

А. А. Майстренко*, С. С. Мельник, Г. М. Притула, О. В. Усатенко

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

4, Пл. Свободы, Харьков, 61077, Украина

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: usatenko@ire.kharkov.ua

СЛУЧАЙНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ АНТЕННЫ С УПРАВЛЯЕМОЙ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

В работе изучены линейные антенные решетки, широко используемые как в теоретических исследованиях, так и в практических целях. Предполагается, что в интенсивности дипольных излучателей решетки и расстояния между ними являются случайными величинами, что существенно усложняет изучаемую проблему. Показано, что интенсивность интерференционного поля излучения может быть выражена через корреляционные функции случайных величин. Разработан метод построения двух случайных последовательностей с заданными бинарными автокорреляционными и корреляционными функциями, позволяющий решить обратную задачу синтеза случайных антенн по заданной диаграмме направленности. Приведены примеры численной реализации метода построения таких антенн, которые могут быть использованы в практических применениях. Ил. 3. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: антенные решетки, диаграмма направленности, корреляционные функции, генерация коррелированных последовательностей.

Фазированные антенные решетки [1] принадлежат к классу антенн с управляемой диаграммой направленности (ДН). Одним из перспективных направлений развития теории и методов этого класса антенн являются решетки с неэквидистантным расположением излучающих элементов. В настоящей работе показано, что если число таких элементов велико, то построение решетки с заданной ДН может быть проведено статистическими методами. Эти методы успешно развивались на протяжении последних десятилетий при изучении неупорядоченных систем, в теории андерсоновской локализации и слоистых систем [2], построении фильтров и линий задержек и многих других [3].

Антенная решетка представляет собой систему идентичных дискретных излучающих элементов, организованных в определенную структуру. Если расположение излучателей и их интенсивности являются случайными, то статистические свойства такой системы могут быть выражены в терминах корреляционных функций величин, характеризующих элементы, из которых построена система, а также расстояний между элементами системы.

Если расположение излучающих элементов определяется исключительно статическими характеристиками, то интенсивности и фазы излучающих элементов могут изменяться во времени и быть использованы, тем самым, для динамического управления ДН антенны.

В настоящей работе находится интенсивность интерференционного поля системы дипольных излучателей, расположенных вдоль прямой линии. Интенсивности излучателей и расстояния между ними предполагаются случайными величинами с заданными статистическими характеристиками, через которые в итоге выра-

жается ДН излучения. Затем решается обратная задача синтеза антенны с заданной ДН и приводится пример построения такой антенны. В результате решается задача построения детерминированной системы – антенны, состоящей из случайных элементов.

В заключение обсуждается эквивалентность постановок задач построения линейных случайно-фазированных и случайных неэквидистантных антенных решеток с заданной ДН.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим систему, состоящую из M электрических «точечных» дипольных излучателей, пронумерованных индексом n , принимающим значения от 0 до $M - 1$. Диполи расположены на оси x , имеют координаты x_n , дипольные моменты излучателей \vec{p}_n параллельны оси y (рис. 1).

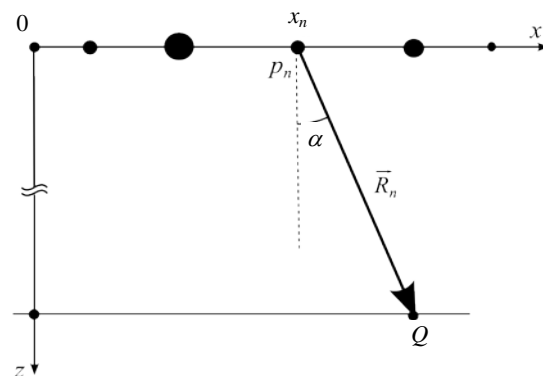


Рис. 1. Линейная одномерная двухпараметрически-случайная антенная решетка, построенная из дипольных излучателей

Векторы напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей, создаваемых n -м излучателем в точке наблюдения Q , расположенной в волновой зоне, определяются хорошо известными выражениями [4]

$$\vec{E} = [\vec{H}, \vec{e}_n], \quad \vec{H} = \frac{1}{c^2 R_n} [\ddot{\vec{p}}_n, \vec{e}_n], \quad (1)$$

где \vec{R}_n – радиус-вектор, направленный из x_n в точку наблюдения Q ; \vec{e}_n – единичный вектор в этом направлении; c – скорость света в вакууме. Напомним, что выражения (1) справедливы при выполнении условий $R_n \gg \lambda \gg a$, где λ – длина излучаемой волны, a – характерный размер диполя.

Предположим, что все диполи изменяются со временем по гармоническому закону с одной и той же частотой ω , находятся в фазе и нет взаимной связи между элементами (что не означает между тем отсутствия корреляций в эффективных интенсивностях диполей). Тогда в плоскости xOz электрическое поле диполя имеет только одну отличную от нуля компоненту E_y и может быть записано в виде

$$E = E_y = \frac{\omega^2 p_n}{c^2 R_n} e^{i(kR_n - \omega t)}, \quad (2)$$

где k – модуль волнового вектора \vec{k} , $k = 2\pi / \lambda$. Это выражение описывает расходящиеся убывающие как $1/R_n$ сферические волны дипольных источников поля. Поле \vec{E} имеет два характерных пространственных масштаба изменения: амплитуды являются плавными медленно изменяющимися функциями расстояния, а фазы – быстрыми, изменяющимися на расстояниях порядка $1/k$. Поэтому, интересуясь распределением поля в плоскости xOz в окрестности точки наблюдения Q , отстоящей на расстояние R_n от системы излучателей, мы будем пренебрегать «медленной» зависимостью R_n от n . Кроме того, будем в дальнейшем при записи поля опускать временную зависимость, представленную в уравнении (2) множителем $e^{-i\omega t}$.

