галереи. Эти орбиты классических бильярдов являются квазипериодическими орбитами, не касающимися внутреннего диска. Из этого становится ясно, что квантовые состоя-

ния, соответствующие этим орбитам, должны быть малочувствительны к смещению внутреннего диска. Таким образом, эти состояния практически одинаковы для одиночных бильярдов, объединенных в составной, а значит, должны присутствовать смешанные состояния, волновые функции которых представляют собой две одинаковые составляющие в обеих частях бильярда.

Существуют и другие смешанные состояния. Рассмотрим два изолированных в разных частях составного бильярда состояния. Начнем сдвигать центральный диск левой части бильярда. В результате оба состояния также начнут изменяться (причем изолированное в правой части состояние будет сдвигаться намного меньше). При этом в части случаев значения энергий рассматриваемых состояний начнут сближаться. При некотором значении параметра смещения внутреннего диска разность энергий этих состояний будет минимальной. Пересечься состояния одинаковой симметрии при этом не могут, поэтому они начнут расталкиваться. Это явление называется избеганием пересечений и приводит к обмену мод между состояниями. В электродинамике оно описывает так называемое взаимодействие мод резонатора сложной формы. При значении параметра, при котором энергии очень близки,

оба состояния будут на промежуточной стадии обмена мод, и поэтому вклад от обоих состояний в волновую функцию будет существенным.

Наибольший интерес представляют истинно смешанные состояния, в которых одна из частей хаотическая. На рис. 11 приведен пример такого состояния. Левая часть его является чисто хаотической, а правая соответствует орбите шепчущей галереи. Тем не менее, в правой части также видно влияние хаоса: линии обнуления волновой функции нерегулярно пересекаются.

При достаточно высоких энергиях начинает проявляться эффект влияния хаотизации на правую (регулярную) часть бильярда. На рис. 12 мы видим состояние хаотическое в левой части и существенно искаженное в правой. Для сравнения на рис. 13 приведено соответствующее состояние изолированного симметричного бильярда.

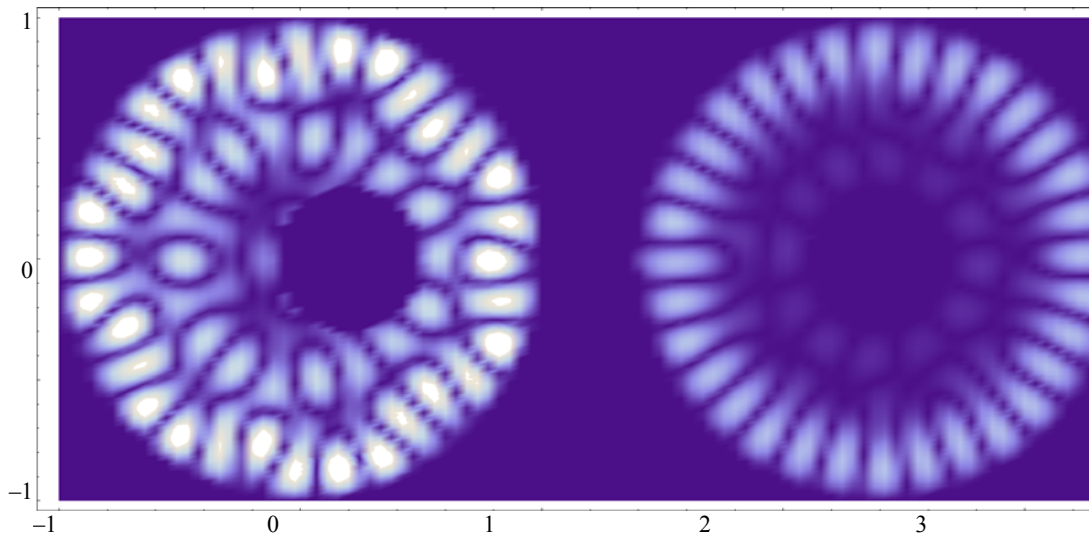


Рис. 11. Пример смешанного состояния ( $k = 21, 1$ ) в составном кольцевом бильярде

