

PACS numbers: 05.20.Gg, 05.30.Ch, 05.30.Fk, 51.60.+a, 71.10.Ca, 71.70.Di, 75.20.-g

## Новая теория электронного газа в магнитном поле и задачи для теории и эксперимента

И. М. Дубровский

*\*Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины,  
бульв. Акад. Вернадского, 36,  
03680, ГСП, Киев-142, Украина*

Показано, что общепринятая теория электронного газа металла в магнитном поле приводит к ряду противоречий, как в теории, так и в сопоставлении с результатами эксперимента. Предлагаемое объяснение, почему магнитный момент газа равен нулю в классической теории и в квантовой теории при замене суммирования интегрированием, хотя движение по орбите классической частицы или заполненное квантовое состояние обладают средним отрицательным магнитным моментом, неубедительно. Формула Ландау для диамагнитной восприимчивости не удовлетворяет принципиальным требованиям и не согласуется с экспериментом. Энергетический спектр  $2D$ -электрона в магнитном поле в теории Ландау — это эквидистантные пики с одинаковой кратностью вырождения (уровни Ландау). Такой спектр противоречит математическим теоремам о собственных значениях уравнения Шрёдингера с нулевым граничным условием. В общепринятой теории самосогласованно предполагают, что электронный газ однородно заполняет весь объём металла и вместе с однородно заряженной решёткой в среднем не создаёт электрического поля. Известно, что магнитное поле препятствует однородному распределению газа в плоскости, перпендикулярной полю. Эти противоречия устранены в новой теории, обзор принципов и полученных в настоящее время результатов которой изложен в данной статье. Теория исходит из обоснования статистической механики, предложенного А. Я. Хинчиным. В рассматриваемом случае это приводит к требованию, чтобы пространство осуществимых состояний системы было определено не только собственным значением энергии, но также собственным значением углового импульса относительно оси, параллельной магнитному полю. Гамильтониан электронного газа содержит энергию взаимодействия полного углового импульса с магнитным полем. Соответствующее слагаемое коммутирует с гамильтонианом. Если газ не вращается, его собственное значение должно быть равно нулю; поэтому его можно опустить. Тогда гамильтониан газа будет идентичен

гамильтониану газа взаимодействующих электронов в потенциальном поле. Эта задача рассмотрена методом функционала плотности. Гамильтониан, определяющий статистический оператор, описывает газ невзаимодействующих квазичастиц в остаточном потенциальном поле. Показано также, что уровни Ландау — следствие математической ошибки.

Показано, що загальноприйнята теорія електронного газу металу в магнетному полі призводить до деяких протиріч, як у теорії, так і у співставленні з результатами експерименту. Пропоноване пояснення, чому магнетний момент газу дорівнює нулю в класичній теорії і в квантовій теорії при заміні сумування інтегруванням, при тому що рух по орбіті класичної частинки або заповнений квантовий стан мають середній від'ємний магнетний момент, непереконливе. Формула Ландау для діамagnetної сприйнятливості не задовольняє принципівим вимогам і не узгоджується з експериментом. Енергетичний спектр  $2D$ -електрона в магнетному полі у теорії Ландау — це еквідистантні піки з однаковою кратністю виродження (рівні Ландау). Такий спектр суперечить математичним теоремам про власні значення Шрединґерового рівняння з нульовою крайовою умовою. У загальноприйнятій теорії самоузгоджено припускають, що електронний газ однорідно заповнює увесь об'єм металу і разом з однорідно зарядженою ґратницею в середньому не створює електричне поле. Відомо, що магнетне поле протидіє однорідному розподілу газу у площині, яка перпендикулярна полю. Нова теорія, огляд принципів і одержаних наразі результатів, яких викладено у даній статті, позбавлені цих протиріч. Теорія виходить із обґрунтування статистичної механіки, запропонованого О. Я. Хінциним. У розглядуваному випадку це приводить до вимоги, щоб простір можливих станів системи було визначено не тільки за власним значенням енергії, а й за власним значенням кутового імпульсу відносно осі, паралельної магнетному полю. Одним із доданків у Гамільтоніані електронного газу є енергія взаємодії повного кутового імпульсу з магнетним полем. Цей доданок комутує з Гамільтоніаном. Якщо газ не обертається, його власне значення має дорівнювати нулю; тому його можна не брати до уваги. Тоді Гамільтоніан газу буде ідентичним Гамільтоніану газу взаємодійних електронів у потенціальному полі. Цю задачу розглянуто методом функціоналу густини. Гамільтоніан, що визначає статистичний оператор, описує газ невзаємодійних квазичастинок у залишковому потенціальному полі. Також показано, що рівні Ландау є наслідком математичної помилки.

As shown, the conventional theory for an electron gas of metal in a magnetic field (based on Landau's work) leads to some contradictions in both the theory and the comparison to experiments. The contradictions, which cannot be eliminated in the Landau theory, are considered. The magnetic moment of gas equals to zero in the conventional theory just as in a classical statistical mechanics as well as in a quantum statistical mechanics, when the summation over the occupied states is replaced by the integration. However, a classical charged particle in a magnetic field moves in its

circular orbit and creates the diamagnetic moment. In the quantum theory, an eigenstate of particle in a magnetic field has always the average diamagnetic moment. The sum of equally directed magnetic moments cannot be equal to zero. The amendment to replacing summation by integration is taken into account in the Landau theory. Then, the magnetic moment is proved proportional to the volume, and the specific magnetic susceptibility of an electron gas is obtained. The Schrödinger equation of a system in a magnetic field has the complex coefficients. Therefore, an eigenstate has the nonzero field of average current density, all lines of which are closed in the considered area. The sum of these fields over all occupied states generates a non-uniform magnetization. Therefore, the specific magnetic susceptibility is meaningless. The energy spectrum of 2D-electron in a magnetic field in the Landau theory is equidistant peaks (Landau levels). The degeneracy multiplicities of these peaks are equal in magnitude. This spectrum is in contradiction with the mathematical theorems about the eigenvalues of Schrödinger equation with zero boundary condition. In the conventional theory, the homogeneous filling of whole area by the electron gas in a magnetic field is assumed. A crystal lattice, which is charged positively, is replaced by homogeneous background. Only under these assumptions, the average electric field that exerts on an electron is zero. However, as known, a magnetic field hinders homogeneously spreading of the electron gas in the plane perpendicular to it. These contradictions are eliminated in the new theory. The review of its principles and results obtained so far is presented in this paper. A. Ya. Khinchin has suggested the radically new method of theoretical justification of statistical mechanics. In the case under study, it requires that the space of system feasible states has to be defined not only by the energy eigenvalue, but also by the eigenvalue of angular momentum relative to axis that is parallel to the magnetic field. The Hamiltonian of electron gas in magnetic field contains energy of interaction between the total angular momentum and the magnetic field. This term is commutative with Hamiltonian gas, and its eigenvalue has to be equal to zero. Therefore, it can be eliminated. Then, the gas Hamiltonian will be identical with those of gas of interacting electrons in potential field. This problem is considered by means of the density functional method. As shown, the Landau levels are a result of mathematical mistake.

**Ключевые слова:** электронный газ, магнитное поле, угловой импульс, статистический оператор, магнитный момент, плотность газа, плотность состояний.

**Ключові слова:** електронний газ, магнетне поле, кутовий імпульс, статистичний оператор, магнетний момент, густина газу, густина станів.

**Keywords:** electron gas, magnetic field, angular momentum, statistical operator, magnetic moment, density of gas, density of states.

*(Получено 22 сентября 2015 г.)*

## 1. ЗАЧЕМ НУЖНА НОВАЯ ТЕОРИЯ

### 1.1. Общепринятая теория. История и успехи

Эта теория имеет столетнюю историю. Начало положил Нильс Бор, который в своей докторской диссертации, защищённой в 1911 году, рассмотрел электронный газ, в том числе и в магнитном поле, методом статистической физики Больцмана–Гиббса, который тогда ещё был в стадии становления. Для магнитного момента газа Бор получил странный результат. Вот как представил его он сам в краткой заметке о защите диссертации в журнале ‘Nature’ [1] (полностью диссертация опубликована не была): ‘Finally, it is shown that the presence of free electrons, contrary to the generally adopted opinion, will not give rise to any magnetic properties of the metals’.