Таким образом, результирующее поле системы излучателей принимает вид

$$E = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\omega^2 p_n}{c^2 R_n} e^{ikR_n}. \quad (3)$$

Сделаем дополнительное предположение, лежащее в основе кинематической теории дифракции Фраунгофера, что расстояние от излучателей до точки наблюдения Q много больше линейных размеров системы излучателей. Тогда все векторы \vec{R}_n оказываются почти параллельными, и с точностью до несущественного для дальнейшего множителя, содержащего оптическую длину пути от излучателя с номером 0 до точки наблюдения, мы получаем

$$E = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\omega^2 p_n}{c^2 R_n} e^{ikx_n \sin \alpha}, \quad (4)$$

где α – угол, под которым видна точка Q из системы излучателей, $-\pi < \alpha \leq \pi$ (см. рис. 1).

Предположим далее, что положение излучателей является случайной величиной:

$$x_n = nd + \xi_n. \quad (5)$$

Здесь nd – положение n -го диполя в периодической решетке; d – расстояние между диполями в периодической решетке; ξ_n – флуктуация положения n -го диполя со средним значением, равным нулю. Будем говорить, что упорядоченная совокупность случайных величин ξ_n образует случайную последовательность $\{\xi_n\}$.

Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ будут обозначать статистическое усреднение вдоль случайной последовательности, так что среднее значение некоторой функции $f(\cdot)$ случайной величины ξ_n определяется как среднее арифметическое

$$\langle f(\xi_n) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(\xi_n). \quad (6)$$

Если $f(\cdot)$ – линейная функция, $f(\xi) = \xi$, то выражение (6) определяет среднее значение случайной величины $\langle \xi_n \rangle$. Более подробно статистические свойства случайных величин будут обсуждаться в разд. 3, где рассматривается метод их генерации, который будет определять все статистические свойства последовательности. Отметим только, что определение (6) является эквивалентным определению средних величин через функцию распределения

$$\langle f(\xi_n) \rangle = \int \rho(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (7)$$

но более удобным и эффективным в численных приложениях.

Будем считать, что дипольные моменты p_n также являются случайными величинами. Обе случайные последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{p_n\}$ будем считать однородными, что и позволяет использовать усреднение (6) вдоль последовательности вместо часто используемого усреднения по ансамблю в статистической теории антенн. Немаловажным обстоятельством при этом является также упоминавшееся выше условие Фраунгофера

$$R \gg M^2 d^2 / \lambda,$$

обеспечивающее эквивалентность влияния отдельных излучателей на поле в точке наблюдения с учетом их интенсивностей. Напомним, что условие Фраунгофера следует из естественных неравенств $R \gg Md \gg \lambda$ и предположения, что замена истинных векторов \vec{R}_n на параллельные друг другу векторы приводят к малому, по сравнению с единицей, изменению фаз kR_n .

Таким образом, с использованием соотношения (5) поле, создаваемое всеми излучателями в точке Q , принимает следующий вид:

$$E = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\omega^2 P_n}{c^2 R_n} e^{ik(nd + \xi_n) \sin \alpha}. \quad (8)$$

Определим плотность потока энергии в расчете на один излучатель соотношением

$$I = \frac{1}{M} \frac{c}{4\pi} EE^* = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon_n \varepsilon_m e^{ik[(n-m)d + \xi_n - \xi_m] \sin \alpha}, \quad (9)$$

где посредством ε_n обозначена эффективная интенсивность n -го диполя:

$$\varepsilon_n = \frac{\omega^2 P_n}{2\sqrt{\pi} c^{3/2} R_n}. \quad (10)$$

2. Выражение интенсивности через корреляционные функции. Таким образом, задача о нахождении интерференционного поля системы дипольных излучателей свелась к анализу выражения (9), содержащего совокупности двух случайных величин x_n и ε_n .

Предположим, что флуктуации ξ_n величин x_n малы:

$$k|\xi_n| \ll 1. \quad (11)$$

Это позволяет разложить экспоненту в соотношении (9) в ряд с точностью до слагаемых второго порядка по малому параметру $k|\xi_n|$, что в свою очередь дает возможность представить выражение для интенсивности поля (9) в терминах корреляционных и автокорреляционных функций. Определим нормированные автокорреляционные функции посредством:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 K_{xx}(r) &= \langle (x_{n+r} - (n+r)d)(x_n - nd) \rangle, \\ \sigma_\varepsilon^2 K_{\varepsilon\varepsilon}(r) &= \langle (\varepsilon_{n+r} - \langle \varepsilon \rangle)(\varepsilon_n - \langle \varepsilon \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\sigma_x^2 = \langle (x_n - nd)^2 \rangle; \quad \sigma_\varepsilon^2 = \langle (\varepsilon_n - \langle \varepsilon \rangle)^2 \rangle, \quad (13)$$

дисперсии случайных величин x_n и ε_n . В формулах (12) двухточечное среднее случайных величин определяется по аналогии с выражением (6):

$$\langle x_{n+r} y_n \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M-r} \sum_{n=0}^{M-r-1} x_{n+r} y_n,$$

вне зависимости от того, принадлежат ли случайные величины x и y одной последовательности или различным. Термин двухточечность средних определяется тем, что величины x_{n+r} и y_n принадлежат двум различным точкам (одной и той

