http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.06.020
УДК 517.983

Ю. С. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
E-mail: yustlin@gmail.com

Про еквівалентність збурень оператора диференціювання функціями від оператора Помм'є

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

У просторах функцій, аналітичних у довільних зіркових відносно початку координат областях комплексної площини, досліджені умови еквівалентності двох операторів, які є збуреннями оператора диференціювання функціями від оператора Помм'є. Описано комутанти таких операторів, а також встановлено їхню гіперциклічність та хаотичність.

Ключові слова: Оператор Помм'є, еквівалентні оператори, гіперциклічний оператор, хаотичний оператор.

У класичній праці Ж. Дельсарта, Ж.-Л. Ліонса [1] доведено еквівалентність у просторі цілих функцій довільних двох диференціальних операторів одного і того ж порядку з одиничними старшими коефіцієнтами. Цей результат узагальнювався в різних напрямках. Аналогічне твердження в [2, 3] доведене різними методами для операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях, а в [4, 5] — для диференціальних операторів скінченного порядку відносно узагальненого диференціювання. В роботах [6, 8] досліджувалися умови еквівалентності різних збурень степенів диференціальних операторів у просторах функцій, які аналітичні в кругових областях. Для розв'язання цих задач були розроблені різні методи, але всі вони використовували специфіку простору аналітичних функцій у кругових областях, а саме можливість зображення функцій з відповідного простору у вигляді сум степеневих рядів. Значно менше вивчені умови еквівалентності диференціальних операторів у просторах функцій, які аналітичні в довільних областях. В роботах [9, 10] досліджені умови еквівалентності узагальненого оператора Данкла, який є збуренням оператора диференціювання певним різницевим оператором, до оператора диференціювання в просторі функцій, аналітичних в областях. У даній роботі ці результати узагальнюються на деякий ширший клас операторів.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. Через $\mathcal{H}'(G)$ позначатимемо спряжений простір до $\mathcal{H}(G)$. Вивчимо в просторі $\mathcal{H}(G)$ умови еквівалентності двох операторів виду

$$(Af)(z) = f'(z) + \underset{\zeta}{L}\left[\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right], \tag{1}$$

© Ю. С. Лінчук, 2016

де $L \in \mathcal{H}'(G)$. Зазначимо, що у випадку $0 \in G$ формулою $(\Delta f)(z) = (f(z)-f(0))/z$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$ визначається оператор Помм'є Δ, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$. В [11] показано, що загальний вигляд лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні з оператором Δ, дається формулою

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z-\zeta}\right], \tag{2}$$

в якій L пробігає множину $\mathcal{H}'(G)$. Для довільного функціонала $L \in \mathcal{H}'(G)$ виконується рівність $\underset{\zeta}{L}\left[\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right] = ((\Delta T)f)(z)$, де T визначається формулою (2). Оператор (2) є певною функцією від оператора Помм'є Δ [12]. Тому оператор виду (1) є збуренням диференціального оператора деякою функцією від оператора Помм'є.

Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини, а $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність однозв'язних областей, кожна з яких обмежена замкненою спрямною жордановою кривою, яка апроксимує зсередини область G, тобто $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$, $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Нагадаємо, що простір $\mathcal{H}(\complement G)$ складається з функцій, які є аналітичними на множині $\complement G$. Функція $l(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G)$ тоді і тільки тоді, коли існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що функція $l(\lambda)$ є аналітичною на множині $\mathbb{C} \setminus \overline{G_n}$ і $l(\infty) = 0$. У [13] показано, що між функціоналами $L \in \mathcal{H}'(G)$ і функціями $l(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G)$ існує взаємно однозначна відповідність, яка встановлюється формулою $l(\lambda) = L[1/(\lambda - z)]$. При цьому функція $l(\lambda)$ називається характеристичною для функціонала L. Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини, а $l(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G)$, причому $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda l(\lambda) = 0$. Тоді існує єдина функція $l_1(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G)$, для якої виконується рівність $l_1'(\lambda) = l(\lambda)$ в $\complement G$.*

З використанням леми 1 встановлено, що в просторі $\mathcal{H}(G)$ довільний оператор виду (1) є еквівалентним до оператора B, який діє за правилом $(Bf)(z) = f'(z) + a(\Delta f)(z)$, де $a = L(1)$. Через $l(\lambda)$ позначимо характеристичну функцію функціонала L. Тоді, застосовуючи лему 1 до функції $l_2(\lambda) = l(\lambda) - a/\lambda$, одержимо, що існує функція $l_3(\lambda)$ з простору $\mathcal{H}(\complement G)$, для якої в $\complement G$ виконується рівність $l_3'(\lambda) = l_2(\lambda)$. Покладемо $m(\lambda) = e^{l_3(\lambda)}/\lambda$. Оскільки $l_3(\lambda) \in \mathcal{H}(\complement G)$, то існує функціонал $M \in \mathcal{H}'(G)$, для якого $m(\lambda)$ є характеристичною функцією. Тоді оператор T, який діє за правилом

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{M}\left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z-\zeta}\right],$$

є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, оскільки функція $m(\lambda) \neq 0$ в $\complement G$. Ізоморфізм T є оператором перетворення оператора A у B, тобто виконується рівність $TA = BT$. Отже, є правильним твердження.