Общепринятое мнение было основано на известном решении задачи о движении заряженной частицы в однородном магнитном поле. Было показано, что в плоскости, перпендикулярной полю, частица движется по фиксированной круговой орбите. При этом направление движения таково, что независимо от знака заряда движение создаёт магнитный момент, направленный против поля и равный:

$$\mu = -\frac{\partial E}{\partial B}, \quad (1)$$

где  $E$  — кинетическая энергия движения по орбите,  $B$  — магнитная индукция. Поэтому нулевое значение среднестатистического магнитного момента электронного газа выглядело парадоксально. Это противоречило и эксперименту, так как многие металлы создают диамагнитный момент, который больше, чем создаваемый теми же ионами в непроводящих соединениях. Но это было такое время в физике, когда обнаружилось много парадоксальных результатов. Сам Бор не возвращался больше к этому вопросу. В 1912 году он опубликовал свою полуклассическую теорию атома. Другие физики подробно исследовали его, но результат остался неизменным. В 1921 году такое исследование опубликовала van Leeuwen [2], и с тех пор он носит название «Теорема Бора–ван Леувен». Многие теоретические и экспериментальные парадоксы того времени были разрешены с появлением в 1925 году квантовой механики. В 1930 году Ландау опубликовал работу [3], в которой получил диамагнетизм электронного газа как чисто квантовое явление. В ходе решения этой задачи был найден также спектр энергии состояний электрона в магнитном поле. Ниже будет показано, что с современной точки зрения в работе Ландау много теоретических ошибок. Но она была признана и послужила основой для построения обширной и успешной области науки. Теория была обобщена с учётом периодического

потенциала кристаллической решётки. Были рассмотрены кинетические явления в магнитном поле. Оказалось, что электронный газ в магнитном поле проявляет, кроме диамагнетизма, много других эффектов. Эти эффекты исследовались экспериментально и успешно объяснялись на основе теории Ландау. Например, экспериментальные исследования осцилляций магнитного момента висмута при увеличении магнитной индукции однородного поля были выполнены de Haas and van Alphen [4] и Shoenberg [5]. Для других металлов этот эффект был исследован Веркиным, Лазаревым и Руденко [6]. Другие эффекты описаны в монографии D. Shoenberg [7]. Квантовая теория этих эффектов была развита в работах Peierls [8] и Onsager [9]. Следует отметить особенно большой вклад в теоретические и экспериментальные исследования свойств электронного газа, внесённый физиками Харькова. Результаты этих исследований изложены в монографии И. М. Лифшица и др. «Электронная теория металлов» [10], где было отмечено, что большая часть информации об электронном строении металлов получена из экспериментов по эффектам в магнитном поле. Теория квантового эффекта Холла, отмеченная Нобелевскими премиями, основывается на энергетическом спектре, полученном Ландау. Теория Ландау вошла в такие классические монографии, как: J. H. van Vleck 'Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities' [11], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц «Теоретическая физика», т. 3, т. 5 [12, 13], А. А. Абрикосов «Основы теории металлов» [14].

## 1.2. Противоречия в общепринятой теории

При всех успехах общепринятая теория с самого начала содержала некоторые противоречия, как теоретические, так и в сопоставлении с экспериментом.

### 1.2.1. Парадокс теоремы Бора–ван Леувен

Хотя в квантовой теории Ландау и был, как будто, объяснён экспериментально наблюдаемый диамагнетизм металлов, но это не решило парадокса теоремы Бора–ван Леувен. Было много попыток объяснить исчезновение суммарного магнитного момента, создаваемого орбитальным движением электронов в газе (см. [11]). В конце концов, общепринятым оказалось следующее объяснение. Этот суммарный диамагнитный момент однородно распределённых орбит полностью компенсируется парамагнитным моментом приграничного тока, который создаётся неполными орбитами, отражающимися от поверхности (рис. 1). Это объяснение вызывает сомнение. Казалось бы, приграничный ток должен зависеть от формы

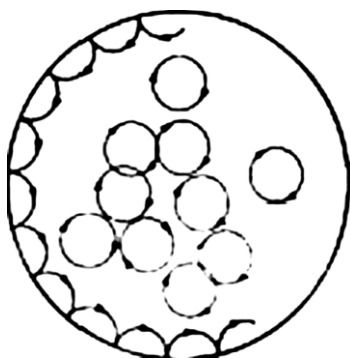


Рис. 1. «Объяснение» парадокса теоремы Бора–ван Леувен.<sup>1</sup>

границы и условий отражения, а внутренние электроны этих условий не чувствуют. Р. Пайерлс [15], вычисляя стандартным образом свободную энергию электронного газа с гамильтонианом заряженных частиц в магнитном поле, доказывает, что точная компенсация всегда происходит. Оказывается, что эта свободная энергия не зависит от магнитного поля, и поэтому средний магнитный момент газа  $\bar{M} = -\partial F/\partial B$  равен нулю. Но при этом вычислении пренебрегают всеми особенностями приграничных траекторий, потому что они составляют малую, порядка  $N^{-1/3}$  ( $N$  — число частиц), долю всех траекторий. Поэтому оно не учитывает эффекта приграничного тока. Для вычисления магнитного момента это неправильно. Приграничный ток в плоскости создаёт момент, пропорциональный охватываемой им площади. Если объёмный магнитный момент равен нулю, то учёт приграничного тока должен привести к парамагнитному моменту газа.

Этот парадокс сохраняется и при квантостатистическом рассмотрении. В  $m$ -м стационарном состоянии электрона в магнитном поле формула, которая связывает среднее значение магнитного момента, энергию состояния и магнитное поле, имеет тот же вид, что и в классической механике (см. формулу (1)):  $\langle \mu \rangle_m = -(\partial E_m / \partial B)$ . Эта величина отрицательна для всех состояний электрона в магнитном поле, кроме, быть может, приповерхностных. Тогда квантостатистическое среднее значение полного магнитного момента газа определяется как сумма по всем состояниям произведений квантового среднего значения момента и числа заполнения для каждого состояния:

$$\langle \bar{M} \rangle = \sum_m \langle \mu \rangle_m n_m(T, B) < 0. \quad (2)$$

Проблема статистического усреднения — в том, чтобы найти числа заполнения, которые зависят от кратности вырождения со-

стояний, температуры, а в теории Ландау также и от величины магнитного поля. Но очевидно, что число заполнения всегда отрицательно, а поэтому и магнитный момент должен быть отрицательной и немалой величиной даже при замене суммирования интегрированием. А в теории Ландау при замене суммирования интегрированием термодинамический потенциал не зависит от магнитного поля; следовательно, магнитный момент равен нулю.

### 1.2.2. Одночастичная задача. Решение Ландау

В системе «электрон в однородном магнитном поле» есть только одно физически выделенное направление: направление магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Поэтому волновые функции электрона в стационарных состояниях должны быть аксиально симметричными. Гамильтониан электрона в отсутствие других полей тоже должен быть аксиально симметричным. Его собственные функции должны быть также собственными функциями оператора углового импульса относительно любой оси, параллельной магнитному полю. (Угловой импульс — это дословный перевод принятого в англоязычной литературе названия для момента количества движения ‘angular momentum’). В системе координат, ось  $\mathbf{Z}$  которой направлена параллельно магнитному полю, волновая функция должна быть собственной функцией операторов  $\hat{p}_z = -i\hbar(\partial/\partial z)$  и  $\hat{h}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ . Какое-либо добавочное внешнее поле, в частности граничное условие, может нарушить эту симметрию, но не может создать новую симметрию.

Гамильтониан электрона в магнитном поле зависит не от индукции магнитного поля, которая входит в уравнения Ньютона и Лагранжа, а от векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , который определяется уравнением

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}. \quad (3)$$

Это векторное неоднородное дифференциальное уравнение (система трёх уравнений) имеет решения в виде суммы необходимого решения неоднородного уравнения и произвольного решения однородного уравнения  $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . Общим решением однородного уравнения является градиент произвольной дифференцируемой функции. Принято считать (см. [16]), что в качестве выражения для векторного потенциала можно использовать любое решение уравнения (4). Стремясь свести задачу к уравнению Шрёдингера для линейного осциллятора, Ландау рассматривал электрон в прямоугольной призме (см. [3, 12]). Рёбра призмы  $h_x, h_y, h_z$  параллельны координатным осям. Ось  $\mathbf{Z}$  параллельна магнитному полю. На гранях, перпендикулярных осям  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{X}$ , приняты пе-

риодические граничные условия:

$$\Psi\left(-\frac{h_x}{2}, y, z\right) = \Psi\left(\frac{h_x}{2}, y, z\right), \quad \Psi\left(x, y, -\frac{h_z}{2}\right) = \Psi\left(x, y, \frac{h_z}{2}\right). \quad (4)$$

На гранях, перпендикулярных оси  $Y$ , граничное условие не накладывается, а требуется только нормируемость волновой функции, то есть достаточно быстрое убывание её модуля с расстоянием от координатной плоскости  $XZ$ . Чтобы решить уравнение Шрёдингера при этих граничных условиях, Ландау (см. [12]) выбирает векторный потенциал однородного магнитного поля  $\mathbf{V} = (0, 0, B)$  в виде:

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0). \quad (5)$$

Соответственно, гамильтониан электрона в магнитном поле без учёта спина имеет вид:

$$\hat{H}_L = \frac{1}{2m_e} \left[ (\hat{p}_x - eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right]. \quad (6)$$

Этот гамильтониан не удовлетворяет требованию аксиальной симметрии. Это проявляется в том, что оператор углового импульса относительно оси  $Z$  не коммутирует с гамильтонианом, то есть эта компонента углового импульса не является интегралом движения. Вместо неё интегралом движения является компонента импульса  $p_x$ . Такую же симметрию имеет и модуль собственной функции этого гамильтониана. Это доказывает, что выбор векторного потенциала в виде (5) приводит к неправильному описанию рассматриваемой системы.