же последовательности или разных последовательностей). Из однородности последовательностей вытекает, что авто/корреляционные функции зависят от разности аргументов $n+r$ и n , т. е. от r , а не отдельно от $n+r$ и n . Нормированность автокорреляторов, как это следует из выражений (12) и (13), означает, что $K_{xx}(0) = K_{\varepsilon\varepsilon}(0) = 1$. Введем корреляторы следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_\varepsilon K_{x\varepsilon}(r) &= \langle (x_{n+r} - (n+r)d)(\varepsilon_n - \langle \varepsilon \rangle) \rangle, \\ \sigma_\varepsilon \sigma_x K_{\varepsilon x}(r) &= \langle (\varepsilon_{n+r} - \langle \varepsilon \rangle)(x_n - nd) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Для корреляторов хорошо определенное свойство нормированности отсутствует. Вводимую иногда (см., например, [2]) нормировку на величину $\langle (x_n - nd)(\varepsilon_n - \langle \varepsilon \rangle) \rangle$ вряд ли следует признавать удовлетворительной, поскольку эта величина, а вместе с ней и корреляционная функция, может обращаться в нуль, а корреляции, определяемые для произвольных r , могут при этом присутствовать.

Из определений следует, что автокорреляционные функции являются четными:

$$K_{xx}(-r) = K_{xx}(r), \quad K_{\varepsilon\varepsilon}(-r) = K_{\varepsilon\varepsilon}(r), \quad (15)$$

а корреляционные – удовлетворяют соотношению

$$K_{x\varepsilon}(-r) = K_{\varepsilon x}(r). \quad (16)$$

Таким образом, из четырех функций $K(r)$ только 3 являются функционально независимыми.

Представляя величины ε_n в виде суммы среднего значения и флуктуации

$$\varepsilon_n = \langle \varepsilon \rangle + \zeta_n, \quad (17)$$

пренебрегая в (9) корреляторами выше 2-го порядка, с учетом малости величин ζ_n , приходим к следующему результату:

$$I = I_p + I_{corr}. \quad (18)$$

В этом выражении первое слагаемое

$$I_p = \frac{1}{M} \langle \varepsilon \rangle^2 \left(1 - k^2 \sigma_x^2 \sin^2 \alpha \right) \frac{\sin^2(\kappa M / 2)}{\sin^2(\kappa / 2)} \quad (19)$$

представляет собой интенсивность интерференционного поля периодической решетки с эффективной интенсивностью излучателей, равной усредненной интенсивности единичного излучателя за вычетом поправки, связанной с усредненной флуктуацией расстояния между излучателями σ_x . Безразмерный параметр

$$\kappa = kd \sin \alpha \quad (20)$$

определяет положение пиков излучения – хорошо известно условие Вульфа-Брэгга, следующее из обращения знаменателя в нуль. Для углов $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ число пиков n_{\max} определяется целой частью выражения d/λ :

$$n_{\max} = 2[d/\lambda] + 1. \quad (21)$$

В пределе $M \rightarrow \infty$ приходим к более простому выражению

$$I_p = 2\pi \langle \varepsilon \rangle^2 \left(1 - k^2 \sigma_x^2 \sin^2 \alpha\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\kappa - 2\pi n), \quad (22)$$

в котором суммирование по n реально производится от $-[d/\lambda]$ до $[d/\lambda]$, когда аргумент дельта-функции Дирака $\delta(\cdot)$ может обращаться в нуль.

Второе слагаемое в формуле (18) обусловлено исключительно наличием автокорреляций и корреляций случайных величин ξ_n и ζ_n . Для его нахождения удобно изменить способ суммирования в выражении (9), введя вместо m новую переменную $r = m - n$:

$$\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} = \frac{1}{M} \sum_{r=-M+1}^{M-1} \sum_{n=\max(0,-r)}^{\min(M-1, M-1-r)}. \quad (23)$$

Здесь внутреннее суммирование по n может быть представлено в виде трех частей для различных значений r

$$\sum_{n=\max(0,-r)}^{\min(M-1, M-1-r)} = \sum_{n=-r, r < 0}^{M-1} + \sum_{n=0, r=0}^{M-1} + \sum_{n=0, r > 0}^{M-1-r}. \quad (24)$$

В результате после разложения по малым поправкам ξ_n и ζ_n имеем

$$I_{corr} = \frac{1}{M} \sum_{r=M+1}^{M-1} \sum_{n=\max(0,-r)}^{\min(M-1, M-1-r)} e^{-ikr} \times \\ \times [\zeta_{n+r} \zeta_n + \langle \varepsilon \rangle^2 k^2 \xi_{n+r} \xi_n \sin^2 \alpha + \langle \varepsilon \rangle ik \sin \alpha (\zeta_{n+r} \xi_n + \xi_{n+r} \zeta_n)]. \quad (25)$$

Из выражения (25) следует, что корреляционный вклад в излучение содержит 3 слагаемых, обусловленных автокорреляциями величин ξ_n и ζ_n , а также их взаимными корреляциями. Первое из них обусловлено корреляциями между случайными эффективными интенсивностями дипольных излучателей

$$I_{corr, \varepsilon \varepsilon} = \sigma_\varepsilon^2 \left[\tilde{K}_{\varepsilon \varepsilon, M}^c(\kappa) - \sum_{r=-M+1}^{M-1} \frac{|r|}{M} K_{\varepsilon \varepsilon, M-|r|}(r) \cos(\kappa r) \right]. \quad (26)$$

Здесь $K_{\varepsilon \varepsilon, M-|r|}(r)$ – «предкоррелятор» – функция, полученная путем усреднения по конечному числу слагаемых:

$$K_{\varepsilon \varepsilon, M-|r|}(r) = \frac{1}{M-|r|} \sum_{n=\max(0,-r)}^{\min(M-1, M-1-r)} \zeta_{n+r} \zeta_n, \quad (27)$$

