

МЕТОДИКА ПІДВИЩЕННЯ ЧИСЛОВОЇ СТІЙКОСТІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ
ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ НА ОСНОВІ МАТРИЧНОГО МЕТОДУ
ТОМСОНА–ХАСКЕЛА

Р.М. Пак

*Академія Сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Гвардійська, 32, Львів 79012, Україна,
e-mail: rpak@email.ua*

Як відомо, область застосування розрахункової схеми Томсона–Хаскела є принципово обмеженою під час безпосередньої комп'ютерної реалізації, оскільки вона призводить до помилок для високих частот в області критичних кутів поширення хвиль. У статті розвинуто підходи до усунення цієї проблеми для випадку довільного дипольного ефективно-точкового джерела, яке знаходиться у будь-якому шарі горизонтально-шаруватого напівпростору. Запропонований спосіб підвищення точності для моделювання трикомпонентних сейсмограм ґрунтується на переході від зображення хвильового поля через характеристичні матриці 4-го порядку до його зображення через характеристичні матриці вищих порядків. Після здійснення такого переходу стало можливим обчислювати хвильові поля як у разі великої товщини шарів середовища, так і для вищих частот хвиль.

Ключові слова: математичне моделювання, сейсмічне хвильове поле, матричний метод, горизонтально-шарувате середовище, дипольне джерело, синтетична сейсмограма.

Вступ. Для розв'язання задач розрахунку синтетичних сейсмограм у горизонтально-шаруватих середовищах часто використовують зображення переміщень у частотному діапазоні у вигляді розкладу за горизонтальними хвильовими функціями, яке включає інтеграли за хвильовим числом. Невідомі функції від глибини (вертикальні функції), що входять у ці зображення, задовольняють системі звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку і визначаються на основі введених крайових умов [1].

Традиційним методом розв'язку цієї системи є матричний метод Томсона–Хаскела. За його допомогою можна будувати інтерференційні точні розв'язки для горизонтально-шаруватих середовищ. Матричний метод забезпечує строгий математичний розв'язок задач теорії поширення сейсмічних хвиль і у випадку концентричних сфер і циліндрів. Може бути ефективно використаний, коли необхідно враховувати неідеальну пружність і анізотропність середовища, вільну межу напівпростору, всередині чи на поверхні якого розташовані джерела коливань. У цьому разі можна отримати швидкодіючі алгоритми, є можливість проаналізувати отримані розв'язки: виділити із повного хвильового поля відбиття чи розсіяння заданих кратностей і типів [2].

Однак область застосування розрахункової схеми Томсона–Хаскела виявилася принципово обмеженою під час безпосередньої комп'ютерної реалізації, оскільки дає помилки для високих частот в області критичних кутів поширення хвиль.

У цьому випадку необхідно знаходити суми зростаючих і спадних експонент, що призводить до втрати точності [2]. Через це важливими для розвитку матричного методу стали підходи, за яких інтерференційне хвильове поле зображують через характеристичні матриці 5-го і 6-го порядків замість характеристичних матриць 4-го порядку. Це дало змогу вести розрахунки для високих частот в області критичних кутів поширення хвиль [3, 6–11].

У зв'язку з викладеним ми узагальнили розроблену раніше нами методику розрахунку хвильового поля у вертикально-неоднорідному середовищі [4, 5] для великої товщини шарів і високих частот, зображуючи хвильове поле через матриці 6-го, а потім і 5-го порядку. Для цього підходи [7, 11] розвинуто для випадку довільного дипольного ефективно-точкового джерела, яке знаходиться у будь-якому шарі напівпростору. Тоді в підінтегральних виразах для трьох компонент переміщень і чисельник, і знаменник, які виражені через мінори характеристичної матриці середовища під джерелом і характеристичної матриці всього середовища, слід зображувати через елементи відповідних матриць 6-го (5-го) порядку.