Собственные значения энергии имеют вид:

$$E_{np_z} = E_{\perp} + E_{\parallel} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m_e}, \quad \omega = eB/m_e, \quad n \geq 0, \quad (7)$$

где  $\omega$  — циклотронная частота,  $m_e$  — масса электрона. Координата центра классической орбиты  $\hat{y}_0 = \hat{p}_x/eB$  (см. [12]; здесь учтено, что заряд электрона отрицательный), от которой зависит волновая функция, пропорциональна компоненте импульса  $p_x$ , которая при периодических граничных условиях может принимать счётно-бесконечное множество положительных и отрицательных значений. Так как энергия не зависит от  $p_x$ , каждое значение энергии вырождено с бесконечной кратностью. Это физически бессмысленно. Собственные значения и кратность их вырождения должны определяться из решения соответствующей задачи, в постановку которой входят граничные условия. Неправильная



кратность вырождения означает, что граничные условия определены неудовлетворительно. Чтобы исправить бесконечное вырождение уровней в  $E_{\perp}$ , Ландау из соображений квазиклассической теории вводит дополнительное условие: центр классической электронной орбиты должен находиться внутри рассматриваемой области. Это непоследовательно: все граничные условия должны учитываться сразу, при решении дифференциального уравнения. Координата  $\hat{x}_0 = x - \hat{p}_y/eB$  не может иметь определённого значения одновременно с  $\hat{y}_0$ , так как коммутатор соответствующих операторов равен числу, хотя оба они коммутируют с гамильтонианом  $\hat{H}_L$ . Поэтому требование локализации центра классической орбиты внутри области не только нарушает граничные условия, при которых решалось уравнение, но и не может быть хорошо определено при периодическом граничном условии для зависимости от координаты  $x$ .

Эти ошибки частично были устранены в работе [17]. Уравнение Шрёдингера рассматривалось в цилиндрических координатах.<sup>†</sup> Для этого векторный потенциал  $\mathbf{A}$  был выбран авторами в виде:  $\mathbf{A} = (1/2)(-By, Bx, 0)$ . Граничные условия: на торцах цилиндра — периодические, а в плоскости перпендикулярной магнитному полю — нормируемость, так же, как и в решении Ландау. При этом переменные разделяются, и собственные функции имеют следующий вид:

$$\Psi(r, \varphi, z) = \psi_{j,l}(r) \exp(ik_z z + il\varphi). \quad (8)$$

Как и должно быть вследствие симметрии, интегралами движения являются, кроме энергии, компонента углового импульса  $\hbar l_z$  и компонента импульса  $\hat{p}_z$ . Их собственные значения соответственно  $\hbar l$  и  $2\pi\hbar k_z/L$ , где квантовые числа  $l$  и  $k_z$  могут принимать любые целочисленные значения. Сомножитель  $\psi_{j,l}(r)$  зависит от радиального квантового числа  $j$ , которое может принимать любые неотрицательные целые значения. Собственные значения энергии имеют вид (7), где  $n = j + (l + |l|)/2$ . При  $l \leq 0$  энергия не зависит от значения квантового числа  $l$ , от которого существенно зависит вид функции  $\Psi(r, \varphi, z)$ . Следовательно, все собственные значения энергии вырождены с бесконечной кратностью. Спектр энергии полностью совпадает со спектром, полученным Ландау [3, 12]. Чтобы ограничить положение центра классической орбиты площадью сечения цилиндра радиуса  $R$ , рассмотрим координаты центра классической орбиты. Они в этом представлении имеют симметричный вид:  $\hat{x}_0 = x/2 - \hat{p}_y/eB$ ,  $\hat{y}_0 = y/2 + \hat{p}_x/eB$  и,

<sup>†</sup> В [12] такое рассмотрение приведено в качестве «Задачи» к параграфу, в котором излагают решение Ландау.

как и в решении Ландау, сохраняются, но не коммутируют между собой. Определим квадрат расстояния центра классической орбиты от оси (см. [18]):

$$\hat{r}_0^2 = \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 = 2\lambda^2 \left[ (\hbar\omega)^{-1} \hat{H}_0 - \hat{l}_z \right], \quad \lambda^2 = \hbar/eB. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda$  — магнитная длина, характерный масштаб теории. Радиус классической орбиты электрона  $\rho = \lambda(E_{\perp}/\hbar\omega)^{1/2}$ . Собственные значения оператора  $\hat{r}_0^2$  имеют вид:

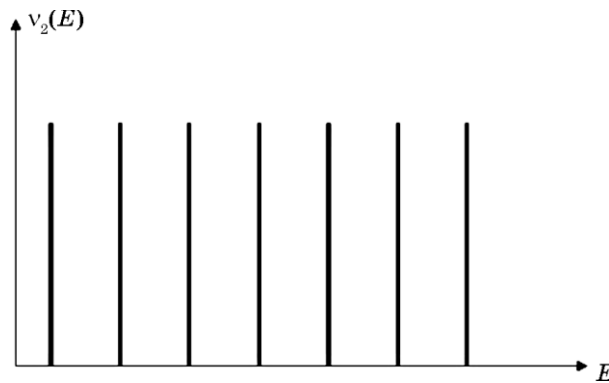
$$r_0^2 = 2\lambda^2 \left( j + \frac{|l| + l + 1}{2} - l \right) = 2\lambda^2 \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad k = j + \frac{|l| - l}{2} = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

При  $l > 0$  орбита охватывает ось, а при  $l < 0$  ось находится вне площади, ограниченной орбитой. Поэтому при отрицательных значениях углового импульса расстояние от оси центра орбиты с определённой энергией  $E_{\perp}$ , определяемое квантовым числом  $k$ , может принимать счётно-бесконечное число значений. Такую картину квазиклассических состояний электрона в магнитном поле можно получить и в последовательно квазиклассической теории, не прибегая к квантовой механике (см. монографию [19]). Но квазиклассическая теория не определяет вырождения уровня требованием ограничения расстояния центра орбиты от оси, так как азимут центра остаётся неопределённым. В квантовой механике пара квантовых чисел  $(n, k)$  полностью определяет квантовое состояние, так же как и пара  $(j, l)$ . Модуль волновой функции аксиально симметричен и его максимальное значение лежит в кольце с радиусом  $r_0(k)$  и шириной  $2\rho(n)$ . Независимо от энергии состояния радиус кольца может быть порядка размера рассматриваемого образца. Поэтому представление о локальной однородности по отношению к классической орбите других внешних полей, например деформации, или параметров закона дисперсии (см. [20], а также [10, 19]) неверно.

Ограничивая вырождение условием  $r_0(k) \leq R$ , получим спектр Ландау для энергии  $E_{\perp}$ : бесконечную последовательность одинаковых равноотстоящих пиков. Наименьшая энергия —  $\hbar\omega/2$ , расстояние между пиками —  $\hbar\omega$ , кратность вырождения состояния с квантовым числом энергии  $n$ :

$$D_n = 2 \left\{ \left\lceil \frac{eBS}{2\pi\hbar} - \frac{1}{2} \right\rceil + 1 \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $S$  — площадь поперечного сечения цилиндра, скобки  $[a]$  обозначают целую часть заключённого в них числа, удвоение — спиновое вырождение. Обычно формулу (11) представляют в виде  $D_n = eBS/\pi\hbar$ , пренебрегая тем, что кратность вырождения должна



**Рис. 2.** Плотность состояний  $2D$ -электронного газа в магнитном поле — уровни Ландау.<sup>2</sup>

быть натуральным числом. На самом деле ступенчатый вид функции  $D_n(B)$  может быть одной из причин магнитных осцилляций (см. работу [21]). Плотность состояний этого спектра схематически представлена на рис. 2. Из-за неправильного наложения граничных условий кратность вырождения собственных значений определена неправильно. Известно (см. монографию [22]), что наименьшее собственное значение двумерного уравнения второго порядка при граничном условии обращения решений в нуль на границе области не вырождено. Далее кратность вырождения возрастает с увеличением собственных значений и стремится к постоянной величине асимптотически. Неправдоподобно также то, что любое по интенсивности поле качественно изменяет плотность одночастичных состояний при как угодно больших значениях энергии.

Вырождение по квантовому числу  $k$  обусловлено тем, что любые отрицательные значения квантового числа углового импульса  $l$  не изменяют значения энергии. Тогда оказывается, что электронный газ в основном состоянии, когда все состояния ниже уровня Ферми заполнены, имеет очень большой отрицательный угловой импульс. Это совершенно необъяснимо с точки зрения физики. Кроме вырождения по  $k$ , существует ещё один тип вырождения при неотрицательных значениях  $l$ . Квантовое число энергии  $E_{\perp}$  (см. формулу (7)) в этом случае является суммой двух неотрицательных чисел:  $n = j + l$ . Очевидно, что кратность такого вырождения каждого значения энергии  $E_{\perp}(n)$  равна  $n + 1$ . Обычно это вырождение не учитывают, хотя, как будет показано ниже, существует только это вырождение. Состояния с одинаковыми пространственными волновыми функциями, но противоположно направленными спинами в магнитном поле имеют разные энергии. Это приводит к парамагнетиз-

му Паули и снимает вырождение по спину. При рассмотрении орбитального диамагнетизма можно для простоты этого не учитывать (см. монографию [14]).

В работе [23] показано, что векторный потенциал, соответствующий магнитному полю  $\mathbf{B}$  однозначно определён необходимым решением уравнения (3). В случае однородного поля векторный потенциал и соответствующий ему гамильтониан имеют вид:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0),$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_e} \left[ \left( \hat{p}_x - \frac{eBy}{2} \right)^2 + \left( \hat{p}_y + \frac{eBx}{2} \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right]. \quad (12)$$

Произвол в выборе вида векторного потенциала, называемый калибровочной инвариантностью, недопустим. В работе [3] уравнение Шрёдингера первоначально имеет аксиально симметричный вид с гамильтонианом  $\hat{H}_0$ . Переход к гамильтониану  $\hat{H}_L$  осуществляется подстановкой  $\Psi(\mathbf{r}) = \exp(-ieBxy/2\hbar)\psi(\mathbf{r})$ . Далее находят функцию  $\psi(\mathbf{r})$  как собственную функцию гамильтониана  $\hat{H}_L$  при описанных выше граничных условиях (см. формулу (3) и последующее описание). Но функция  $\Psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет тем же граничным условиям, что и  $\psi(\mathbf{r})$ , только тогда, когда это условия обращения функции в нуль на границах области.