в отличие стандартного определения (6) предусматривающего предельный переход $M \rightarrow \infty$. Это число указано во втором индексе $K(r)$, равном в данном случае $M - |r|$. В пределе $M \rightarrow \infty$

приходим к обычному определению коррелятора, см. (6) и (12), $K(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} K_{M-|r|}(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} K_M(r)$. Анализ выражения (27) показывает, что предкоррелятор, как и коррелятор, является четной функцией r , чем и обусловлено появление конечного аналога косинус-преобразования Фурье в первом слагаемом в формуле (26):

$$\tilde{K}_{\varepsilon \varepsilon, M}^c(\kappa) = 1 + 2 \sum_{r=1}^{M-1} K_{\varepsilon \varepsilon, M-r}(r) \cos(\kappa r). \quad (28)$$

Вклад в интенсивность, обусловленный xx -корреляциями, имеет сходную структуру (и обозначения):

$$I_{corr, xx} = \langle \varepsilon \rangle^2 k^2 \sigma_x^2 \sin^2 \alpha \left[\tilde{K}_{xx, M}^c(\kappa) - \sum_{r=1}^{M-1} \frac{2r}{M} K_{xx, M-r}(r) \cos(\kappa r) \right]. \quad (29)$$

И наконец, вклад, связанный со взаимными корреляциями,

$$I_{corr, \varepsilon x} = 2 \langle \varepsilon \rangle \sigma_\varepsilon \sin \alpha \left[\tilde{K}_{\varepsilon x, M-|r|}^s(\kappa) - \sum_{r=1}^{M-1} \frac{2r}{M} K_{\varepsilon x, M-|r|}(r) \sin(\kappa r) \right], \quad (30)$$

определяется нечетной частью предкорреляционной функции $K_{\varepsilon x, M-|r|}(\kappa)$ и, соответственно, синус-преобразованием Фурье.

Во всех трех выражениях (26), (29) и (30) слагаемые, фигурирующие в скобках, являются в принципе величинами одного порядка. Однако если радиус корреляции r_c конечен (корреляционный радиус r_c – это характерный масштаб изменения корреляционной функции), а число излучателей M велико по сравнению с r_c , то вкладом вторых слагаемых можно пренебречь и в пределе $M \rightarrow \infty$ для корреляционного вклада в излучение приходим к следующему результату:

$$I_{corr} = \sigma_\varepsilon^2 \tilde{K}_{\varepsilon \varepsilon}(\kappa) - 2 \langle \varepsilon \rangle \sigma_\varepsilon k \sigma_x \sin \alpha \operatorname{Im} \tilde{K}_{\varepsilon x}(\kappa) + \langle \varepsilon \rangle^2 k^2 \sigma_x^2 \sin^2 \alpha \tilde{K}_{xx}(\kappa). \quad (31)$$

Здесь мы перешли к комплексной форме преобразования Фурье:

$$\tilde{K}(p) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} K(r) \exp(-ipr), \quad (32)$$

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp \tilde{K}(p) \exp(ipr).$$

Как вещественные, так и комплексные фурье-образы функций являются 2π -периодическими функциями

$$\tilde{K}(p + 2\pi) = \tilde{K}(p).$$

Из четности автокорреляционных функций (15) следует вещественность и четность их фурье-образов:

$$\tilde{K}_{xx}(-p) = \tilde{K}_{xx}(p), \quad \tilde{K}_{\varepsilon\varepsilon}(-p) = \tilde{K}_{\varepsilon\varepsilon}(p), \quad (33)$$

а из (16) – соотношения для корреляционных функций

$$\tilde{K}_{x\varepsilon}(p) = \tilde{K}_{\varepsilon x}(-p) = \tilde{K}_{\varepsilon x}^*(p), \quad (34)$$

которые были использованы при получении (31).

Отметим несколько характерных особенностей корреляционного вклада I_{corr} в полную интенсивность излучения (18). Если первое слагаемое I_p обращается в нуль между дельта-функциональными вкладами в интенсивность в пределе $M \rightarrow \infty$, то второе слагаемое отлично от нуля при наличии корреляций хотя бы в одной из последовательностей $\{\varepsilon_n\}$ или $\{\zeta_n\}$. Даже в том случае, когда среднее значение эффективной интенсивности диполей ε_n обращается в нуль, а вместе с этим равна нулю и периодическая часть интенсивности излучения I_p , корреляционная часть I_{corr} может быть отличной от нуля.

Все три вклада в интенсивность, обусловленные корреляциями в последовательностях $\{x_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$, являются четными функциями угла α . Для первого и третьего слагаемых в (31) это связано со свойством четности фурье-образов автокорреляционных функций (33) и для второго слагаемого в (31) – с нечетностью мнимой части фурье-образа корреляционной функции $\tilde{K}_{\varepsilon x}(\kappa)$ и нечетностью функции $\sin \alpha$.

Имеются две области параметра d/λ , см. (20) и (21), в которых излучение имеет существенно различный характер. При $d/\lambda \gg 1$ имеется много почти идентичных зон излучения, повторяющихся по углу α . Это связано с тем, что максимальное значение величины κ много больше единицы и, следовательно, число зон, равно $n_{\max} = 2[d/\lambda] + 1$, тоже много больше единицы. В каждой из этих зон параметр κ изменяется в интервале $(-\pi + 2\pi m, \pi + 2\pi m)$, $m \in (-n_{\max}, n_{\max})$, следовательно, все возможные значения $\kappa \in (-\pi, \pi)$ важны для формирования корреляционных функций $K(r)$, и наоборот, все значения r (в пределах корреляционного радиуса r_c) важны для формирования $\tilde{K}(\kappa)$.