Теорія. У статті [4] виведені співвідношення для хвильового поля у довільній точці вільної поверхні горизонтально-шаруватого середовища, збудженого глибинним джерелом. Для джерела як довільно орієнтованої сили ці співвідношення мають такий вигляд:

переміщення в далекій зоні:

$$\begin{pmatrix} u_r^{(0)} \\ u_z^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} k \mathbf{j}_i L^{-1} [\varepsilon_i \mathbf{g}_i] dk, \quad (1)$$

$$u_{\phi}^{(0)} = - \int_0^{\infty} k J_0 L^{-1} [\varepsilon_3 \tilde{G}_{\phi}] dk,$$

переміщення у ближній зоні:

$$\begin{pmatrix} u_r^{(0)} \\ u_{\phi}^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} J_1 L^{-1} \left[\begin{pmatrix} -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} (\tilde{G}_r + \tilde{G}_{\phi}) \right] dk, \quad u_z^{(0)} = 0, \quad (1')$$

де L^{-1} – обернене перетворення Лапласа функцій змінної $k\eta$; η – змінна перетворення Мелліна, яка пов'язана з фазовою швидкістю співвідношенням $\eta = \sigma + jc$; k – горизонтальне хвильове число.

Для джерела як довільно орієнтованої подвійної пари сил (ефективно-точкова зсувна дислокація) переміщення в далекій зоні

$$\begin{pmatrix} u_r^{(0)} \\ u_z^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\infty} k^2 \mathbf{j}_i L^{-1} [m_i \mathbf{G}_i] dk, \quad (2)$$

$$u_{\phi}^{(0)} = \sum_{i=5}^6 \int_0^{\infty} k^2 j_i L^{-1} [m_i G_i] dk,$$

переміщення у ближній зоні

$$\begin{pmatrix} u_r^{(0)} \\ u_{\phi}^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \left\{ \int_0^{\infty} \left(-kJ_0 + \frac{2J_1}{r} \right) L^{-1} \left[\begin{pmatrix} m_4 \\ -m_5 \end{pmatrix} (\tilde{G}_r + \tilde{G}_{\phi}) \right] dk + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} k J_1 L^{-1} \left[\begin{pmatrix} -m_2 \\ m_6 \end{pmatrix} (\tilde{G}_r' + \tilde{G}_{\phi}' - G_r) \right] dk \right\}, \quad (2')$$

$$u_z^{(0)} = - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} k J_1 L^{-1} [m_4 \tilde{G}_z] dk.$$

У співвідношення входять функції G_r , \tilde{G}_r , G_z , \tilde{G}_z та їхні похідні, що залежать від елементів характеристичної матриці всього середовища

$$\mathbf{D} = (d_{lp}) = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \dots \mathbf{C}_1, \quad (3)$$

де $\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{A}_i^{-1}$ – матриця i -го шару, і характеристичної матриці середовища під джерелом

$$\mathbf{D}_s^{(n+1)} = (d_{lp}^s) = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \dots \mathbf{C}_s \mathbf{A}_s. \quad (4)$$

Матриці \mathbf{A}_i і \mathbf{L}_i наведено у роботі [2]. Отже,

$$G_r = \frac{d_{12}\sigma_2 - d_{32}\sigma_1}{\Delta}, \quad \tilde{G}_r = \frac{d_{12}\tilde{\sigma}_2 - d_{32}\tilde{\sigma}_1}{\Delta}, \quad (5)$$

$$G_z = \frac{d_{31}\sigma_1 - d_{11}\sigma_2}{\Delta}, \quad \tilde{G}_z = \frac{d_{31}\tilde{\sigma}_1 - d_{11}\tilde{\sigma}_2}{\Delta},$$

де $\sigma_1 = d_{1p}^s s_p$, $\sigma_2 = d_{3p}^s s_p$, $\tilde{\sigma}_1 = d_{1p}^s \tilde{s}_p$, $\tilde{\sigma}_2 = d_{3p}^s \tilde{s}_p$, ($p = 1, 2, \dots, 4$),

$$\Delta \equiv D_{12}^{13} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Величини s_p і \tilde{s}_p є елементами вектор-стовпців:

$$\mathbf{S} = - \frac{1}{4\pi\rho_s k \eta^2} \left(e^{-kh_s\alpha_s}, e^{kh_s\alpha_s}, -\frac{1}{\beta_s} e^{-kh_s\beta_s}, \frac{1}{\beta_s} e^{kh_s\beta_s} \right)^T$$

та

$$\tilde{\mathbf{S}} = - \frac{1}{4\pi\rho_s k \eta^2} \left(\frac{1}{\alpha_s} e^{-kh_s\alpha_s}, -\frac{1}{\alpha_s} e^{kh_s\alpha_s}, -e^{-kh_s\beta_s}, -e^{kh_s\beta_s} \right)^T$$

відповідно [4]. Крім того, введено такі позначення:

$$\alpha_s = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{ps}^2}}, \quad \beta_s = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{ss}^2}}, \quad h_s - \text{товщина } s\text{-го}$$

шару (в якому знаходиться джерело), v_{ps} , v_{ss} , ρ_s – відповідно швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль і густина в s -ому шарі.