### 1.2.3. Диамагнитная восприимчивость

В трёхмерном случае  $E = E_\perp + E_\parallel$ , а плотность состояний  $v_3(E) = \int_0^\infty v_2(E - \varepsilon)v_1(\varepsilon)d\varepsilon$ . Термодинамический потенциал электронного газа в теории Ландау при  $T \rightarrow 0$  К имеет вид (см. монографию [14]):

$$\Omega = -\frac{8}{3} \frac{VeB\sqrt{2m_e}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{n_\zeta} \left[ \zeta - \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}, \quad n_\zeta = \frac{\zeta}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Здесь  $V = SL$  — объём цилиндра,  $\zeta$  — энергия Ферми. В формуле (13) интегрирование по  $p_z$  произведено. Суммирование по  $n$  производят путём замены его интегрированием. При этом оказывается, что результат не зависит от магнитного поля, то есть в соответствии с теоремой Бора–ван Леувен магнитный момент  $\langle M \rangle = -\partial\Omega/\partial B = 0$ . Это интерпретируют как результат пренебрежения квантовым свойством системы — дискретностью энергетических уровней. Если учесть поправку к замене суммирования

интегрированием по формуле Эйлера–Маклорена, то получается магнитный момент, пропорциональный объёму. Тогда можно ввести удельную диамагнитную восприимчивость электронного газа:

$$\chi_{\text{dm}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial B^2} = -\frac{(3n_{\text{el}})^{\frac{1}{3}} e^2}{12\pi^{\frac{4}{3}} m_e}, \quad n_{\text{el}} = \frac{N}{V}. \quad (14)$$

Из общих соображений очевидно, что эта формула не может быть правильной. Она не зависит от постоянной Планка, то есть не может описывать квантовый эффект, который должен исчезать при  $\hbar = 0$ . Парамагнитная восприимчивость электронного газа  $\chi_{\text{pm}} = 3\chi_{\text{dm}}$  обусловлена существованием у электрона спина и магнитного момента, которые обращаются в нуль при  $\hbar = 0$ . Пропорциональность парамагнитной восприимчивости  $n_{\text{el}}^{1/3}$  объясняется тем, что некомпенсированные спины могут иметь только электроны в состояниях, энергии которых близки к энергии Ферми. Орбитальные магнитные моменты во всех состояниях направлены против магнитного поля, и поэтому диамагнитная восприимчивость должна быть пропорциональна  $n_{\text{el}}$ . Если тем же методом вычислять термодинамический потенциал двумерного газа, то суммирование при низких температурах можно произвести, не прибегая к приближённой формуле Эйлера–Маклорена. При этом результат также состоит из двух слагаемых. Основное не зависит от магнитного поля. Второе слагаемое мало, пропорционально квадрату магнитного поля, но не зависит от концентрации электронов, что, очевидно, бессмысленно. Не соответствует формула Ландау и эксперименту. Из неё следует, что свободный электронный газ должен быть парамагнитным. Обычно диамагнетизм электронного газа в металлах объясняют малостью эффективной массы по сравнению с массой свободного электрона (см. монографию [14]). Но сопоставление с другими эффектами, зависящими от эффективной массы электронов проводимости, не проведено. Количественно сравнивать формулу (14) с результатами измерений магнитной восприимчивости невозможно, так как эти результаты сильно различаются у разных авторов (см. таблицы [24]).

#### 1.2.4. Диамагнитный ток

Чтобы понять является ли намагниченность электронного газа однородной, то есть имеет ли смысл введение удельной магнитной восприимчивости, нужно рассмотреть ток, генерирующий намагниченность. Намагниченность газов рассматривалась в монографиях [13, 25]. В теории намагниченности сред (см. монографию [25]) намагниченность определяют уравнением:

$$\text{rot}(\mathbf{M}) = \overline{\sigma \mathbf{v}}. \quad (15)$$

Здесь  $\sigma$  — плотность движущегося заряда,  $\mathbf{v}$  — его скорость. Черта сверху обозначает усреднение по объёму, приходящемуся на одну частицу. Так как электроны не обладают внутренней структурой, то диамагнетизм может быть связан только с током орбитального движения. В квазиклассической теории радиус минимальной орбиты  $\rho(n=0) \sim \lambda = \sqrt{\hbar/eB}$ . В поле 0,1 Тл эта величина порядка  $10^{-7}$  м, что намного больше, чем среднее расстояние между центрами орбит при однородном распределении обычной для металлов плотности электронов. Поэтому усреднение не играет роли и уравнение (15) можно переписать в виде  $\text{rot}(\mathbf{M}) = \mathbf{j}$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока. Граничным условием для этих уравнений является обращение намагниченности в нуль вне границы области, содержащей электронный газ. Определить поле плотности тока в квазиклассической модели представляется невозможным. Последовательный квантово-механический подход позволяет выявить многие существенные свойства этого поля, но это не было сделано.

В любом состоянии электрона в магнитном поле средняя плотность электрического тока не равна нулю тождественно. Действительно, средняя плотность тока описывается формулой (см. монографию [12]):

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{m_e} |\psi(\mathbf{r})|^2 \left( \text{grad}(\Phi(\mathbf{r})) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right). \quad (16)$$

Здесь  $|\psi(\mathbf{r})|$  — модуль волновой функции состояния, и  $\Phi(\mathbf{r})$  — её фаза,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал магнитного поля. Если магнитное поле не равно нулю, то векторный потенциал не может быть пропорционален градиенту дифференцируемой функции, следовательно,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  не может быть равна нулю тождественно. Если состояние является стационарным, то все линии тока должны замыкаться в рассматриваемой области. Тогда ток не приводит к изменению распределения плотности заряда и не совершает работы. Единственным его наблюдаемым проявлением является создание среднего магнитного момента рассматриваемого состояния. В решении Ландау с гамильтонианом  $\hat{H}_L$  (см. монографию [12]) линии тока параллельны оси  $\mathbf{X}$  и замыкаются на бесконечности. Наряду с энергией, сохраняющейся величиной является импульс в направлении оси  $\mathbf{X}$ , направление которой определено граничными условиями. Отсюда и получается прямолинейный ток. Угловой импульс при этом не сохраняется. Это неправильно. Если граничные условия нарушают симметрию системы, они разрушают соответствующий интеграл движения, но не могут создать новый закон сохранения. Это также показывает, что задача по-

ставлена и решена неверно. Так как токи не замыкаются в рассматриваемой площади, то нельзя определить и магнитный момент. Если дополнить постановку задачи в работе [17] граничным условием обращения волновой функции в нуль на боковой поверхности цилиндра, то аксиальная симметрия приведёт к тому, что линии тока будут окружностями. Ток в направлении оси  $Z$  равен нулю, так как энергия не зависит от знака  $k_z$ , волновая функция в поперечной плоскости не зависит от  $k_z$  (см. формулы (7, 8)), и  $\exp(\pm ik_z z)$  можно заменить функциями  $\sin(k_z z)$ ,  $\cos(k_z z)$ , удовлетворяющими нулевому граничному условию на торцах цилиндра. Сумма токов различных заполненных состояний не может быть тождественно равна нулю и тоже имеет аксиальную симметрию. Следовательно, даже в рамках общепринятой теории поле намагниченности неоднородно, аксиально симметрично и имеет только  $z$ -компоненту. Удельная магнитная восприимчивость имеет смысл только тогда, когда намагниченность создаётся внутриатомными токами и в среднем однородна.

### **1.2.5. Неоднородность плотности электронов**

В общепринятой модели плотность электронного газа полагают однородной. Только при таком предположении, считая ионную решётку в среднем однородным положительно заряженным фоном, можно считать среднее электрическое поле, действующее на электрон, равным нулю, то есть пренебрегать кулоновским взаимодействием электронов. Это предположение самосогласованно, но противоречит известному экспериментальному факту.

Удержание (confinement) — так называют хорошо изученный экспериментально и качественно объяснимый эффект ограничения расширения газа заряженных частиц магнитным полем. В однородном магнитном поле электронный газ в однородно положительно заряженном цилиндре должен в плоскости перпендикулярной полю в состоянии равновесия иметь неоднородную, убывающую с расстоянием от оси, плотность. На этом эффекте основаны методы удержания горячей плазмы от контакта со стенками сосуда при управляемом термоядерном синтезе. Но и в классической теории Бора, и в квантовой статистической теории Ландау газ однородно заполняет весь отведённый объём.