В противоположном предельном случае $d/\lambda \ll 1$, более интересном для теории антенн, параметр κ может принимать только малые значения. Но малые κ , а следовательно, и малые p в $\tilde{K}(p)$ определяются лишь большими значения-

ми аргумента r функции $K(r)$. Другими словами, значения корреляционной функции на малых расстояниях не существенны в формировании интерференционного поля: длинноволновое излучение не чувствительно к деталям строения решетки диполей на малых расстояниях.

Имея в виду дальнейшие численные приложения полученных результатов, заметим, что при получении выражения (31) сначала производится суммирование по n , содержащее $M - 1$ слагаемых, а затем суммирование по r , содержащее $2M - 1$ слагаемых. Каждое из этих суммирований приводит к физически корректным выражениям, если будет содержать число слагаемых, существенно превышающее r_c . В итоге мы приходим к заключению, что при выполнении неравенства $M \gg r_c$ будут корректно определены и корреляционные функции и их преобразования Фурье. Таким образом, при построении случайной коррелированной антенны с характерным радиусом корреляций r_c , необходимо построить систему излучателей, содержащую не менее чем M элементов с $M \gg r_c$.

В разд. 3 мы решаем проблему генерации двух случайных автокоррелированных и взаимно-коррелированных последовательностей с заданными парными корреляционными функциями.

3. Генерация двух взаимно коррелированных случайных последовательностей. Наиболее простыми с точки зрения компьютерной генерации являются последовательности, в которых корреляции отсутствуют. Именно такие последовательности с непрерывно распределенными случайными величинами на интервале $[0,1)$ генерируются стандартными генераторами случайных чисел. Следующей по сложности является проблема генерации случайной последовательности с заданным бинарным (парным) коррелятором. Известно, например, что непрерывный цветной шум с экспоненциальными корреляциями генерируется линейным процессом Орнштейна-Уленбека (см. обзор [5]). Более общий метод, пригодный для генерации непрерывных случайных последовательностей с произвольной корреляционной функцией, основан на свертке белого шума с модулирующей функцией, определяемой бинарной корреляционной функцией. Конволюционный метод построения такого рода был предложен Райсом [6, 7]. Применения различных модификаций этого метода для генерации случайных последовательностей с корреляционными функциями определенного вида, включая дальние неэкспоненциальные корреляции, можно найти в работах [8–11].

Конволюционный метод Райса реализуется довольно просто для случайной величины,

значения которой принадлежат неограниченному интервалу $\varepsilon_n \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Суть метода состоит в следующем. Введем в рассмотрение случайную последовательность $\{\alpha_n\}$, обладающую корреляционными характеристиками белого шума с нулевым средним значением и единичной дисперсией:

$$\langle \alpha_n \rangle = 0, \quad \langle \alpha_n \alpha_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad (35)$$

где $\delta_{nn'}$ – дельта-символ Кронекера. По последовательности $\{\alpha_n\}$ построим новую случайную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ путем свертки случайных величин α_n с некоторой, называемой модулирующей, функцией $F(n)$,

$$\varepsilon_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n-n')\alpha_{n'}. \quad (36)$$

При помощи подстановки выражения (36) в определение корреляционной функции (12) нетрудно убедиться, с использованием (35), что случайная последовательность $\{\varepsilon_n\}$ обладает корреляционной функцией $K(r)$ и фурье-образом $\tilde{K}(p)$, связанными с модулирующей функцией и ее фурье-образом соотношениями

$$K(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n+r)F(n), \quad \tilde{K}(p) = \tilde{F}(p)\tilde{F}(-p). \quad (37)$$

Таким образом, решение (обратной) проблемы построения случайной последовательности с заданной корреляционной функцией $K(r)$ или ее фурье-образом $\tilde{K}(p)$ сводится к нахождению модулирующей функции $F(n)$, которая определяет посредством (36) преобразование некоррелированной последовательности $\{\alpha_n\}$ в коррелированную $\{\varepsilon_n\}$ -последовательность. Нетрудно видеть, что при произвольной функции $F(n)$ соотношения (37) корректно удовлетворяют свойствам четности функций $K(r)$ и ее фурье-образа $\tilde{K}(p)$.

Предлагаемый нами метод генерации двух случайных коррелированных и взаимно коррелированных последовательностей с заданными парными корреляционными функциями является естественным обобщением изложенного выше метода. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – две независимые некоррелированные случайные последовательности с нулевым средним и единичной дисперсией

$$\langle \alpha_n \alpha_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad \langle \beta_n \beta_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad \langle \alpha_n \beta_{n'} \rangle = 0. \quad (38)$$

На их основе будем строить две случайные последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\zeta_n\}$, которые будут коррелированы как каждая внутри себя, так и друг с другом. По аналогии со стандартным методом конволюции строим последовательности с помощью неизвестных пока модулирующих функций F , для которых будут получены уравнения:

$$\zeta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon\alpha}(n-n')\alpha_{n'} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon\beta}(n-n')\beta_{n'}; \quad (39)$$

$$\xi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{x\alpha}(n-n')\alpha_{n'} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{x\beta}(n-n')\beta_{n'}. \quad (40)$$

Отметим, что все функции F зависят только от разностей аргументов n и n' . Это обеспечивает, в частности, уже упоминавшееся свойство однородности последовательностей $\{\zeta_n\}$ и $\{\xi_n\}$, независимость одноточечных функций распределения от номера узла решетки, возможность введения усреднения (6) по последовательности, зависимость бинарных авто/корреляционных функций от разности аргументов и многие другие полезные свойства последовательности.