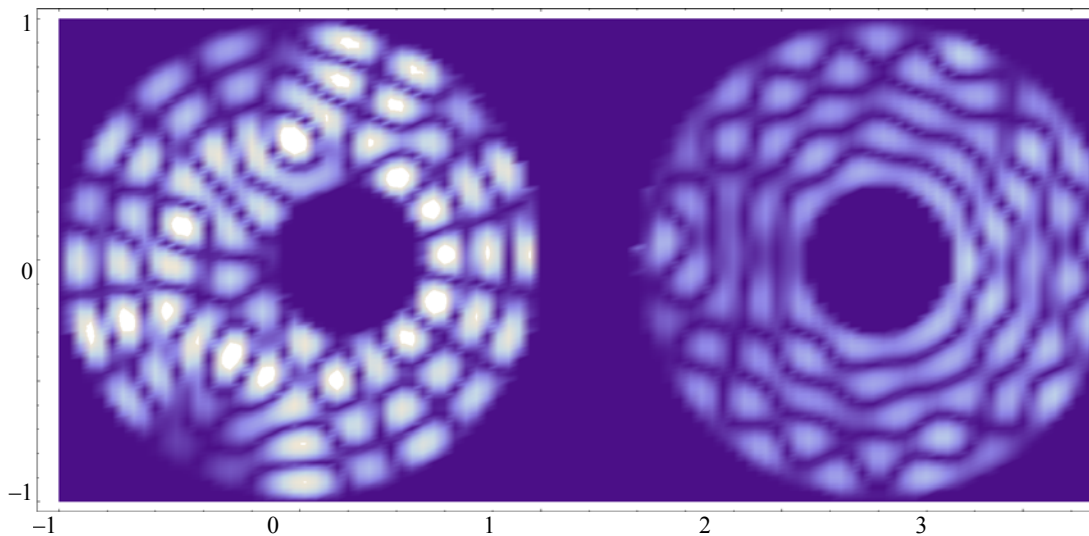
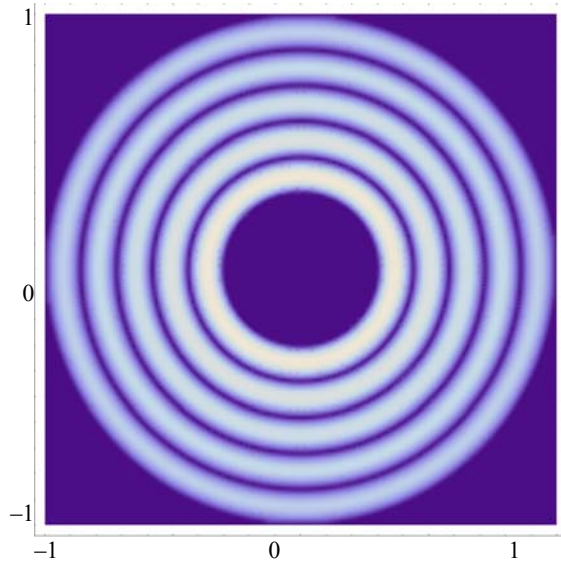


Рис. 12. Пример смешанного состояния ( $k = 22, 3$ ) в составном кольцевом бильярде

Рис. 13. Состояние  $k = 22,42$ 

Взаимное влияние структур левой и правой части составного бильярда является проявлением того факта, что при достаточно больших значениях волнового числа центральный соединительный канал перестает эффективно изолировать эти части.

**Выводы.** Рассмотрен составной квантовый бильярд, состоящий из двух связанных кольцевых резонаторов с управляемым переходом от геометрии с полностью регулярным движением (симметричные кольцевые резонаторы) к геометрии с хаотической динамикой в несимметричных кольцевых резонаторах. Показано, что в зависимости от степени несимметричности система демонстрирует наличие полностью изолированных регулярных состояний. Кроме того, наблюдаются смешанные состояния, образованные хаотическим состоянием в несимметричном кольцевом резонаторе и регулярным состоянием в симметричном резонаторе, несмотря на то что вся система описывается одной волновой функцией.

Полученные результаты представляют интерес для дальнейших экспериментальных исследований электродинамики в микроволновых резонаторах. Полученные данные о смешанных состояниях позволяют предположить, что малое изменение сдвига внутреннего диска в левой части полости может приводить к существенному изменению уровня прохождения волны через центральную перемычку, позволяя контролировать эти прохождения, не изменяя при этом параметры самой перемычки и волны. Такое свойство может быть использовано для регулировки или смены режима работы микроволновых генераторов шума, использующих такие резонаторы [17,18].