Як показано у публікації [2], обчислювальна схема, що ґрунтується на підході Томсона–Хаскела, використаного для виведення формул (5), призводить до значних похибок на високих частотах в області граничних кутів поширення хвиль. Іншими словами, в області

$$kh \operatorname{Re}(\alpha_i) \gg 1, \quad \operatorname{Re}(\alpha_i) \gg \operatorname{Re}(\beta_i) \quad (7)$$

розглянутий спосіб виявляється незручним для чисельних розрахунків. З огляду на нерівності (7), ці обмеження стосуються фазових швидкостей, коли вони є меншими за найбільшу швидкість поширення в шарах, а також кутів поширення, більших за критичний кут, що відповідає найбільшій швидкості поширення в шарах. Це показано, зокрема, у статті [2] – матрицю шару \mathbf{C}_i представлено сумою $\mathbf{C}_i = (2\rho_i \alpha_i \eta^2)^{-1} e^{kh_s\alpha_i} \mathbf{C}_i' + \mathbf{C}_i''$ і елементи матриці \mathbf{C}_i' порівняно з елементами матриці \mathbf{C}_i'' . Виявилось, що в області (7) елементи першого доданку є набагато більшими за абсолютною величиною, ніж елементи другого. Однак, якщо знехтувати матрицею \mathbf{C}_i'' , то ранг матриці \mathbf{D} дорівнюватиме одиниці, а її мінори 2-го і 3-го порядків – нулю. Отже, щоб врахувати матрицю \mathbf{C}_i'' , потрібно збільшувати точність ведення розрахунків у міру наближення до області (7).

Таким чином, точність розрахунків під час обчислення мінора 2-го порядку матриці \mathbf{D} , який є знаменником виразів (5), за формулою (6) знижується через погану обумовленість цієї матриці.

Слід окремо зазначити, що неправильне обчислення виразів (5) пов'язане не лише зі зниженням точності під час визначення їх знаменника Δ , а й з чисельно нестійким в області (7)

способом обчислення чисельника. Щоб це показати, запишемо характеристичну матрицю всього середовища \mathbf{D} у вигляді добутку характеристичних матриць середовища під джерелом $\mathbf{D}_s^{(n+1)}$ і над джерелом $\mathbf{D}_1^{(s)}$, тобто $\mathbf{D} = \mathbf{D}_s^{(n+1)} \mathbf{D}_1^{(s)}$. Тоді, виразивши у функціях (5) елементи матриці \mathbf{D} через елементи d_{ip}^1 матриці $\mathbf{D}_1^{(s)}$ і через елементи d_{ip}^s матриці $\mathbf{D}_s^{(n+1)}$, отримаємо

$$G_r = \frac{g_{rp} s_p}{D_{12}^{13}}, \tilde{G}_r = \frac{g_{rp} \tilde{s}_p}{D_{12}^{13}}, G_z = \frac{g_{zp} s_p}{D_{12}^{13}}, \tilde{G}_z = \frac{g_{zp} \tilde{s}_p}{D_{12}^{13}}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} g_{r1} &= -d_{22}^1 D_{12}^{s13} - d_{32}^1 D_{13}^{s13} - d_{42}^1 D_{14}^{s13}, \\ g_{z1} &= d_{21}^1 D_{12}^{s13} + d_{31}^1 D_{13}^{s13} + d_{41}^1 D_{14}^{s13}, \\ g_{r2} &= d_{12}^1 D_{12}^{s13} - d_{32}^1 D_{23}^{s13} - d_{42}^1 D_{24}^{s13}, \\ g_{z2} &= -d_{11}^1 D_{12}^{s13} + d_{31}^1 D_{23}^{s13} + d_{41}^1 D_{24}^{s13}, \\ g_{r3} &= d_{12}^1 D_{13}^{s13} + d_{22}^1 D_{23}^{s13} - d_{42}^1 D_{34}^{s13}, \\ g_{z3} &= -d_{11}^1 D_{13}^{s13} - d_{21}^1 D_{23}^{s13} + d_{41}^1 D_{34}^{s13}, \\ g_{r4} &= d_{12}^1 D_{14}^{s13} + d_{22}^1 D_{24}^{s13} + d_{32}^1 D_{34}^{s13}, \\ g_{z4} &= -d_{11}^1 D_{14}^{s13} - d_{21}^1 D_{24}^{s13} - d_{31}^1 D_{34}^{s13}; \end{aligned}$$