Соотношениями (39) и (40) полностью определяются последовательности $\{\zeta_n\}$ и $\{\xi_n\}$. Это означает, с одной стороны, что мы можем использовать (39) и (40) для численной генерации коррелированных последовательностей, а с другой, они однозначно определяют все статистические свойства последовательностей $\{\zeta_n\}$ и $\{\xi_n\}$. Однако нам понадобятся только одноточечные функции распределения и бинарные авто/корреляционные функции. Так, подставляя (39) и (40) в определение корреляционных функций (12) и (14) и используя корреляционные свойства (38) исходных последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, нетрудно выразить корреляционные функции последовательностей $\{\varepsilon_n\}$ и $\{x_n\}$ через модулирующие в виде свертки последних:

$$K_{\rho\sigma}(r) = \sum_{\tau=\alpha,\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\rho\tau}(n+r)F_{\sigma\tau}(n). \quad (41)$$

Здесь индексы ρ и σ могут принимать значения ε и x . Из свойства (12) нормированности автокорреляторов вытекают соотношения

$$\sum_{\tau=\alpha,\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\tau\tau}^2(n) = \sum_{\tau=\alpha,\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\tau\tau}^2(n) = 1,$$

накладывающие ограничения на скорость убывания функций $F_{\rho\tau}(n)$ с ростом аргумента $|n|$ и обеспечивающие условия существования корреляционных функций.

Можно показать [11], что одноточечные функции распределения получающихся таким образом последовательностей подчиняются распределению Гаусса. Качественно это следует из того, что в силу соотношений (39) и (40) каждый член последовательностей $\{\zeta_n\}$ и $\{\xi_n\}$ представляет собой сумму большого числа слагаемых и подчиняется центральной предельной теореме.

Из уравнения (41) и свойства (16) нетрудно получить соотношения

$$K_{x\varepsilon}(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{x\alpha}(n+r)F_{\varepsilon\alpha}(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{x\beta}(n+r)F_{\varepsilon\beta}(n) = K_{\varepsilon x}(-r), \quad (42)$$

в результате чего убеждаемся, что свойство корреляционных функций (16) выполняется автоматически. Это означает, что свойства корреляционных функций (15) и (16) не накладывают никаких ограничений на модулирующие функции. Все четыре функции $F_{\varepsilon\alpha}(n)$, $F_{\varepsilon\beta}(n)$, $F_{x\alpha}(n)$, $F_{x\beta}(n)$ являются независимыми. Следовательно, метод обладает «избыточностью»: одни и те же корреляции могут обеспечиваться различными наборами $F(n)$. Поэтому для определенности обратной задачи и для удобства вычислений на модулирующие функции может быть наложено некоторое дополнительное условие; например, любая из них может быть положена равной нулю либо на них может быть наложено условие симметрии $F_{\varepsilon\beta} = F_{x\alpha}$ или антисимметрии.

Ранее проблема генерации двух коррелированных последовательностей рассматривалась в работе [12], где было предложено ее частное решение, заключающееся в том, что межцепочечный коррелятор не был независимой функцией, а выражался в виде произведения автокорреляторов и некоторого численного множителя – корреляционного параметра.

Из (41) следуют простые уравнения связи между фурье-преобразованиями корреляционных и модулирующих функций

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\varepsilon\varepsilon}(p) &= \tilde{F}_{\varepsilon\alpha}(p)\tilde{F}_{\varepsilon\alpha}(-p) + \tilde{F}_{\varepsilon\beta}(p)\tilde{F}_{\varepsilon\beta}(-p), \\ \tilde{K}_{xx}(p) &= \tilde{F}_{x\alpha}(p)\tilde{F}_{x\alpha}(-p) + \tilde{F}_{x\beta}(p)\tilde{F}_{x\beta}(-p); \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{x\varepsilon}(p) &= \tilde{K}_{\varepsilon x}(-p) = \\ &= \tilde{F}_{\varepsilon\alpha}(p)\tilde{F}_{x\alpha}(-p) + \tilde{F}_{\varepsilon\beta}(p)\tilde{F}_{x\beta}(-p). \end{aligned} \quad (44)$$

Из (41) и четности автокорреляционных функций следует, что $\tilde{F}_{\varepsilon\alpha}(p)$ и $\tilde{F}_{\varepsilon\beta}(p)$ могут быть выбраны в виде либо четных, либо нечетных функций аргумента p .

Решая систему четырех уравнений (41), считая известными корреляционные функции $K_{\rho\tau}(r)$ или их фурье-образы $\tilde{K}_{\rho\tau}(p)$, получим требуемый вид модулирующих функций $F_{\sigma\tau}$ по которым генерируются затем случайные последовательности $\{\zeta_n\}$ и $\{\xi_n\}$ посредством соотношений (39) и (40).

4. Пример построения случайной антенны. Далее в качестве примера приводится метод численного построения однопараметрической случайной антенны с заданной ДН. Заметим, что приведенный пример не претендует на универсальность и практическую значимость, а выбран из соображений простоты, чтобы проиллюстрировать эффективность метода.