Теорема 1. *Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини, яка містить початок координат і функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$. Тоді оператор A, який визначається формулою (1), еквівалентний у просторі $\mathcal{H}(G)$ оператору B, який діє за правилом $(Bf)(z) = f'(z) + a(\Delta f)(z)$, де $a = L(1)$.*

Для комплексного числа z і цілого невід'ємного n через $(z)_n$ позначимо символ Похгамера, тобто $(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1)$ при $n \geqslant 1$, $(z)_0 = 1$.

Лема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $a \in \mathbb{C}$. Для того щоб оператор B, який діє за правилом $(Bf)(z) = f'(z) + a(\Delta f)(z)$, був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ оператору диференціювання d/dz необхідно і достатньо, щоб $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$.*

Необхідність умови леми 2 випливає з того, що розмірності ядер еквівалентних операторів однакові. Для доведення достатності використовується діагональний оператор P_{a+1}, який на степенях z діє за правилом $P_{a+1}(z^n) = ((a+1)_n/n!)z^n$, $n = 0, 1, \ldots$. При виконанні умов леми 2 оператор P_{a+1} продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$ [9]. Залишається скористатися рівністю $P_{a+1}B = \dfrac{d}{dz}P_{a+1}$.

З леми 2 та транзитивності відношення еквівалентності операторів одержуємо, що є правильними такі твердження.

Наслідок 1. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = d/dz + a_j\Delta$, де $a_j \in \mathbb{C}$, причому $a_j \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. Тоді оператори B_1 та B_2 є еквівалентними в просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Наслідок 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = d/dz + a_j\Delta$, де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, причому $a_1 \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, а $a_2 = -m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді оператори B_1 та B_2 не є еквівалентними в просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Лема 3. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = d/dz + a_j\Delta$, де $a_j \in \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, 2$, причому $a_1 \neq a_2$. Тоді оператори B_1 та B_2 не є еквівалентними в просторі $\mathcal{H}(G)$.*

З теореми 1 та лем 2, 3 випливає основний результат цієї роботи.

Теорема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і функціонали $L_j \in \mathcal{H}'(G)$, $j = 1, 2$. Для того щоб оператор $(A_1 f)(z) = f'(z) + \underset{\zeta}{L_1}[(f(z) - f(\zeta))/(z - \zeta)]$ був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ оператору $(A_2 f)(z) = f'(z) + \underset{\zeta}{L_2}[(f(z) - f(\zeta))/(z - \zeta)]$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з таких умов:*

1° $L_1(1) = L_2(1)$;

2° $L_1(1), L_2(1) \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Наслідок 3. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$. Для того щоб оператор A, який визначається формулою (1), був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ оператору диференціювання d/dz необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $L(1) \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$.*

Застосуємо одержані результати до опису комутанта оператора (1).

Теорема 3. *Нехай G — довільна обмежена та зіркова відносно початку координат область комплексної площини, функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$ і виконується умова $L(1) \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був переставним з оператором A, який визначається формулою (1), необхідно і достатньо, щоб він зображався формулою*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n, \tag{3}$$

де $c(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ — ціла функція з класу $[1, 0]$.

Наведемо деякі означення і поняття теорії динамічних систем [14]. Нехай T — деякий оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Функція $f \in \mathcal{H}(G)$ називається гіперциклічним елементом оператора T, якщо система функцій $(T^n f)_{n=0}^{\infty}$ є щільною в просторі $\mathcal{H}(G)$. Оператор T називається гіперциклічним, якщо він має гіперциклічний елемент. Функція $f \in \mathcal{H}(G)$ називається періодичним елементом оператора T, якщо для деякого натурального n виконується рівність $T^n f = f$. Оператор T називається хаотичним, якщо він має щільну в $\mathcal{H}(G)$ множину періодичних елементів.

