УДК 621.372.413

А. Ю. Попков

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: lytc@yandex.ru

Построена приближенная математическая модель и теоретически исследован объемный резонатор с диэлектрическим слоем. Такая система при возбуждении в резонансном объеме высокодобротных колебаний эквивалентна полусферическому открытому резонатору с отрезком закороченного сверхразмерного круглого волновода в центре плоского зеркала. Построены зависимости частот собственных колебаний от толщины и диэлектрической проницаемости слоя. Показано, что эти зависимости носят квазипериодический характер. Ил. 5. Библиогр.: 5 назв.

Ключевые слова: диэлектрометрия, резонаторы, расчет спектра.

В работе [1] описан полусферический открытый резонатор (ОР), в центре плоского зеркала которого расположен отрезок сверхразмерного круглого волновода с поршнем. В такой открытой электродинамической системе могут возбуждаться аксиально-симметричные типы колебаний. Экспериментально показано, что в диапазоне перестройки порядка длины волны в таком резонаторе существует только одно колебание. По этой причине такая резонансная система может найти широкое применение в различных приборах и устройствах миллиметрового (мм) и субмиллиметрового (субмм) диапазонов длин волн. В частности, она может быть использована для измерения электрофизических параметров веществ.

В сантиметровом (см) диапазоне длин волн для этих целей используются цилиндрические объемные резонаторы с колебанием TE_{01q}. В рассматриваемом ОР колебания также классифицируются как TE_{01q} [2]. С укорочением рабочей длины волны условие невозбуждения высших типов колебаний в цилиндрическом резонаторе приводит к тому, что в мм и, тем более, субмм диапазонах такие резонансные системы практические не используются из-за малости их геометрических размеров. В то же время рассматриваемый ОР может быть с успехом применен в указанных волновых диапазонах. Поэтому представляет практический интерес изучение спектральных характеристик такой резонансной системы при наличии диэлектрической шайбы в резонансном объеме.

1. Метод решения. Метод решения основан на том, что в ОР аксиально-симметричные типы колебаний ограничены каустическими поверхностями и, следовательно, обладают малыми дифракционными потерями. Если теперь поместить металлические стенки в области экспоненциально спадающего поля для такой резонансной системы (рис. 1, пунктирные линии), то структура поля в резонаторе практически не изменится. Следовательно, задача фактически сводится к исследованию объемного резонатора. Выбирая из полученного спектра только такие колебания, поле которых локализовано вблизи оси резонатора, приходим к приближенному решению поставленной задачи.

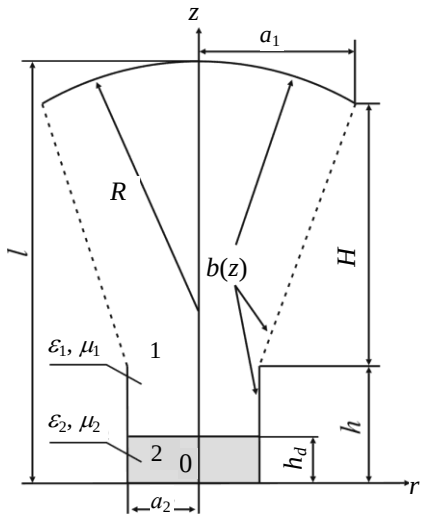

Рис. 1. Геометрия резонатора

Таким образом, будем рассматривать объемный резонатор в виде тела вращения с идеально проводящей граничной поверхностью и диэлектрической шайбой, расположенной в цилиндрической части резонатора (см. рис. 1). Предположим, что резонатор заполнен однородной изотропной средой с относительной диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1, μ_1 (область 1), и материальными параметрами шайбы – ε_2, μ_2 (область 2). Ограничимся рассмотрением осесимметричных колебаний H-типа, которые в цилиндрической системе координат (ось z совпадает с осью симметрии резонатора) имеют E_φ-, H_r- и E_z-компоненты электромагнитного поля. Для этого типа колебаний исходная задача для уравнений Максвелла сводится к нахождению волновых чисел $k = \omega/c$ (c – скорость света в вакууме), при кото-