Предположим, что случайными параметрами являются эффективные интенсивности электрических дипольных моментов, и зададим фурье-образ нормированной корреляционной функции, определяющей желаемое интерференционное поле излучения в виде (четной) экспоненциально убывающей функции и соответствующей ей нормированной автокорреляционной функции $K(r)$:

$$\tilde{K}(p) = \frac{\pi r_c}{1 - \exp(-\pi r_c)} \exp(-r_c |p|), \quad (45)$$

$$K(r) = \frac{1}{1 - \exp(-\pi r_c)} \frac{1 - (-1)^r \exp(-\pi r_c)}{1 + (r/r_c)^2}.$$

Нормированность функций в данном случае означает, что

$$K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp \tilde{K}(p) = 1. \quad (46)$$

Фурье-образ корреляционной функции определяет модулирующую функцию

$$\tilde{F}(p) = \sqrt{\tilde{K}(p)}, \quad (47)$$

с помощью которой строится случайная коррелированная последовательность $\{\varepsilon_n\}$ с использованием соотношения (36). Отметим два предельных случая, следующих из соотношений (45): при $r_c = 0$ имеем белый шум $K(r) = \delta_{r,0}$ и при $r_c \rightarrow \infty$ приходим к корреляционной функции периодической последовательности с $K(r) = 1$. На рис. 2 представлены результаты вычисления интерференционного поля излучения системы диполей в зависимости от параметра κ . Как следует из (31), интенсивность излучения, связанная с корреляциями эффективных интенсивностей диполей ε_n , описываемая первым слагаемым в (31), является однопараметрической функцией, зависящей от κ . Угловые зависимости ДН при различных соотношениях длины излучаемой волны и периода решетки представлены на рис. 3.

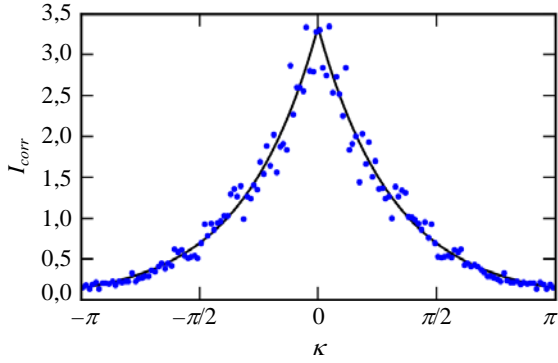


Рис. 2. Теоретическая (сплошная линия) и рассчитанная (точки) на основе генерированной случайной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, содержащей 10^4 излучателей с дисперсией $\sigma_\varepsilon = 1$ и $r_c = 1$, зависимость корреляционной части интенсивности поля излучения $I_{corr}(k)$

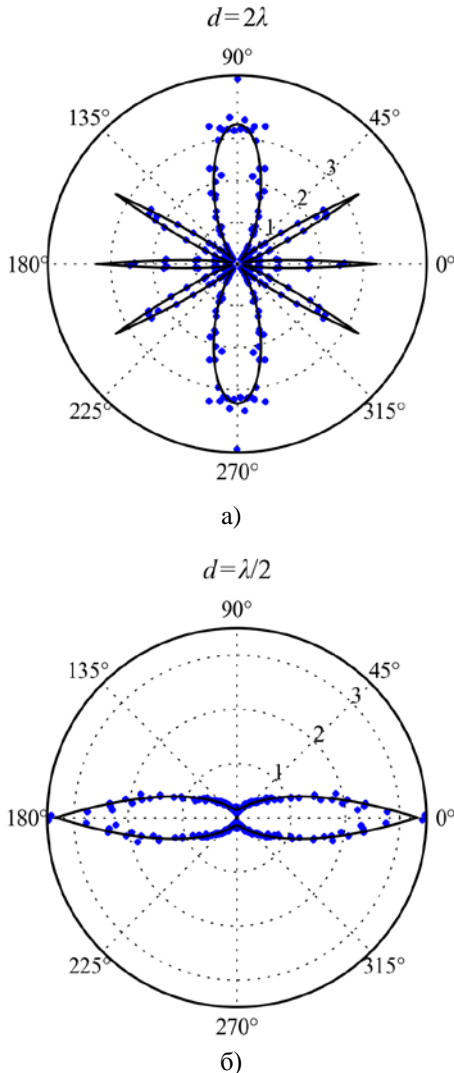


Рис. 3. Теоретическая (сплошная линия) и рассчитанная (точки) ДН корреляционной части интенсивности $I_{corr}(\varphi)$: а) $\lambda = 2d$; б) $\lambda = d/2$

Заключение. С целью избежать излишнего усложнения записи формул мы рассматри-

вали поле излучения в плоскости zOx . Однако все полученные результаты для интерференционного поля изучения остаются справедливыми и в общем случае, когда точка наблюдения Q лежит вне этой плоскости. Для этого во всех полученных выражениях, начиная с (20), достаточно заменить параметр k на $k \cos \theta$, где $\cos \theta$ – полярный угол, отсчитываемый от оси u .

Следующее обобщение полученных результатов связано с эквивалентностью задач построения линейных случайно-фазированных и неэквидистантных антенных решеток с заданной ДН. Действительно, будем считать, что в экспоненте выражения (2) кроме фазы $kR_n - \omega t$ присутствует также слагаемое

$$\varphi_n = n\varphi + \delta\varphi_n, \quad (48)$$

где первый член описывает детерминированный сдвиг фазы каждого излучателя на постоянную величину φ с изменением номера излучателя n , а второй – случайный малый сдвиг $\delta\varphi_n \ll 1$. Сравнивая эту величину с показателем экспоненты (8), видим, что $\delta\varphi_n$ и $k\xi_n \sin \alpha$ в определенном смысле эквивалентны. Это означает, что считая систему излучателей эквидистантной и заменяя в окончательных результатах $k\xi_n \sin \alpha$ на $\delta\varphi_n$, а величину k на $k + \varphi$, мы получим решение задачи об излучении одномерной эквидистантной антенны со случайными интенсивностями и фазами излучателей.