## Библиографический список

1. Sridhar S. Experimental Observation of Scarred Eigenfunctions of Chaotic Microwave Cavities / S. Sridhar // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – 67, N 7. – P. 785–788.
2. Sridhar S. Microwave experiment on Chaotic Billiards / S. Sridhar, D. Hogenboom, B. Willemsen // *J. Stat. Phys.* – 1992. – 68, N 1/2. – P. 239–258.
3. Ganapolskiy E. M. Quantum Chaos in the 3D Electromagnetic systems of Millimeter wave Range / E. M. Ganapolskiy // *Third Intern. Kharkov Symp. Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'98): Proc.* – Kharkov, 1998. – Vol. 1. – P. 218–220.
4. Microwave Resonant Systems Based on Chaotic Billiard Geometry / V. N. Derkach, K. A. Lukin, A. S. Plevako, E. V. Goroshko // *Intern. Symp. on Electromagnetic Theory (EMTS): Proc.* – 2004. – P. 324–326.
5. Stockmann H.-J. Quantum Chaos: An Introduction / H.-J. Stockmann. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 207 p.
6. First Experimental Evidence for Chaos-Assisted Tunneling in a Microwave Annular Billiard / C. Dembowski, H.-D. Graf, A. Heine1 et al. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arXiv:chao-dyn/9911023v2>. – Загл. с экрана.
7. Quantum tunneling and chaotic dynamics / O. Bohigas, D. Boose, R. Eglydio de Carvalho and V. Marvulle // *Nuclear Physics* – 1993. – A560, iss. 1 – P. 197–210.
8. Robinett R. W. Periodic orbit theory analysis of the circular disk or annular billiard: Nonclassical effects and the distribution of energy eigenvalues / R. W. Robinett // *Am. J. Phys.* – 1999. – 67, N 1. – P. 67–77.
9. Fendrik A. J. Towards an analytical formula for the eigenvalues of the Aharonov–Bohm annular billiard / A. J. Fendrik and M. J. Sanchez // *J. Math. Phys.* – 2001. – 42, N 3. – P. 996–1005.
10. Стохастическая ядерная динамика / Ю. Л. Болотин, В. Ю. Гончар, Е. В. Инопин и др. // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* – 1989. – 20, вып. 4. – С. 878–929.
11. Болотин Ю. Л. Квантовые проявления классической стохастичности в структуре волновых функций квадрупольных колебаний ядер / Ю. Л. Болотин, В. Ю. Гончар, В. Н. Тарасов // *Ядерная физика.* – 1995. – 58, N 9. – С. 1590–1600.
12. Quadrupole oscillations as paradigm of the chaotic motion in nuclei / V. P. Berezovoj, Yu. L. Bolotin, V. Yu. Gonchar, M. Ya. Granovsky // *Particles & Nuclei.* – 2003. – 34, N 2. – С. 388–447.
13. Berezovoj V. P. Quantum Manifestations of Classical Stochasticity in the Mixed State / V. P. Berezovoj, Yu. L. Bolotin, V. A. Cherkaskiy // *Progress of Theoretical Physics Supplement.* – 2003. – 150. – P. 326–329.
14. Березовой В. П. Проявления квантового хаоса в квадрупольных поверхностных осцилляциях ядер / В. П. Березовой, Ю. Л. Болотин, В. А. Черкасский // *Вестн. ХНУ.* – 2004. – № 628. – С. 47–60.
15. Berezovoj V. P. Signatures of quantum chaos in wave functions structure for multi-well 2D potentials / V. P. Berezovoj, Yu. L. Bolotin, V. A. Cherkaskiy // *Phys. Lett. A.* – 2004. – 323, iss. 3–4. – P. 218–223.
16. Backer A. Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems / A. Backer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arXiv:nlin/0204061v1>. – Загл. с экрана.
17. Lukin K. Noise Radar Technology / K. Lukin // *Telecommunications and Radio Engineering.* – 2000. – 55, N 12. – P. 8–16.
18. Lukin K. A. Application of Dynamical Chaos for Design of Random Waveform Generators / K. A. Lukin, V. V. Kulyk and O. V. Zemlyaniy // *Proc. of The First Intern. Workshop on Noise Radar Technology.* – 2002. – P. 127–135.

Рукопись поступила 21.08.2013 г.

Yu. L. Bolotin, I. Yu. Vakulchik,  
K. A. Lukin, V. A. Cherkaskiy

### MIXED STATE IN A COMBINED ANNULAR BILLIARD

Annular billiards are among the most popular models for studying of fundamental properties of quantum and wave chaos in the modern quantum mechanics and microwave electrodynamics, respectively. In the present paper we propose the model suitable for both the areas mentioned above, namely: the compound billiards composed of two annular billiards (the chaotic and the regular ones) connected via a narrow crosspiece (narrow waveguide). By means of numerical methods some distributions of particle energy levels (resonant frequencies) and corresponding spatial distributions of wave function squared (a square of electric field component) are investigated. Chaotization of particle motion in regular billiards has been shown in case of weak influence of almost isolated chaotic annular billiard. Existence of the mixed regular-chaotic states in the investigated billiards has been shown and their possible application in chaos generators is specified.

**Key words:** wave chaos, quantum chaos, microwave resonator, microwave and quantum billiard, annular billiard.

Ю. Л. Болотін, І. Ю. Вакульчик,  
К. О. Лукін, В. О. Черкаський

### ЗМІШАНИЙ СТАН У СКЛАДЕНОМУ КІЛЬЦЕВОМУ БІЛЬЯРДІ

Кільцевий більярд – одна з найбільш популярних моделей для вивчення фундаментальних властивостей квантового і хвильового хаосу в сучасній квантовій механіці й мікрохвильовій електродинаміці. У роботі розглянуто модель, що придатна як у першій, так і в другій області: складений більярд, що є компаундом двох кільцевих більярдів (хаотичного і регулярного), з'єднаних вузькою перемичкою (вузьким хвилеводом). За допомогою чисельних методів досліджено розподіл рівнів енергій частинки (резонансних частот) і відповідні просторові розподіли хвильової функції (електричної компоненти поля). Продемонстровано хаотизацію рухів у регулярному більярді при слабкому впливі майже ізольованого хаотичного кільцевого більярду. Показано існування змішаних регулярно-хаотичних станів у досліджуваних більярдах і зазначено їх можливе застосування в генераторах хаосу.

**Ключові слова:** хвильовий хаос, квантовий хаос, мікрохвильовий резонатор, мікрохвильовий і квантовий більярд, кільцевий більярд.