## **2. НОВАЯ ТЕОРИЯ**

### **2.1. Принципы новой теории**

Главная идея, которая легла в основу новой теории, была высказана

А. Я. Хинчиным в монографии [26]. В этом исследовании состояние газа, состоящего из  $N$  одинаковых частиц, описывается движением точки в фазовом пространстве импульсов и координат. Это пространство бесконечно по всем координатам и импульсам и имеет  $6N$  измерений для  $3D$ -газа. Свободная, то есть не подверженная действию внешних полей,  $3D$ -система в общем случае имеет семь интегралов движения, то есть функций импульсов и координат составляющих её частиц, значения которых не изменяются при движении фазовой точки в соответствии с уравнениями Гамильтона. Это — энергия, три компоненты полного импульса и три компоненты полного углового импульса относительно центра масс. Как известно (теорема Нётер), они связаны с симметриями: однородность времени, однородность пространства и изотропность пространства. Соответствующие семь уравнений:

$$H(\{\mathbf{p}_v\}) = E_0, \quad \mathbf{P} = \sum_v \mathbf{p}_v = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{L} = \sum_v \mathbf{l}(\mathbf{p}_v, \mathbf{x}_v) = \mathbf{L}_0, \quad (17)$$

определяют гиперповерхность, то есть пространство  $6N - 7$  измерений в фазовом пространстве. Уравнение сохранения энергии ограничивает объём в импульсном подпространстве, так как для свободного газа оно имеет вид:  $\sum_v^N [|\mathbf{p}_v|^2 / (2m_v)] + U(\{\mathbf{r}_v\}) = E_0$ . Здесь  $U(\{\mathbf{r}\})$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц между собой. Предположим, что частицы не имеют внутренних степеней свободы и взаимодействуют центральными силами. Тогда все семь законов сохранения выполняются в орбитальном движении частиц. Если система находится во внешнем поле, то некоторые или все компоненты импульса и углового импульса не сохраняются. Статистическая механика равновесных систем рассматривает системы, для которых объём координатного подпространства тоже ограничен. Обычно это обусловлено внешним потенциальным полем, в котором потенциальная энергия частицы неограниченно растёт при удалении от некоторой центральной области. Тогда уравнение сохранения энергии определяет гиперповерхность фазового пространства, объём которой ограничен. Эту гиперповерхность Хинчин называет инвариантным (относительно преобразований, описываемых уравнениями Гамильтона) множеством. Вся траектория системы лежит на этой гиперповерхности, то есть внутри этого  $(6N - 1)$ -мерного пространства ограниченного объёма. Задача вывода термодинамики системы сводится к вычислению этого объёма  $\Omega$  в зависимости от термодинамических параметров: энергии, числа частиц, параметров удерживающего потенциала (например, в случае «ящика» — его объёма  $V$ ) и внешнего поля. Хинчин указал, что не только закон сохранения энергии, но все имеющиеся в системе интегралы движения



должны учитываться при вычислении объёма инвариантного множества; но это обычно не приводит к существенным поправкам. Каждое уравнение закона сохранения понижает на единицу размерность гиперповерхности, но это несущественно изменяет её объём при очень большом числе частиц  $N$ . Внешнее поле, ограничивающее пространственные размеры системы, нарушает однородность пространства. Поэтому полный импульс системы уже не является интегралом движения. Даже если он и является интегралом движения для системы газ + ящик, он не может быть существенным, так как значение полного импульса может быть изменено переходом к другой инерциальной системе отсчёта (принцип относительности). Закон сохранения углового импульса может соблюдаться полностью или частично, например, в сферическом или цилиндрическом ящике с гладкими стенками при отсутствии или соответствующей симметрии другого внешнего поля. Если ящик имеет неидеальную форму или поверхность, то закон соблюдается для системы «ящик с газом». Обмен угловыми импульсами между ящиком и газом происходит при столкновении частиц со стенками. Это, очевидно, приведёт к малым симметричным флуктуациям углового импульса газа при сохранении среднего значения. Вопрос о роли закона сохранения углового импульса в статистической механике исследован в работе [27]. Показано, что закон сохранения нулевого значения углового импульса не изменяет существенно объёма гиперповерхности в большинстве случаев, когда гамильтониан частицы имеет стандартный вид: кинетическая энергия, описывающая гиперсферу в импульсном пространстве, и потенциальная энергия. Но если угловой импульс газа не равен нулю, то корреляция движения частиц, сохраняющая его значение, проявляется как коллективное взаимодействие, которое не позволяет использовать известные методы для вычисления фазового объёма.

В квантовой статистической механике роль фазового пространства играет бесконечномерное функциональное гильбертово пространство состояний, а роль инвариантного множества — конечномерное линейное многообразие, определяемое собственными значениями энергии и других интегралов движения, коммутирующих с гамильтонианом и между собой. Вместо фазового объёма инвариантного множества в квантовой статистике выступает кратность вырождения этого набора собственных значений. Собственные состояния, соответствующие этому набору собственных значений, образуют репер инвариантного множества. Вычисление размерности инвариантного множества подробно изложено в работе [28]. Оно сводится к вычислению шпура:

$$\Omega = \text{Sp} \left\{ \delta_E \left[ \hat{H}(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - E_0 \right] \delta_L \left[ \hat{L}_z(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - L_{z0} \right] \right\}. \quad (18)$$

Здесь направление углового импульса  $\mathbf{L}_0$  принято за ось  $\mathbf{Z}$ . Если функциональное пространство включает только дифференцируемые функции, удовлетворяющие нулевому граничному условию на границе области определения и нормируемые в этой области, то в качестве базиса для вычисления можно выбрать собственные функции гамильтониана  $\hat{H}$ , которые одновременно являются собственными функциями углового импульса  $\hbar\hat{L}_z$ . Собственные значения гамильтониана образуют дискретный спектр, и, выбирая единицу измерения энергии, всегда можно сделать их целочисленными. Единицей измерения углового импульса является постоянная Планка. Функция целочисленного аргумента  $\delta(k)$ , которая получается при вычислении диагонального матричного элемента операторной функции  $\delta(\hat{A} - a)$  на собственной функции оператора  $\hat{A}$ , равна единице при  $k = 0$  и равна нулю при  $k \neq 0$ . Тогда диагональные матричные элементы будут равны 1 только при  $\langle \hat{H} \rangle = E_0$  и  $\langle \hat{L}_z \rangle = L_{z0}$ , и формула (18) определяет кратность вырождения этой пары собственных значений. В классической статистической механике операторные функции заменяют соответствующими функциями числовых переменных, функции целочисленного аргумента — дельта-функциями Дирака, вычисление шпура — интегрированием по фазовому пространству. Это произведение дельта-функций соответствует микроканоническому распределению для изолированной системы, введённому в монографии [13]. Но далее в работе [13] утверждают, что заключение в «ящик» исключает сохранение углового импульса, и поэтому оно несущественно. Это неправильно. Неверно также утверждение, что логарифм функции распределения должен быть линейной функцией энергии, потому что логарифм  $\delta(k)$  не имеет смысла. В работе [28] среднее значение наблюдаемой величины, описываемой оператором  $\hat{A}$ , в изолированной системе представляется в виде  $\overline{\langle \hat{A} \rangle} = \Omega^{-1} \text{Sp} \{ \hat{A} \delta_E [\hat{H}(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - E_0] \delta_L [\hat{L}_z(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - L_0] \}$ , то есть  $\Omega^{-1} \delta_E [\hat{H}(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - E_0] \delta_L [\hat{L}_z(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) - L_0]$  — статистический оператор (см. монографию [29]).

Покажем, что в случае, когда газ заряженных частиц находится в магнитном поле, вычисление фазового объёма существенно изменяется и при учёте сохранения нулевого значения углового импульса. Для электронного газа в магнитном поле гамильтониан  $\hat{H}(\{\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v\}) = \sum_{v=1}^N \hat{H}_0(\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v) + eU_C(\{\mathbf{r}_v\})$ , где последнее слагаемое — потенциальная энергия электростатического взаимодействия всех электронов между собой и с решёткой ионов, которую мож-

но заменить однородным положительно заряженным фоном при общей нейтральности системы. Гамильтониан  $\hat{H}_0(\hat{\mathbf{p}}_v, \mathbf{r}_v)$  (см. формулу (12)) можно представить в виде  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{0\perp} + \hat{H}_{0\parallel}$ , и далее для простоты рассматривать двухмерную задачу в плоскости  $\mathbf{XY}$ , опуская значок  $\perp$ . Преобразуем  $\hat{H}_0$  к виду:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_e} \left[ \left( \hat{p}_x - \frac{eBy}{2} \right)^2 + \left( \hat{p}_y + \frac{eBx}{2} \right)^2 \right] = \hat{H}_1 + \frac{\hbar\omega}{2} \hat{l}_z, \quad (19)$$

где  $\hat{H}_1$  — гамильтониан  $2D$ -частицы в гармоническом потенциале:

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2m_e} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{e^2 B^2 (x^2 + y^2)}{8m_e}. \quad (20)$$

Подставляя эти выражения в формулу (18), получим:

$$\Omega = \text{Sp} \left\{ \delta_E \left[ \sum_{v=1}^N \hat{H}_{1,v} + \frac{\hbar\omega}{2} \sum_{v=1}^N \hat{l}_{z,v} + eU_C(\{\mathbf{r}_v\}) - E_0 \right] \delta_L \left[ \sum_{v=1}^N \hat{l}_{z,v} \right] \right\}. \quad (21)$$

Здесь отличны от нуля только те матричные элементы, для которых  $\sum_{v=1}^N l_{z,v} = L_{z0} = 0$ , и поэтому второе слагаемое гамильтониана нужно опустить. В этом и состоит влияние закона сохранения углового импульса при нулевом значении. Статистическая механика электронного газа в магнитном поле сводится к статистической механике газа взаимодействующих электронов в потенциале, который складывается из гармонического квазиэлектростатического потенциала, пропорционального квадрату магнитной индукции, и потенциала, образуемого однородным положительным фоном.