Нами была рассмотрена задача об излучении антенны, построенной из дипольных излучателей. Однако, как следует из контекста работы, специфика излучателей не является принципиальной в нашем изложении. Нам были важны лишь фазовые соотношения для определения интенсивности поля излучения. Поэтому результаты работы легко переносятся и на другие системы излучателей, в том числе не только линейные антенны, но и двумерные с произвольной поверхностью раскрытия.

Отметим принципиальное различие между приведенным здесь рассмотрением и традиционно развиваемыми статистическими теориями антенн, где флуктуации параметров антенны рассматриваются как неконтролируемые величины при детерминированном в целом построении, от которого мы отказываемся с самого начала.

Выводы. Таким образом, нами построена теория линейных случайных антенн в пренебрежении взаимодействия между дипольными излучателями. Интенсивность интерференционного поля излучения выражена через корреляционные функции случайных величин – интенсивностей излучателей и расстояний между ними. Разработан метод построения двух случайных последовательностей с заданными бинарными автокорре-

ляционными и корреляционными функциями. Это позволило решить (обратную) задачу синтеза случайных антенн по заданной ДН. Приведен пример численной реализации метода.

Авторы выражают искреннюю благодарность Г. И. Хлопову, дискуссии с которым существенно расширили понимание проблем, стоящих перед современной теорией антенн, а также В. Е. Векслерчику за обсуждение ряда вопросов математического характера.

Библиографический список

1. *Амитей Н.* Теория и анализ фазированных антенных решеток / Н. Амитей, В. Галиндо, Ч. Ву; пер. с англ. под ред. А. Ф. Чаплина. – М.: Мир, 1974. – 455 с.
2. *Izrailev F. M.* Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder / F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, N. M. Makarov // *Phys. Rep.* – 2012. – 512, iss. 3. – P. 125–254.
3. *Лукин К. А.* Получение изображений с помощью неподвижной антенной решетки, шумовых сигналов и метода синтеза апертуры / К. А. Лукин, А. А. Могила, П. Л. Выплавин // *Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины.* – Х., 2007. – 12, № 3. – С. 526–531.
4. *Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. – Изд. 8-е, стереотип. – М.: Физматлит, 2012. – 536 с.
5. *Hänggi P.* Colored noise in dynamical systems / P. Hänggi, P. Jung // *Adv. Chem. Phys.* – 1995. – 89. – P. 239–326.
6. *Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise / S. O. Rice // *Bell Syst. Tech. J.* – 1944. – 23. – P. 282–332.
7. *Wax N.* Selected Papers on Noise and Stochastic Processes / N. Wax. – N. Y.: Dover, 1954. – 343 p.
8. *Izrailev F. M.* Localization and the Mobility Edge in One-Dimensional Potentials with Correlated Disorder / F. M. Izrailev, A. A. Krokhin // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – 82, iss. 20. – P. 4062–4065.
9. *Romero A.* Generation of short and long range temporal correlated noises / A. Romero, J. Sancho // *J. of Computational Phys.* – 1999. – 156, iss. 1. – P. 1–11.
10. *Generation of correlated binary sequences from white noise / F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, N. M. Makarov, O. V. Usatenko // Phys. Rev. E.* – 2007. – 76, iss. 2. – 027701 (4 p.).
11. *Random finite-valued dynamical systems: additive Markov chain approach / O. V. Usatenko, S. S. Apostolov, Z. A. Mayzelis, S. S. Melnik.* – Cambridge: Cambridge Scientific Publisher, 2010. – 166 p.
12. *Hernandez-Herrejon J. C.* Electronic states and transport properties in the Kronig-Penney model with correlated compositional and structural disorder / J. C. Hernandez-Herrejon,

F. M. Izrailev, L. Tessieri // *Physica E.* – 2010. – 42, iss. 9. – P. 2203–2210.

Рукопись поступила 08.01.2013 г.

A. A. Maystrenko, S. S. Melnik,
G. M. Pritula, O. V. Usatenko

RANDOM LINEAR ANTENNAS WITH MANAGED RADIATION PATTERN

In the paper the linear arrays widely used both in theoretical studies and practical applications are studied. It is assumed that the intensity of the dipole radiators and the distances between them are random variables, which significantly complicates the problem. It is shown that the intensity of the interference of the radiation field can be expressed in terms of correlation functions of random variables. The method for constructing two random binary sequences with given autocorrelation and correlation functions is proposed. This method allows solving the inverse problem of synthesis of random antennas for a given pattern. The results of numerical implementation of the method of constructing such antennas that can be put in use are presented.

Key words: antenna gratings, radiation pattern, correlation functions, generation of correlated sequences.

A. A. Майстренко, С. С. Мельник,
Г. М. Прутула, О. В. Усатенко

ВИПАДКОВІ ЛІНІЙНІ АНТЕНИ З КЕРОВАННОЮ ДІАГРАММОЮ СПРЯМОВАНОСТІ

У роботі вивчаються лінійні антенні решітки, широко використовувані як в теоретичних дослідженнях, так і в практичних цілях. Передбачається, що інтенсивності дипольних випромінювачів решітки та відстані між ними, є випадковими величинами, що істотно ускладнює досліджувану проблему. Показано, що інтенсивність інтерференційного поля випромінювання може бути виражена через кореляційні функції випадкових величин. Розроблено метод побудови двох випадкових послідовностей із заданими бінарними автокореляційними і кореляційними функціями, метод, що дозволяє вирішити зворотну задачу синтезу випадкових антен за заданою діаграмою спрямованості. Наведено приклади чисельної реалізації методу побудови таких антен, які можуть бути використані в практичних застосуваннях.

Ключові слова: антенні решітки, діаграма спрямованості, кореляційні функції, генерація корельованих послідовностей.