 © ІРЕ НАН України, 2010

рых существуют нетривиальные решения U_1 и U_2 двухмерных уравнений Гельмгольца:

$$\Delta_{rz}U_1+\left(k^2\varepsilon_1\mu_1-\frac{1}{r^2}\right)U_1=0, \quad h_d<z<l,\ \ 0<r<b(z); \tag{1}$$

$$\Delta_{rz}U_2+\left(k^2\varepsilon_2\mu_2-\frac{1}{r^2}\right)U_2=0, \quad 0<z<h_d,\ \ 0<r<b(z), \tag{2}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$U_{1,2}(r,0)=0,\ \ U_{1,2}(b(z),z)=0 \tag{3}$$

и условиям сопряжения полей на границе раздела сред $z=h_d$

$$U_1(r,h_d)=U_2(r,h_d),\quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial U_1(r,h_d)}{\partial z}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U_2(r,h_d)}{\partial z}. \tag{4}$$

Здесь $U_{1,2}(r,z)$ – азимутальная компонента электрического поля соответствующего колебания; функция $b(z)$ – образующая граничной поверхности резонатора, которая предполагается кусочно-дифференцируемой на интервале $0<z<l$, где l – длина резонатора; h_d – толщина диэлектрической шайбы; $\Delta_{rz}=\partial^2/\partial r^2+\partial/r\partial r+\partial^2/\partial z^2$ – двухмерный оператор Лапласа; (r,φ,z) – цилиндрическая система координат с осью z, совпадающей с осью симметрии резонатора.

Задача (1)–(4) методом Бубнова-Галеркина сводится к алгебраической задаче на собственные значения:

$$\mathbf{A}\vec{C}+k^2\mathbf{B}\vec{C}=0, \tag{5}$$

где $\vec{C}=(c_n)_{n=1}^N$ – вектор-столбец искомых коэффициентов; $\mathbf{A}=\|a_{mn}\|_{m,\,n=1}^N$ и $\mathbf{B}=\|b_{mn}\|_{m,\,n=1}^N$ – матрицы с матричными элементами, которые задаются по формулам:

$$a_{nn'}=\int_0^l dz\int_0^{b(z)}\left(\nabla\phi_n\nabla\phi_{n'}+\phi_n\phi_{n'}/r^2\right)rdr; \tag{6}$$

$$b_{nn'}=g\int_0^l dz\int_0^{b(z)}\phi_n\phi_{n'}rdr, \tag{7}$$

где $g=\begin{cases}\varepsilon_1\mu_1, & h_d<z<l,\\ \varepsilon_2\mu_2, & 0<z<h_d;\end{cases}$ $\phi_n(r,z)$ – некоторая система базисных функций, обладающая свойством полноты в области $\{(r,z):0<z<l,\ 0<r<b(z)\}$ и удовлетворяющая граничным условиям (3), (4). Базисные функции будем искать в следующем виде:

$$\phi_n=J_1\left(\frac{\mu_{0n}r}{b(z)}\right)\begin{cases}f_1(\lambda,z), & h_d<z<l,\\ f_2(\lambda,z), & 0<z<h_d,\end{cases} \tag{8}$$

где $J_1\left(\mu_{0n}r/b(z)\right)$ – функция Бесселя 1-го порядка; μ_{0n} – n-й корень функции Бесселя $J_1(\mu_{0n})=0$; $f_1(\lambda,z)$ и $f_2(\lambda,z)$ – некоторые функции. Как легко заметить, функции (8) удовлетворяют граничному условию (3). Для того чтобы эти функции удовлетворяли условиям сопряжения (4), потребуем, чтобы функции $f_1(\lambda,z)$ и $f_2(\lambda,z)$ были решением спектральной задачи

$$\frac{d^2f_1}{dz^2}+\lambda\varepsilon_1\mu_1f_1=0, \quad h_d<z<l,\qquad \frac{d^2f_2}{dz^2}+\lambda\varepsilon_2\mu_2f_2=0, \quad 0<z<h_d; \tag{9}$$

$$f_1(h_d)=f_2(h_d),\quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial f_1(h_d)}{\partial z}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial f_2(h_d)}{\partial z}, \tag{10}$$

где λ – спектральный параметр, подлежащий определению.