## 2.2. Полученные результаты

### 2.2.1. Неоднородность плотности электронов

Задача об электронном газе в потенциальном поле хорошо изучена. Суть её решения сводится к тому, что электронная плотность  $\rho(\mathbf{r})$  распределяется так, чтобы создаваемый ею электростатический потенциал максимально компенсировал неоднородность внешнего затравочного потенциала. Полная компенсация невозможна. Если бы она возникла, и потенциальное поле исчезло, она сразу стала бы разрушаться диффузионным током. Равновесная плотность должна быть такая, чтобы электрический и диф-

фузионный токи компенсировали один другого, то есть градиенты концентрации и суммарного электростатического потенциала с соответствующими коэффициентами были равны по модулю и противоположно направлены. На более строгом языке это формулируется как пространственная однородность электрохимического потенциала, а в квантовой физике — уровня Ферми. Для вычисления этого распределения плотности заряда электронного газа существует метод функционала плотности (см. монографию [30]). В этом методе записывают энергию основного состояния в виде функционала от плотности заряда. В функционале учитывают кинетическую энергию, потенциальную энергию плотности заряда во внешнем затравочном поле и поле однородного положительно заряженного фона и энергию самодействия электронной плотности. Это означает, что избыточный заряд в соответствии с уравнением Пуассона создаёт электростатический потенциал, и в функционал энергии включается энергия плотности заряда электронов в этом потенциале. Искомое распределение плотности доставляет минимум этого функционала. Естественно, что избыточный заряд при этом распределении плотности создаёт электростатический потенциал, который уменьшает затравочный квазиэлектростатический гармонический потенциал. В результате инвариантное множество определяется эффективным гамильтонианом, который описывает газ невзаимодействующих квазичастиц в потенциальном поле, образованном суммой гармонического квазиэлектростатического потенциала и электростатического потенциала неоднородного избыточного заряда. Очевидно, что для экранировки плотность газа должна убывать от центра к границе, то есть сохранение нулевого значения углового импульса газа приводит к эффекту удержания. Распределение плотности для двухмерного электронного газа в однородном магнитном поле рассмотрено в работе [28], но недостаточно точно. Можно показать, что потенциал избыточного заряда выражается в виде разложения по чётным степеням  $r/R$ , где  $R$  — радиус рассматриваемой области. Разность квазиэлектростатического потенциала и гармонического члена разложения очень мала, порядка отношения Боровского радиуса к  $R$ . При этом необходимо учитывать более высокие степени разложения потенциала, создаваемого избыточным зарядом. Это изменит приведённые ниже результаты, которые нужно рассматривать как качественные.

### 2.2.2. Одночастичная задача

Корреляция электронов газа при сохранении нулевого значения полного углового импульса приводит к тому, что гамильтониан элементарного возбуждения становится гамильтонианом частицы

в потенциальном поле. Поле, которое получается в результате экранировки внешних полей, действует одинаково на каждую частицу, а частицы нужно рассматривать как невзаимодействующие. Если ограничиться гармоническим приближением, то это поле будет пропорционально квадрату магнитной индукции. Тогда гамильтониан элементарного возбуждения двухмерного электронного газа в магнитном поле можно представить в виде:

$$\hat{H}_{\text{el.ex}} = \hat{H}'_1 = \frac{(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)}{2m_e} + \frac{e_r^2 B^2 (x^2 + y^2)}{8m_e} = \frac{(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)}{2m_e} + \frac{m_e \omega_r^2 (x^2 + y^2)}{8}. \quad (22)$$

где  $\omega_r = e_r B / m_e$ , а  $(-e_r)$  — перенормированный заряд электрона. Чтобы найти энергетический спектр элементарных возбуждений нужно решить задачу на собственные значения для гамильтониана  $\hat{H}_{\text{el.ex}}$  при граничном условии обращения волновой функции в нуль на окружности радиуса  $R$ . Это было сделано в работах [18, 28], а плотность соответствующих состояний описана в работе [21]. Чтобы пояснить, почему такая последовательно поставленная задача не была рассмотрена для гамильтониана  $\hat{H}_0$  в общепринятой теории, нужно исследовать решения этих задач до наложения граничных условий. Переменные разделяются, и решения имеют одинаковый вид (см. формулу (8)). Множитель, зависящий от  $r$ , также имеет одинаковый вид:

$$\psi(\alpha, l; r) = \frac{A}{\lambda_r} \left( \frac{r}{\lambda_r \sqrt{2}} \right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda_r^2}\right) \Phi\left(\alpha, |l| + 1; \frac{r^2}{2\lambda_r^2}\right). \quad (23)$$

Здесь  $A$  — нормировочный множитель,  $\lambda_r$  — перенормированная магнитная длина,  $l$  — квантовое число углового импульса,  $\Phi(\alpha, |l| + 1; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция (ВГФ). Зависимость энергии поперечного движения  $E_{\perp}$  от параметров  $\alpha$  и  $l$  разная: для  $\hat{H}_0$  это  $E_{\perp} = \hbar\omega[-\alpha + (l + |l| + 1)/2]$ , а для элементарного возбуждения —  $E_{\perp} = \hbar\omega_r[-\alpha + (|l| + 1)/2]$ . Из формулы (23) следует, что удовлетворить граничному условию собственная функция может только, если  $R^2/2\lambda_r^2$  будет нулём ВГФ  $\Phi(\alpha, |l| + 1; z)$ . Свойства этой функции хорошо известны (см. монографию [31]), но в описании её нулей допущена ошибка. При  $\alpha = -j$  ВГФ — полином Лагерра  $L_j^{(|l|)}(z)$  степени  $j$ . Полином  $L_j^{(|l|)}(z)$  имеет  $j$  простых действительных положительных нулей. Наибольший нуль при больших значениях  $j$  приблизительно равен  $\pi^2(2j + |l|)/8$ . Нули ВГФ являются непрерывными убывающими функциями параметра  $|\alpha|$ , при  $\alpha = -j - \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$   $j$  нулей, расположенных в порядке возрастания, будут меньше соответствующих нулей полинома  $L_j^{(|l|)}(z)$ , будут убывать с ростом  $\gamma$  и при  $\gamma = 1$  станут нулями полинома  $L_{j+1}^{(|l|)}(z)$ . В монографии [31] и других ма-

тематических руководства ограничивались описанием только этих нулей. Но при  $\alpha < 0$  и  $\alpha = -j - \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$  ВГФ при  $z \rightarrow \infty$  пропорциональна  $z^{-(l+1+\alpha)} \exp(z)$ , и тогда  $\psi(\alpha, l; r)$  стремится к бесконечности. Если  $\alpha = -j$ , то при  $z \rightarrow \infty$  полином Лагерра растёт не быстрее, чем  $z^j$ . При этом функция  $\psi(\alpha, l; r)$  убывает и является нормируемой. Для того чтобы граничное условие удовлетворялось хотя бы наибольшим нулём полинома Лагерра, необходимо  $\pi^2(2j+|l|)/8 = R^2/2\lambda_r^2$ . При большом радиусе круга это требует больших значений квантовых чисел  $j$  и  $|l|$ . Количество значений энергии, при которых функция  $\psi(-j, l; r)$  удовлетворяет нулевому граничному условию, равно  $j$ , и они не могут образовывать спектр, соответствующий общим теоремам о спектре подобных уравнений (см. монографию [23]). Поэтому и вынуждены были при решении этой задачи на собственные значения применять граничное условие убывания функции на бесконечности, а не обращения в нуль на границе. На самом деле полином  $L_{j+1}^{|l|}(z)$  имеет  $j+1$  нуль. Его наибольший нуль не может быть получен уменьшением какого-либо нуля полинома  $L_j^{|l|}(z)$ , он может только «прийти из бесконечности». В работе [18] (см. также [21, 28]) выведена формула для  $\gamma(j, |l|; R) < 1$ , которая позволяет удовлетворить нулевому граничному условию для всех значений  $j$  при значениях  $|l|$ , ограниченных величиной  $|l_m| \gg j$ ,  $|l_m| \approx (R^2/2\lambda_r^2) - (j+1)(R/\lambda_r\sqrt{2})$ . При этом  $\gamma(j, |l|; R)$  остаётся очень малой величиной, то есть вырождение снимается, но уширение пика очень малое. При  $|l_m| < l < |l_m| + j$  и  $l < 0$  граничные условия удовлетворяют  $j$  нулей меньших, чем нули полинома  $L_j^{|l_m|}(z)$ , но больших, чем нули полинома  $L_{j+1}^{|l_m|}(z)$ , а  $\gamma < 1$ , но не мало. Это соответствует приграничным состояниям.

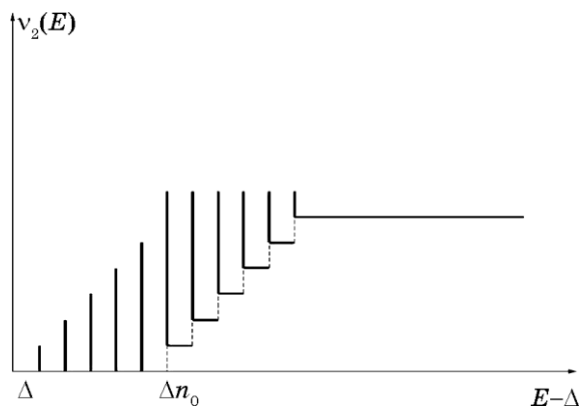
### 2.2.3. Плотность состояний элементарных возбуждений

Исправление этой математической ошибки позволило определить плотность состояний элементарных возбуждений, удовлетворяющую общим теоремам об этой функции (см. работу [21]). В уравнении задачи на собственные значения для гамильтониана  $H_{\text{elx}}$  (формула (22)) переменные разделяются не только в цилиндрических, но и в декартовых прямоугольных координатах. Это позволило в работе [21] рассматривать плотность состояний в поперечной плоскости при нулевом условии на границе квадрата.