$$D_{ip}^{s ik} = \begin{vmatrix} d_{il}^s & d_{ip}^s \\ d_{kl}^s & d_{kp}^s \end{vmatrix} - \text{мінори матриці } \mathbf{D}_s^{(n+1)}. \quad (9)$$

У чисельники функцій (8) входять мінори 2-го порядку матриці середовища під джерелом (4), неправильне обчислення яких в області (7) пов'язане з поганою обумовленістю цієї матриці. Під час обчислення визначників (6), (9) віднімаються великі, але приблизно однакові числа, і результат може виявитися за межами розрядної сітки обчислювальної машини або після віднімання може залишитися дуже мало достовірних цифр. Відповідний приклад продемонстровано нижче. Ці недоліки методу Томсона-Хаскела можна усунути, ввівши інші алгоритми обчислення мінорів.

Зображення інтерференційного поля з використанням матриць шостого порядку. Згідно з підходом [3] і [5], кожній матриці 4-го порядку \mathbf{F} можна поставити у відповідність матрицю 6-го порядку $\tilde{\mathbf{F}}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} F_{13}^{13} & F_{24}^{13} & F_{14}^{13} & F_{23}^{13} & F_{12}^{13} & F_{34}^{13} \\ F_{13}^{24} & F_{24}^{24} & F_{14}^{24} & F_{23}^{24} & F_{12}^{24} & F_{34}^{24} \\ F_{13}^{14} & F_{24}^{14} & F_{14}^{14} & F_{23}^{14} & F_{12}^{14} & F_{34}^{14} \\ F_{13}^{23} & F_{24}^{23} & F_{14}^{23} & F_{23}^{23} & F_{12}^{23} & F_{34}^{23} \\ F_{13}^{12} & F_{24}^{12} & F_{14}^{12} & F_{23}^{12} & F_{12}^{12} & F_{34}^{12} \\ F_{13}^{34} & F_{24}^{34} & F_{14}^{34} & F_{23}^{34} & F_{12}^{34} & F_{34}^{34} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

елементами якої є мінори 2-го порядку матриці \mathbf{F} . За правилом (10) для матриць \mathbf{A} , \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{C} утворимо мінорні матриці $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{C}}$. Далі використаємо теорему:

якщо для будь-яких матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} , і \mathbf{C} 4-го порядку, для яких $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, побудувати матриці $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, і $\tilde{\mathbf{C}}$ за формулою (10), то матимемо рівність $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}$ [2].

Отже, отримаємо:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_n \dots \tilde{\mathbf{C}}_1$$

$$(\tilde{\mathbf{C}}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} - \text{матриця } i\text{-го шару}),$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_s^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_n \dots \tilde{\mathbf{C}}_s \tilde{\mathbf{A}}_s. \quad (11)$$

Замінивши у формулах (8) мінори відповідними елементами матриць (11), запишемо:

$$G_r = \frac{g_{rp} s_p}{\tilde{d}_{15}^1}, \tilde{G}_r = \frac{g_{rp} \tilde{s}_p}{\tilde{d}_{15}^1}, G_z = \frac{g_{zp} s_p}{\tilde{d}_{15}^1}, \tilde{G}_z = \frac{g_{zp} \tilde{s}_p}{\tilde{d}_{15}^1}, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} g_{r1} &= -d_{22}^1 \tilde{d}_{15}^s - d_{32}^1 \tilde{d}_{11}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{13}^s, \\ g_{z1} &= d_{21}^1 \tilde{d}_{15}^s + d_{31}^1 \tilde{d}_{11}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{13}^s, \\ g_{r2} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{15}^s - d_{32}^1 \tilde{d}_{14}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{12}^s, \\ g_{z2} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{15}^s + d_{31}^1 \tilde{d}_{14}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{12}^s, \\ g_{r3} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{11}^s + d_{22}^1 \tilde{d}_{14}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\ g_{z3} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{11}^s - d_{21}^1 \tilde{d}_{14}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\ g_{r4} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{13}^s + d_{22}^1 \tilde{d}_{12}^s + d_{32}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\ g_{z4} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{13}^s - d_{21}^1 \tilde{d}_{12}^s - d_{31}^1 \tilde{d}_{16}^s. \end{aligned}$$