Из (9) следует, что искомые функции можно представить в виде

$$f_1(z)=\left(C_1e^{i\alpha z}+C_2e^{-i\alpha z}\right),\ \ h_d<z<l,\qquad f_2(z)=\left(D_1e^{i\beta z}+D_2e^{-i\beta z}\right),\ \ 0<z<h_d. \tag{11}$$

Здесь $\alpha=\lambda\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$; $\beta=\lambda\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$.

Подставляя (11) в граничные условия (10), во-первых, получим представление для функций f_1 и f_2:

$$f_1(z)=D\frac{\sin\beta h_d\sin\alpha(l-z)}{\sin\alpha(l-h_d)},\ h_d<z<l,\qquad f_2(z)=D\sin\beta z,\ \ 0<z<h_d, \tag{12}$$

во-вторых, характеристическое уравнение для определения спектрального параметра λ:

$$\operatorname{tg}\left(\lambda\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}(l-h_d)\right)\operatorname{ctg}\left(\lambda\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}h_d\right)+\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}}=0. \tag{13}$$

Обозначим через λ_m, $m=1,2,\ldots$, корни уравнения (13). Тогда базисные функции, используемые для построения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из уравнения (5), имеют следующее представление:

$$\phi_{nm}=DJ_1\left(\frac{\mu_{0n}r}{b(z)}\right)\frac{\sin\lambda_m\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}h_d}{\sin\lambda_m\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}(l-h_d)}\times\sin\lambda_m\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}(l-z),\ \ h_d<z<l, \tag{14}$$

$$\phi_{nm}=DJ_1\left(\frac{\mu_{0n}r}{b(z)}\right)\sin\lambda_m\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}z,\ \ 0<z<h_d,$$

где D – произвольная константа.

Разработанный алгоритм был проверен на пустом сферическом объемном резонаторе [2], для расчета спектра которого существуют строгие

формулы. Также была проведена оценка сходимости алгоритма с ростом размерности алгебраической задачи (3).

2. Численные результаты. Расчеты проводились для резонатора со следующими геометрическими размерами: радиус кривизны сферического зеркала $R = 39$ мм, апертура зеркала $2a_1 = 38$ мм, диаметр и длина отрезка круглого волновода $2a_2 = 18$ мм и $h = 12{,}434$ мм, длина резонатора $l = 35{,}295$ мм (см. рис. 1). На рис. 2 показаны линии равных значений амплитуды E_φ-компоненты электрического поля аксиально-симметричного колебания TE_{0116} резонатора с диэлектрическими шайбами. Как видно, для рассматриваемого колебания коническая часть поверхности резонатора лежит в области экспоненциально спадающего поля. Следовательно, влиянием этой части поверхности резонатора на возбуждаемые колебания можно пренебречь. Этим и объясняется выбор такой геометрии резонатора, как наиболее близкой к ОР с отрезком сверхразмерного круглого волновода [1–3]. Диэлектрические шайбы толщиной $h_d = 2{,}5$ мм из плавленого кварца с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3{,}824$ [4] (рис. 2, а) и из поликора с $\varepsilon = 9{,}6$ [4] (рис. 2, б) были расположены на дне цилиндрической части резонатора.

На рис. 3 приведены зависимости частоты f колебаний TE_{0116} (кривая 1) и TE_{0115} (кривая 2) резонатора от диэлектрической проницаемости ε образца, расположенного на дне цилиндрической части (сплошные кривые). Пунктирными кривыми на этом же рисунке показаны аналогичные зависимости для цилиндрического резонатора с указанными выше диэлектрическими шайбами. Диаметр такого цилиндрического резонатора равен $2a_2$, а длина — длине исследуемого резонатора l. Исследования проведены для типов колебаний TE_{0116} (пунктирная кривая 1) и TE_{0115} (пунктирная кривая 2), возбуждаемых в резонаторе данной геометрии.