В декартовых координатах уравнение в плоскости XY разделяется на два одинаковых уравнения линейного осциллятора с частотой  $\omega_0 = \omega_r/2$  и ограничивающими стенками, координаты которых  $\pm s$ . Решение этой задачи приведено в приложении к работе [21]. Если энергия классического осциллятора такова, что его амплитуда меньше  $s$ , то он не достигает стенок, а если его энер-

гия больше чем  $m\omega_0^2 s^2/2$ , то он колеблется, отражаясь от стенок при положительной кинетической энергии. Тогда из квазиклассических соображений следует, что при условии  $\varepsilon < m\omega_0^2 s^2/2$  собственные значения энергии квантового осциллятора квантуются:  $\varepsilon = \hbar\omega(n + 1/2)$ . При больших энергиях спектр становится квазидискретным (непрерывным), то есть промежуток между собственными значениями обратно пропорционален размеру области, в которой определяется собственная функция. Последовательное квантово-механическое рассмотрение с учётом свойств нулей ВГФ приводит к тому, что в формуле энергии перехода от квантованного спектра к непрерывному коэффициент  $1/2$  заменяется на  $8/\pi^2 \approx 0,8$ . Собственные функции оператора  $\hat{H}_{\text{el.ex}}$  (22) в квадратной области плоскости перпендикулярной полю являются произведениями двух собственных функций одного измерения, а соответствующие собственные значения равны сумме их собственных значений. Плотность состояний  $2D$ -элементарного возбуждения схематически представлена на рис. 3.

По характеру плотности состояний спектр разбивается на три зоны. Вначале значения энергии описываются формулой  $E_{\perp n} = (\hbar\omega_r/2)(n_x + n_y + 1) = \Delta(n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Спектр дискретный, начинается со значения  $\hbar\omega_r/2 = \Delta$ , все промежутки также равны  $\Delta$ , каждое значение вырождено с кратностью  $n + 1$ . Назовём эту зону «магнитной». Её граница  $E_m = \Delta(n_0 + 1)$ ,  $n_0 = [m_e\omega_r S/\pi^2\hbar]$ . Здесь  $S = (2s)^2$  — площадь ограниченной области — квадрата. Граничное значение  $n_0$  при замене  $\omega_r \rightarrow \omega$  с точностью до коэффициента совпадает с кратностью вырождения уровней Ландау (см. формулу (11)). Далее в интервале значений энергии  $E_m < E < \Delta(2n_0 + 1)$  («промежуточная зона») плотность состояний является суммой кусочно-непрерывной функции, которая на рис.



**Рис. 3.** Плотность состояний элементарных возбуждений  $2D$ -электронного газа в магнитном поле в новой теории (схематически).<sup>3</sup>

3 изображена ступенчатой функцией с горизонтальными ступенями, и дискретного спектра. Пики дискретного спектра находятся в точках разрыва кусочно-непрерывной функции. Их высота, то есть кратность вырождения, уменьшается согласно формуле  $2n_0 - n + 1$ . При  $E > \Delta(2n_0 + 1)$  плотность состояний асимптотически стремится к постоянному значению  $mS/2\pi\hbar^2$ . Эта область на рис. 3 изображена горизонтальной линией. При учёте спинового вырождения плотность состояний удваивается. Подобное описание плотности состояний в круге получено и в работе [28], но в этом случае не удалось описать тонкую структуру промежуточной зоны. Выражения для плотности состояний в работах [21, 28] получены при стандартном наложении граничных условий и соответствуют всем общим свойствам этой функции, доказанным математически (см. монографию [22]).

В работе [21] показано, что выявленная тонкая структура спектра приводит к тому, что энергия Ферми и энергия основного состояния  $2D$ -газа в слабых полях, когда энергия Ферми больше верхней границы промежуточной зоны, осциллируют при изменении магнитного поля. Спектр определяется двумя параметрами, зависящими от магнитного поля по-разному. Расстояние между дискретными уровнями  $\Delta = \hbar e_r B / 2m$  — непрерывная функция, которая может принимать любые значения. Производная  $\partial E_F / \partial \Delta > 0$ . Граничное значение  $n_0 = [e_r B S / \pi^2 \hbar]$ , определяющее границы между зонами, может принимать только целочисленные значения. При увеличении  $n_0$  на единицу энергия Ферми скачком уменьшается. Аналогичные изменения происходят и с энергией основного состояния. Эти колебания могут быть причиной магнитных осцилляций. Как указано выше (см. 1.2.3), плотность состояний в трёх измерениях — свёртка  $2D$ - и  $1D$ -плотностей. Поэтому сглаженные колебания должны присутствовать и в плотности  $\nu_3(E)$ .

Количество состояний в магнитной зоне с учётом спинового вырождения:  $N_{mb}(B) = n_0^2 + n_0$ . Суммарная энергия элементарных возбуждений, заполняющих магнитную зону,  $E_{mb} = \hbar\omega_r \sum_{n=0}^{n_0} (n+1)n$ . Если количество электронов  $N$  в рассматриваемом  $2D$ -газе находится в промежутке  $n_{0N}^2 - n_{0N} < N \leq n_{0N}^2 + n_{0N}$ , то энергия Ферми равна  $\hbar\omega_r n_{0N} / 2$ . При этом все заполненные состояния элементарных возбуждений находятся в магнитной зоне. Последний уровень  $n_{0N}$  может быть не полон. Индукция магнитного поля, при которой достигается такое состояние  $B_N \approx \pi^2 \hbar \sqrt{N} / e_r S$ . В сильном поле, когда  $B > B_N$ , энергия Ферми остаётся закреплённой на уровне с номером  $n_{0N}$ , хотя он уже не является граничным. В сильном поле и энергия



Ферми, и полная энергия газа пропорциональны индукции магнитного поля. При этом магнитный момент  $2D$ -электронного газа не изменяется при изменении магнитного поля (см. работу [28]).

Итак, коллективные взаимодействия — сохранение нулевого значения суммарного углового импульса и дальнедействующее электростатическое взаимодействие — приводят к тому, что усреднение нужно производить с плотностью распределения для идеального газа элементарных возбуждений. Это общая идея физики конденсированных сред.

#### 2.2.4. Плотность диамагнитного тока, намагниченность и магнитный момент

В уравнении Шрёдингера для гамильтониана, в котором опущено слагаемое, описывающее энергию углового импульса в магнитном поле, все коэффициенты вещественны. Поэтому и собственные функции могут быть выбраны вещественными, то есть фаза волновой функции газа в выражении для плотности тока тождественно равна нулю. Квантово-механическое среднее поля плотности тока имеет вид:

$$\mathbf{j} = -|\psi|^2 \frac{e_r^2 B r}{2m_e} \mathbf{i}_\varphi, \quad |\psi|^2 = \rho(r). \quad (24)$$

Этот ток создаёт неоднородную намагниченность. Поле намагниченности аксиально симметрично. Интеграл от намагниченности — магнитный момент электронного газа в магнитном поле:

$$\mathbf{M}_z(r) = -\frac{e_r^2 B}{2m_e} \int_r^R \rho(s) s ds, \quad \langle \bar{M} \rangle = -\frac{\pi e_r^2 B}{m_e} \int_0^R r dr \int_r^R \rho(s) s ds. \quad (25)$$

Эти формулы одинаковы для газа классических или квантовых частиц. Разница только в выражении для плотности газа, которая в обоих случаях убывает от центра к краям.

#### 2.3. Задачи теории и эксперимента

В новой теории нет тех противоречий общепринятой теории, о которых говорилось выше. Магнитный момент электронного газа в магнитном поле не нуль, а отрицательная величина, пропорциональная количеству электронов. Механический угловой импульс электронного газа остаётся равным нулю. Плотность электронного газа и намагниченность неоднородны. Это не квантовые эффекты, учёт квантовых поправок может привести только к ос-

цилляциям в зависимости величины намагниченности от магнитного поля. Но формулы, описывающие эти эффекты, справедливы только качественно, так как выведены только для  $2D$ -газа и в грубом приближении. Для сопоставления с экспериментальными результатами необходимо более строго подойти к выбору пробной функции для нахождения минимума функционала плотности, а также учесть энергию свободного движения вдоль направления магнитного поля. Необходимо также рассмотреть спиновый парамагнетизм и роль спин-орбитальной связи. В общепринятой теории спиновый парамагнитный момент пропорционален спиновому угловому импульсу газа, который, следовательно, не равен нулю. Далее необходимо развить новую теорию для сложного закона дисперсии электронов проводимости в реальных металлах. С новой точки зрения нужно рассмотреть магнитные осцилляции в металлах, различные кинетические и резонансные явления, интерпретировать известные экспериментальные результаты.

Необходимо также поставить ряд экспериментов, проверяющих новую теорию. Нужно измерять полный магнитный момент образца и его зависимость от магнитной индукции, а также от размеров и формы. Очевидно, что магнитный момент диска перпендикулярного полю будет отличаться от момента тонкого цилиндра того же объёма, расположенного вдоль поля, и удельной восприимчивости не существует.

Другой эффект, также легко объяснимый в новой теории, был замечен В. К. Сульженко (частное сообщение). Металлический диск, подвешенный между полюсами магнита, устанавливался не перпендикулярно полю, как должно было бы быть при однородной намагниченности, а под некоторым углом. С точки зрения новой теории это понятно. Для простоты заменим диск проволочным кольцом. Когда его плоскость перпендикулярна полю, в нём должен протекать бездиссипативный диамагнитный ток. Такое положение неустойчиво: при малом отклонении плоскости кольца от перпендикулярности полю, составляющая поля, параллельная плоскости кольца, создаёт силу Лоренца, увеличивающую отклонение. Когда ток создаётся внешним источником, эта сила приводит к повороту кольца на угол  $\pi$ , и магнитный момент кольца становится параллельным полю. Но в случае диамагнитного тока, он исчезает, когда кольцо поворачивается на  $\pi/2$ . Возможно, что детальное теоретическое и экспериментальное изучение этого эффекта позволит получать ценную информацию об электронном строении металлов.