На відміну від виразів (8), вирази (12) мають ширшу область використання. Зокрема, вони дають можливість вести розрахунки і в області (7). Однак наведена схема не є раціональною. Її можна вдосконалити, якщо перейти до матриць нижчого порядку.

Зображення інтерференційного поля з використанням матриць п'ятого порядку. Враховуючи повторення стовпців і рядків у характеристичних матрицях, з метою економії машинного часу під час обчислення інтерференційного поля можна понизити їх порядок, привівши до квазидіагонального вигляду. Для цього утворимо матриці

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1, 0,5 \left(\begin{matrix} 1/\alpha_i & 1/\alpha_i \\ -1/\beta_i & 1/\beta_i \end{matrix} \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1, \left(\begin{matrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \alpha_i & \beta_i \end{matrix} \right) \end{bmatrix},$$

такі, що матриці 6-го порядку $\tilde{\mathbf{A}}_i$ ставиться у відповідність квазидіагональна матриця \mathbf{A}'_i за формулою

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{H}_i = [\bar{\mathbf{A}}_i, 2\rho_i \eta^2], \quad (13)$$

звідки отримуємо матрицю $\bar{\mathbf{A}}_i$ 5-го порядку. Тоді обернена матриця матиме вигляд

$$\mathbf{A}'_i^{-1} = \mathbf{H}_i^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{G}^{-1} = [\bar{\mathbf{A}}_i^{-1}, 1/(2\rho_i \eta^2)]. \quad (14)$$

Введемо матрицю \mathbf{C}'_i за допомогою рівності $\mathbf{C}'_i = \mathbf{A}'_i \tilde{\mathbf{L}}_i \mathbf{A}'_i^{-1}$. Відповідно до (13), (14) і з урахуванням того, що матриці \mathbf{H}_i і $\tilde{\mathbf{L}}_i$ комутовують, отримуємо $\mathbf{C}'_i = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{C}}_i \mathbf{G}^{-1}$. Водночас

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_i &= [\bar{\mathbf{A}}_i, 2\rho_i \eta^2] \tilde{\mathbf{L}}_i [\bar{\mathbf{A}}_i^{-1}, 1/(2\rho_i \eta^2)] = \\ &= [\bar{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{A}}_i^{-1}, 1] = [\bar{\mathbf{C}}_i, 1], \end{aligned} \quad (15)$$

де $\bar{\mathbf{L}}_i = [e^{kh_i(\alpha_i+\beta_i)}, e^{-kh_i(\alpha_i+\beta_i)}, e^{kh_i(\alpha_i-\beta_i)}, e^{kh_i(\beta_i-\alpha_i)}, 1]$ – діагональна матриця.

Використавши (14) і (15), отримуємо

$$\mathbf{D}' = \mathbf{A}'_{n+1}^{-1} \mathbf{C}'_n \dots \mathbf{C}'_1 = [\bar{\mathbf{D}}, 1/(2\rho_{n+1} \eta^2)],$$

де

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_n \dots \bar{\mathbf{C}}_1 \quad (16)$$

– характеристична матриця 5-го порядку. Втім, $\mathbf{D}' = \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{G}^{-1}$. Таким чином, маємо зв'язок між елементами матриць 5-го і 6-го порядків:

$$\mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{G}^{-1} = [\bar{\mathbf{D}}, 1/(2\rho_{n+1} \eta^2)]. \quad (17)$$

Аналогічно, застосувавши формули (13)–(15) для характеристичної матриці середовища під джерелом, запишемо

$$\mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_s^{(n+1)} \mathbf{H}_{s+1} = [\bar{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}, \rho_{s+1} / \rho_{n+1}], \quad (18)$$

де

$$\bar{\mathbf{D}}_s^{(n+1)} = \bar{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_n \dots \bar{\mathbf{C}}_s \bar{\mathbf{A}}_s \quad (19)$$

є характеристичною матрицею 5-го порядку середовища під джерелом.