Теорема 4. *Нехай G — довільна обмежена та зіркова відносно початку координат область комплексної площини, функціонал $L \in \mathcal{H}'(G)$ і виконується умова $L(1) \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Якщо $c(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ — ціла функція з класу $[1,0]$, яка відмінна від сталої, то оператор T, який зображається формулою (3), є гіперциклічним і хаотичним у просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Цитована література

1. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. Math. Helv. – 1957. – **32**, No 2. – P. 113–128.
2. *Фаге М. К.* Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної. – Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту, 1959. – 174 с.
3. *Фишман К. М.* К вопросу об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических функций в круге // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 5. – С. 143–147.
4. *Фишман К. М.* Об эквивалентности некоторых линейных операторов в аналитическом пространстве // Матем. сб. – 1965. – **68**, № 1. – С. 63–74.
5. *Tkachenko V. A.* Transformation operator in spaces of entire functions // Sib. Math. J. – 1979. – **20**, No 1. – P. 109–118.
6. *Кушнирчук И. Ф., Нагнибида Н. И., Фишман К. М.* Эквивалентность дифференциальных операторов с регулярной особой точкой // Функц. анализ и его приложения. – 1974. – **8**, № 2. – С. 83–84.
7. *Salem N. B., Kallel S.* Analytic mean-periodic functions associated with the Dunkl operator in a disk // Complex Variables, Theory and Application. – 2005. – **50**, Iss. 3. – P. 195–210.
8. *Maldonado M., Prada J., Senosiain M. J.* On Differential Operators on Sequence Spaces // J. Nonlinear Math. Phys. – 2008. – **15**, No 3. – P. 345–352.
9. *Лінчук Ю. С.* Узагальнений оператор Данкла–Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 7–17.
10. *Лінчук Ю. С.* Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування // Доп. НАН України. – 2014. – № 3. – С. 25–28.
11. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Матем. заметки. – 1988. – **44**, № 6. – С. 794–802.
12. *Лінчук Н. Є., Лінчук С. С.* Деякі операторні рівняння, що містять функції від оператора Помм'є // Укр. матем. вісник. – 2008. – **5**, № 2. – С. 193–202.
13. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math. – 1953. – **191**. – P. 30–49.
14. *Grosse-Erdmann K. G.* Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1999. – **36**, No 3. – P. 345–381.

References

1. *Delsartes J., Lions J. L.* Comment. Math. Helv., 1957, **32**, No 2: 113–128.
2. *Fage M. K.* Operator-analytical functions of one independent variable, Lviv: Lviv State University Publ., 1959 (in Ukrainian).
3. *Fishman K. M.* Uspehi mat. nauk, 1964, **19**, No 5: 143–147 (in Russian).
4. *Fishman K. M.* Mat. Sb., 1965, **68**, No 1: 63–74 (in Russian).
5. *Tkachenko V. A.* Sib. Math. J., 1979, **20**, No 1: 109–118.
6. *Kushnirchuk I. F., Nagnibida N. I., Fishman K. M.* Funktsional. Anal. i Prilozheniya, 1974, **8**, No 2: 83–84 (in Russian).

7. *Salem N. B., Kallel S.* Complex Variables, Theory and Application, 2005, **50**, No 3: 195–210.
8. *Maldonado M., Prada J., Senosiain M. J.* J. Nonlinear Math. Phys., 2008, **15**, No 3: 345–352.
9. *Linchuk Yu. S.* Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 2014, **57**, No 4: 7–17 (in Ukrainian).
10. *Linchuk Yu. S.* Dopov. NAN Ukraine, 2014, No 3: 25–28 (in Ukrainian).
11. *Linchuk N. E.* Mat. Zametki, 1988, **44**, No 6: 794–802 (in Russian).
12. *Linchuk N. E., Linchuk S. S.* Ukr. Math. Bull., 2008, **5**, No 2: 193–202 (in Ukrainian).
13. *Köthe G.* J. Reine Angew. Math., 1953, **191**: 30–49.
14. *Grosse-Erdmann K. G.* Bull. Amer. Math. Soc., 1999, **36**, No 3: 345–381.

Надійшло до редакції 07.11.2015

Ю. С. Линчук

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича

E-mail: yustlin@gmail.com

Об эквивалентности возмущений оператора дифференцирования функциями от оператора Поммье

В пространствах функций, аналитических в произвольных звездных относительно начала координат областях комплексной плоскости, исследованы условия эквивалентности двух операторов, которые являются возмущениями оператора дифференцирования функциями от оператора Поммье. Описаны коммутанты таких операторов, а также доказана их гиперцикличность и хаотичность.

Ключевые слова: Оператор Поммье, эквивалентные операторы, гиперцикличный оператор, хаотичный оператор.

Yu. S. Linchuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

E-mail: yustlin@gmail.com

On the equivalence of perturbations of a differential operator by functions of the Pommiez operator

We establish the conditions of equivalence of two operators that are perturbations of the differential operator by functions of the Pommiez operator in the spaces of functions analytic in arbitrary starlike domains of the complex plane with respect to the origin. We describe the commutants of the operators and establish their hypercyclicity and chaoticity.

Keywords: Pommiez operator, equivalent operators, hypercyclic operator, chaotic operator.