Неоднородная плотность заряда электронного газа создаёт электрическое поле, которое не генерирует электрический ток в самом электронном газе, но может создавать ток заряженных примесей и вакансий в решётке, влиять на их диффузию. Оно

также деформирует кристаллическую решётку, создаёт напряжения. Эти эффекты также необходимо исследовать. Возможно, что они позволят разработать технологии обработки материалов магнитным полем.

В заключение призываю коллег (теоретиков и экспериментаторов) работать над решением этих задач.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bohr, *Nature (London)*, **88**: 200 (1911).
2. J. H. van Leeuwen, *J. de Phys.*, **2**: 361 (1921).
3. Л. Д. Ландау, *Zs. Phys.*, **64**: 629 (1930).
4. W. J. de Haas and P. M. van Alphen, *Proc. Netherlands Roy. Acad. Sci.*, **33**: 680 (1930); *ibid.*, **33**: 1106 (1930); *ibid.*, **35**: 454 (1932).
5. D. Shoenberg, *Proc. Roy. Soc. A*, **170**: 341 (1939).
6. Б. И. Веркин, Б. Г. Лазарев, Н. С. Руденко, *ЖЭТФ*, **20**: 995 (1950).
7. D. Shoenberg, *Magnetic Oscillations in Metals* (Cambridge: Cambridge University Press: 1984).
8. R. Peierls, *Zs. Phys.*, **80**: 763 (1933); *idem.*, *Zs. Phys.*, **81**: 186 (1933).
9. L. Onsager, *Phil. Mag.*, **43**: 1006 (1952).
10. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов* (Москва: Наука: 1971).
11. J. H. van Vleck, *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities* (Oxford: Oxford University Press: 1965).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика* (Москва: ГИЗ физ.-мат. литературы: 1963).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика* (Москва: Наука: 1976).
14. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов* (Москва: Наука: 1987).
15. Р. Пайерлс, *Квантовая теория твёрдых тел* (Москва: ИЛ: 1956).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля* (Москва: ГИЗ физ.-мат. литературы: 1960).
17. M. H. Johnson and V. A. Lippmann, *Phys. Rev.*, **76**: 828 (1949).
18. I. M. Dubrovskii, *Cond. Matt. Phys.*, **9**: 645 (2006).
19. И. М. Дубровский, *Теория электронных явлений в деформированных кристаллах* (Киев: РИО ИМФ: 1999).
20. А. И. Гутников, Э. П. Фельдман, *ЖЭТФ*, **63**: 1054 (1972).
21. I. M. Dubrovskiy, *Cond. Matt. Phys.*, **16**: 1 (2013).
22. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. 1* (New York: Interscience: 1953).
23. I. Dubrovskiy, *J. Phys. Sci. Appl.*, **4**: 328 (2014).
24. *Таблицы физических величин* (Ред. И. К. Кикоин) (Москва: Атомиздат: 1976).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 7. Электродинамика сплошных сред* (Москва: ГИТТЛ: 1957).
26. А. Я. Хинчин, *Математические принципы статистической механики* (Москва-Ленинград: ГИТТЛ: 1943).
27. I. M. Dubrovskii, *Cond. Matt. Phys.*, **11**: 585 (2008).

28. I. Dubrovskii, *Thermodynamics–Interaction Studies—Solids, Liquids and Gases* (Ed. Juan Carlos Moreno-Pirajan), Ch. 17: 445–468 (ISBN: 978-953-307-563-1; InTech: 2011); <http://dx.doi.org/10.5772/19645>.
29. Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика* (Москва: Наука: 1971).
30. *Theory of the Inhomogeneous Electron Gas* (Eds. S. Lundqvist and N. H. March) (New York–London: Plenum Press: 1983).
31. A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions, Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman. Vol. 1* (New York–Toronto–London: McGraw-Hill Book Company INC: 1953).

## REFERENCES

1. N. Bohr, *Nature (London)*, **88**: 200 (1911).
2. J. H. van Leeuwen, *J. de Phys.*, **2**: 361 (1921).
3. L. D. Landau, *Zs. Phys.*, **64**: 629 (1930).
4. W. J. de Haas and P. M. van Alphen, *Proc. Netherlands Roy. Acad. Sci.*, **33**: 680 (1930); *ibid.*, **33**: 1106 (1930); *ibid.*, **35**: 454 (1932).
5. D. Shoenberg, *Proc. Roy. Soc. A*, **170**: 341 (1939).
6. B. I. Verkin, B. G. Lazarev, and N. S. Rudenko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **20**: 995 (1950) (in Russian).
7. D. Shoenberg, *Magnetic Oscillations in Metals* (Cambridge: Cambridge University Press: 1984).
8. R. Peierls, *Zs. Phys.*, **80**: 763 (1933); *idem.*, *Zs. Phys.*, **81**: 186 (1933).
9. L. Onsager, *Phil. Mag.*, **43**: 1006 (1952).
10. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel', and M. I. Kaganov, *Elektronnaya Teoriya Metallov* [Electronic Theory of Metals] (Moscow: Nauka: 1971) (in Russian).
11. J. H. van Vleck, *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities* (Oxford: Oxford University Press: 1965).
12. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoreticheskaya Fizika. Vol. 3. Kvantovaya Mekhanika* [Theoretical Physics. Vol. 3. Quantum Mechanics] (Moscow: GIZ Fiz.-Mat. Literaturny: 1963) (in Russian).
13. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoreticheskaya Fizika. Vol. 5. Statisticheskaya Fizika* [Theoretical Physics. Vol. 5. Statistical Physics] (Moscow: Nauka: 1976) (in Russian).
14. A. A. Abrikosov, *Osnovy Teorii Metallov* [Fundamentals of the Theory of Metals] (Moscow: Nauka: 1987) (in Russian).
15. R. Peierls, *Kvantovaya Teoriya Tverdykh Tel* [Quantum Theory of Solids] (Moscow: IL: 1956) (Russian translation).
16. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoreticheskaya Fizika. Vol. 2. Teoriya Polya* [Theoretical Physics. Vol. 2. Field Theory] (Moscow: GIZ Fiz.-Mat. Literaturny: 1960) (in Russian).
17. M. H. Johnson and B. A. Lippmann, *Phys. Rev.*, **76**: 828 (1949).
18. I. M. Dubrovskii, *Cond. Matt. Phys.*, **9**: 645 (2006).
19. I. M. Dubrovskii, *Teoriya Elektronnykh Yavleniy v Deformirovannykh Kristallakh* [Theory of Electronic Phenomena in Strained Crystals] (Kiev: RIO IMF: 1999) (in Russian).
20. A. I. Gutnikov and E. P. Feldman, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **63**: 1054 (1972) (in

- Russian).
21. I. M. Dubrovskiy, *Cond. Matt. Phys.*, **16**: 1 (2013).
  22. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. 1* (New York: Interscience: 1953).
  23. I. Dubrovskiy, *J. Phys. Sci. Appl.*, **4**: 328 (2014).
  24. *Tablitsy Fizicheskikh Velichin* [Tables of Physical Quantities] (Ed. I. K. Kikoin) (Moscow: Atomizdat: 1976) (in Russian).
  25. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoreticheskaya Fizika. Vol. 7. Elektrodinamika Sploshnykh Sred* [Theoretical Physics. Vol. 7. Electrodynamics of Continuous Media] (Moscow: GITTL: 1957) (in Russian).
  26. A. Ya. Khinchin, *Matematicheskie Printsipy Statisticheskoy Mekhaniki* [Mathematical Principles of Statistical Mechanics] (Moscow–Leningrad: GITTL: 1943) (in Russian).
  27. I. M. Dubrovskii, *Cond. Matt. Phys.*, **11**: 585 (2008).
  28. I. Dubrovskiy, *Thermodynamics–Interaction Studies—Solids, Liquids and Gases* (Ed. Juan Carlos Moreno-Pirajan), Ch. 17: 445–468 (ISBN: 978-953-307-563-1: InTech: 2011); <http://dx.doi.org/10.5772/19645>.
  29. D. N. Zubarev, *Neravnovesnaya Statisticheskaya Termodinamika* [Nonequilibrium Statistical Thermodynamics] (Moscow: Nauka: 1971) (in Russian).
  30. *Theory of the Inhomogeneous Electron Gas* (Eds. S. Lundqvist and N. H. March) (New York–London: Plenum Press: 1983).
  31. A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions, Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman. Vol. 1* (New York–Toronto–London: McGraw-Hill Book Company INC: 1953).

---

<sup>\*</sup>*G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics, N.A.S. of Ukraine,  
36, Acad. Vernadsky Blvd.,  
UA-03680 Kyiv-142, Ukraine*

<sup>1</sup> Fig. 1. ‘Explanation’ of the paradox of the Bohr–van Leeuwen theorem.

<sup>2</sup> Fig. 2. Density of states for 2D-electron gas in a magnetic field—Landau levels.

<sup>3</sup> Fig. 3. Density of states for elementary excitations of the 2D-electron gas in a magnetic field within the new theory (schematically).