Отже, врахувавши зв'язки між елементами матриць 5-го (17) і 6-го порядків (18), вирази (12) перепишемо у вигляді

$$G_r = \frac{g_{rp} s_p}{\bar{d}_{12}}, \quad \tilde{G}_r = \frac{g_{rp} \tilde{s}_p}{\bar{d}_{12}}, \quad (20)$$

$$G_z = \frac{g_{zp} s_p}{\bar{d}_{12}}, \quad \tilde{G}_z = \frac{g_{zp} \tilde{s}_p}{\bar{d}_{12}},$$

де

$$g_{r1} = -\alpha_s d_{22}^1 \bar{d}_{15}^s - d_{32}^1 \bar{d}_{11}^s - d_{42}^1 \bar{d}_{13}^s,$$

$$g_{z1} = \alpha_s d_{21}^1 \bar{d}_{15}^s + d_{31}^1 \bar{d}_{11}^s + d_{41}^1 \bar{d}_{13}^s,$$

$$g_{r2} = \alpha_s d_{12}^1 \bar{d}_{15}^s - d_{32}^1 \bar{d}_{14}^s - d_{42}^1 \bar{d}_{12}^s,$$

$$g_{z2} = -\alpha_s d_{11}^1 \bar{d}_{15}^s + d_{31}^1 \bar{d}_{14}^s + d_{41}^1 \bar{d}_{12}^s,$$

$$g_{r3} = d_{12}^1 \bar{d}_{11}^s + d_{22}^1 \bar{d}_{14}^s + \beta_s d_{42}^1 \bar{d}_{15}^s,$$

$$g_{z3} = -d_{11}^1 \bar{d}_{11}^s - d_{21}^1 \bar{d}_{14}^s - \beta_s d_{41}^1 \bar{d}_{15}^s,$$

$$g_{r4} = d_{12}^1 \bar{d}_{13}^s + d_{22}^1 \bar{d}_{12}^s - \beta_s d_{32}^1 \bar{d}_{15}^s,$$

$$g_{z4} = -d_{11}^1 \bar{d}_{13}^s - d_{21}^1 \bar{d}_{12}^s + \beta_s d_{31}^1 \bar{d}_{15}^s.$$

Множники біля s_p , \tilde{s}_p , що входять у формулу (20), спільно з \bar{d}_{12}^{-1} визначають інтерференційні коефіцієнти відбиття і заломлення.

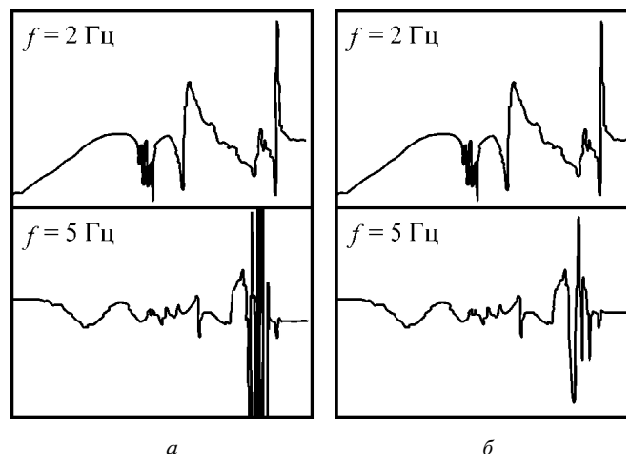
Таким чином, для опису процесів поширення хвиль у горизонтально-шаруватих середовищах, характеристичні матриці 6-го порядку $\tilde{\mathbf{D}}$ і $\tilde{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}$ можна замінити на характеристичні матриці $\bar{\mathbf{D}}$ і $\bar{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}$ відповідно, порядок яких на одиницю нижчий. Формули (16) і (19) для визначення матриць $\bar{\mathbf{D}}$ і $\bar{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}$ мають таку саму структуру, що і рівності (3) і (4) у випадку матриць \mathbf{D} , $\mathbf{D}_s^{(n+1)}$ та співвідношення (11) для $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}$. Тому під час переходу до матриць $\bar{\mathbf{D}}$, $\bar{\mathbf{D}}_s^{(n+1)}$ матричний формалізм повністю зберігається.