Как видно из рис. 3, общая тенденция поведения приведенных зависимостей при изменении продольного индекса возбуждаемых в резонансном объеме колебаний сохраняется. Аналогичным образом для тех же колебаний ведут себя зависимости резонансной частоты от диэлектрической проницаемости образцов, расположенных в объеме, в случае цилиндрического резонатора. Только в этом случае, во всем диапазоне изменения ε, значение резонансной частоты f меньше. Похожее поведение зависимостей, приведенных на рис. 3, можно объяснить тем, что, как в случае рассматриваемого резонатора (см. рис. 1), так и для цилиндрического, геометрические размеры и структуры полей возбуждаемых колебаний в месте расположения образцов идентичны.

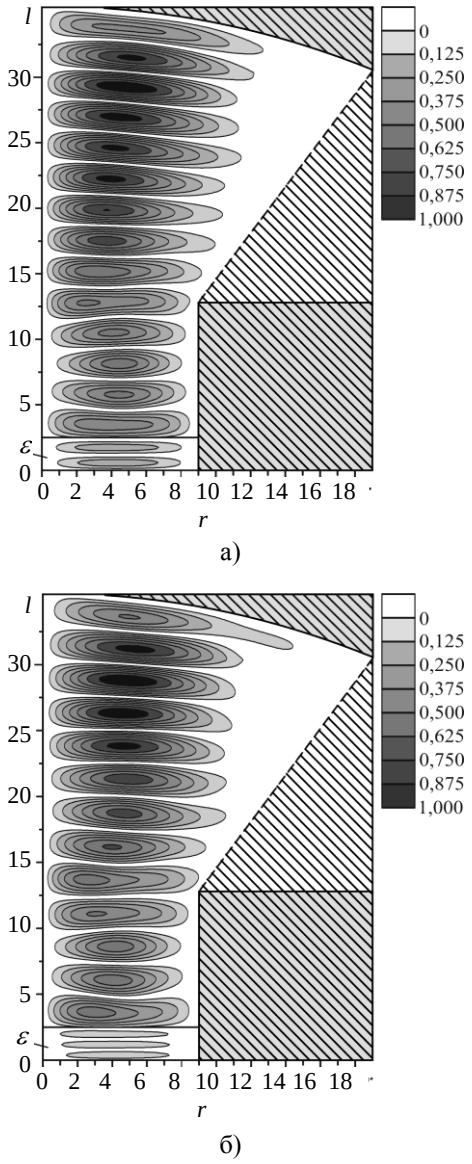

Рис. 2. Распределение полей в резонаторе: а) – $\varepsilon = 3{,}824$, $f = 67{,}138$ ГГц; б) – $\varepsilon = 9{,}6$, $f = 62{,}693$ ГГц

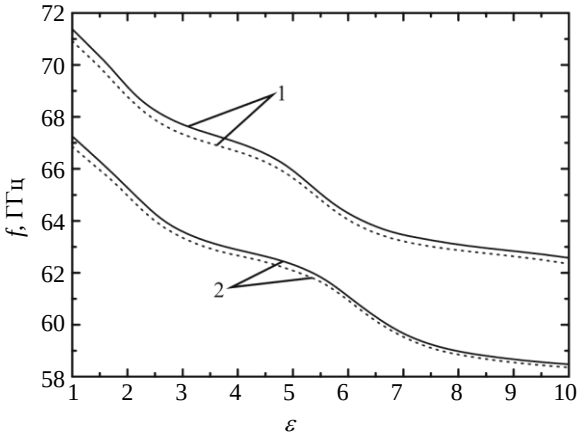

Рис. 3. Зависимость частоты от диэлектрической проницаемости образца в резонаторе

На рис. 4 приведены зависимости резонансной частоты f колебания TE_{0116} от толщины шайб, расположенных в резонаторе и имеющих разную диэлектрическую проницаемость. Кривая 1 построена для плавленого кварца, а кривая 2 – для поликора. Пунктирными кривыми на этом же рисунке показаны аналогичные зависимости для цилиндрического резонатора. На приведенных зависимостях можно выделить квазипериодические участки. При этом существуют участки как со слабо, так и сильно выраженной частотной зависимостью. Аналогичное поведение наблюдалось при исследовании зависимости частоты f колебания TE_{0116} от диэлектрической проницаемости образцов.

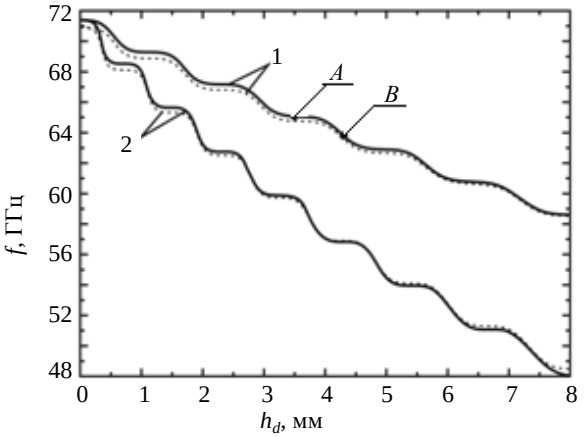

Рис. 4. Зависимость частоты от толщины диэлектрической шайбы в резонаторе

Для того чтобы понять причину такого поведения зависимостей резонансной частоты от толщины образца, на рис. 5 приведены линии равных значений амплитуды E_φ-компоненты электрического поля в резонаторе при разной толщине шайб из плавленого кварца. На рис. 5, а показано распределение электрической компоненты поля колебания TE_{0116} в резонаторе при $h_d = 3{,}5$ мм, что соответствует точке A на рис. 4. Распределение электрической компоненты поля этого же колебания в резонаторе при $h_d = 4{,}3$ мм (точка B) представлено на рис. 5, б. Как видно из рисунка, слабая зависимость частоты от толщины шайбы, расположенной в объеме резонатора, имеет место, когда узел электрической компоненты поля стоячей волны в резонаторе расположен вблизи границы образца (рис. 5, а). В том случае, когда вблизи границы образца расположена пучность электрической компоненты поля стоячей волны в резонаторе (рис. 5, б), наблюдается более сильная зависимость частоты от толщины образца. Подобные зависимости резонансной частоты от толщины и диэлектрической проницаемости тонких пластин, располагаемых непосредственно в объеме ОР со сферическими зеркалами, были получены в работе [5]. Кроме того, из рис. 4 следует, что по мере увеличения диэлектрической проницаемости образца зависимость частоты от толщины образца возрастает. В случае цилиндрического резонатора общий ход этих зависимостей аналогичен рассматриваемому.

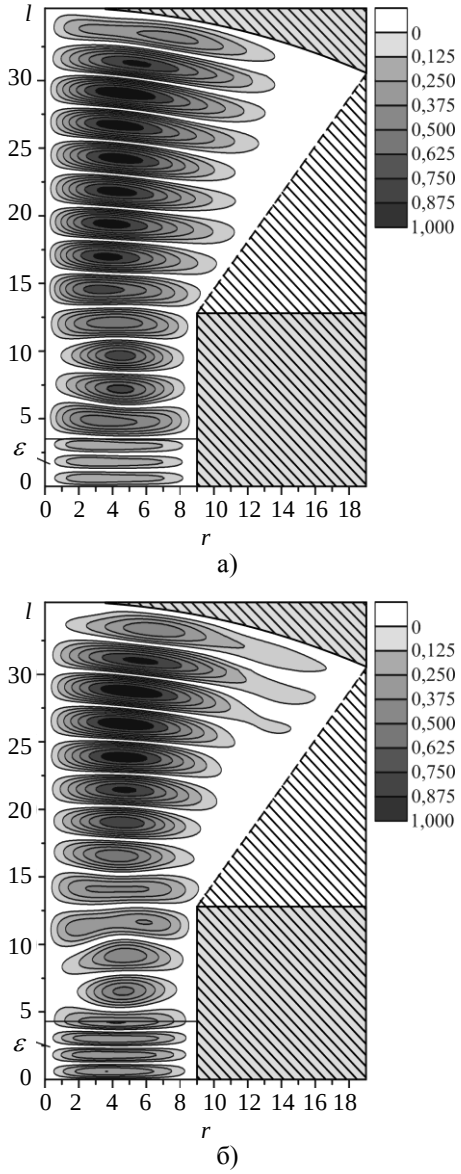

Рис. 5. Распределение полей в резонаторе при разной толщине шайб: а) – $h_d = 3{,}5$, $f = 65{,}035$ ГГц; б) – $h_d = 4{,}3$, $f = 63{,}789$ ГГц

Выводы. Построена приближенная математическая модель для нахождения спектра объемного сверхразмерного резонатора с диэлектрической шайбой. Такая резонансная система эквивалентна полусферическому ОР с отрезком закороченного сверхразмерного круглого волновода в центре плоского зеркала. Проведены численные исследования спектра такого резонатора, построены зависимости частот собственных колебаний от толщины h_d и диэлектрической про-

ницаемости ε образца, расположенного в объеме резонатора. Показано, что эти зависимости носят квазипериодический характер.

При этом в случае слабой зависимости резонансной частоты f от ε и h_d вблизи границы образца располагается узел электрической компоненты поля стоячей волны в резонаторе. Когда вблизи границы образца находится пучность электрической компоненты поля, зависимости f от ε и h_d имеют большую крутизну. Полученные в работе результаты могут быть использованы для измерения диэлектрической проницаемости цилиндрических образцов различной толщины резонансным методом как в коротковолновой части мм, так и в субмм диапазонах длин волн.

1. *Kuzmichev I. K.* An open resonator for physical studies / I. K. Kuzmichev, P. N. Melezhik, A. Ye. Poedinchuk // Intern. J. of Infrared and Millimeter Waves. – 2006. – 27, N 6. – P. 857–869.
2. *Попков А. Ю.* Объемные резонаторы в виде тел вращения сложной формы: численный алгоритм расчета спектра / А. Ю. Попков, А. Е. Поединчук, И. К. Кузьмичев // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2008. – 13, № 3. – С. 473–480.
3. *Попков А. Ю.* Открытый резонатор с отрезком круглого волновода: расчет и эксперимент / А. Ю. Попков, И. К. Кузьмичев // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – 14, № 4. – С. 425–432.
4. *Егоров В. Н.* Резонансные методы исследования диэлектриков на С.В.Ч. / В. Н. Егоров // Приборы и техн. эксперимента. – 2007. – № 2. – С. 5–38.
5. *Открытые* резонаторы с тонкими диэлектрическими пластинами / С. Н. Власов, Е. В. Копосова, С. Е. Мясникова, В. В. Паршин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – 49, № 3. – С. 219–226.

A. Y. Popkov

ELECTRODYNAMIC MODEL OF THE OPEN RESONATOR WITH A DIELECTRIC LAYER

The work is devoted to constructing an approximate mathematical model and theoretical study of the cavity resonator with a dielectrical layer. Such system supports high-*Q* axially-symmetrical oscillations. In this case the system is equivalent to a hemispherical open resonator with a segment of one-side shorted oversized circular waveguide. The dependences of the frequency of natural oscillations of the thickness and permittivity of dielectric layer are calculated. It is shown that the dependences have quasiperiodic behaviour.

Key words: dielectrometry, resonators, calculation of the spectrum.

О. Ю. Попков

ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ВІДКРИТОГО РЕЗОНАТОРА З ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ

Побудована наближена математична модель і теоретично досліджений об’ємний резонатор з діелектричним шаром. Така система при збудженні в резонансному об’ємі високодобротних коливань еквівалентна півсферичному відкритому резонатору з відрізком закороченого надрозмірного круглого хвилеводу в центрі плоского дзеркала. Побудовано залежності частот власних коливань від товщини та діелектричної проникності шару. Показано, що ці залежності носять квазіперіодичний характер.

Ключові слова: діелектрометрія, резонатори, розрахунок спектру.

Рукопись поступила 02.04.10 г.