Числовий приклад. Застосування переходу до матриць вищих порядків для збільшення точності розрахунку підінтегральних функцій продемонструємо на прикладі п'ятишароватої моделі середовища. Параметри шарів і напівпростору подані у таблиці.

Розрахуємо залежності дійсної частини функції G_z від повільності для фіксованих частот 2 і 5 Гц за формулами (8) та (20). Для того щоб показати необхідність переходу в чисельнику G_z до елементів матриць 5-го порядку, в рівнянні (8) знаменник замінимо на \bar{d}_{12} .

Порівняння результатів показало (рисунок), що для великих значень частоти і повільності підінтегральну функцію за допомогою класичної обчислювальної схеми Томсона–Хаскела розрахувати неможливо. Для правильного визначення цих функцій необхідно регуляризувати обчислення їх чисельників. Якщо виконати регуляризацію обчислення лише знаменника, то значення

Номер шару або напівпростору	ρ , кг/м ³	v_p , м/с	v_s , м/с	h , м
1	2500	4000	2200	500
2	2600	5800	3300	1500
3	2800	6700	3900	1500
4	3200	7800	4500	8500
5	3400	8100	4600	8000
6	3600	8300	4800	∞



Приклади результатів обчислення за алгоритмом Томсона–Хаскелла (а) і із застосуванням матриць 5-го порядку (б). Розрахунки проведено для моделі середовища за даними таблиці та джерела у вигляді зосередженої вертикальної сили, прикладеної на глибині 5,5 км

підінтегральної функції залишиться неправильним, що й показано на рисунку.

Висновки. Розроблено методику підвищення числової стійкості розрахунку хвильових полів для горизонтально-шаруватого напівпростору на основі матричного методу. Цей підхід ґрунтується на переході до матриць вищого порядку для зображення інтерференційного хвильового поля і дає змогу враховувати наявність довільного дипольного джерела, яке діє всередині горизонтально-шаруватого середовища.

Результати продемонстровано на прикладі шаруватого моделі середовища з джерелом у вигляді зосередженої вертикальної сили.

Запропонований спосіб поліпшення числової стійкості буде використано для створення методики розрахунку високочастотних синтетичних сейсмограм.

1. Аки К. Количественная сейсмология / К. Аки, П. Ричардс. — М.: Мир, 1983. — 519 с.
2. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых, упругих и жидких средах / Л.А. Молотков. — Л.: Наука, 1984. — 201 с.
3. Молотков Л.А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961. — № 5. — С. 240–280.

4. Пак Р.М. Моделирование хвильового поля, збудженого глибинним джерелом у вертикально-неоднорідному середовищі / Р.М. Пак // Геофіз. журн. — 2005. — Т. 27, № 5. — С. 887–894.
5. Пак Р.М. Хвильове поле в однорідному середовищі для джерела у вигляді одинарної сили або подвійної пари сил / Р.М. Пак // Геоінформатика. — 2004. — № 1. — С. 36–44.
6. Chapman C.H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm / C.H. Chapman // Geophys. J. Inter. — 2003. — V. 154. — P. 212–223.
7. Dunkin I.W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies / I.W. Dunkin // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1965. — V. 55. — P. 335–358.
8. Knopoff L.A. Matrix method for elastic wave problems / L.A. Knopoff // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1964. — V. 54. — P. 431–438.
9. Thresher E.N. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media / E.N. Thresher // J. Sound and Vibration. — 1965. — V. 2. — P. 210–226.
10. Wang R. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions / R. Wang // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1999. — V. 89. — P. 733–741.
11. Watson T.N. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered halfspace / T.N. Watson // Bull. Seism. Soc. Amer. — 1970. — V. 60. — P. 161–166.

МЕТОДИКА ПОВЫШЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ТОМСОНА–ХАСКЕЛЛА

Р.М. Пак

Академия Сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного, ул. Гвардейская, 32, Львов 79012, Украина, e-mail: rpak@email.ua

Как известно, область применения расчетной схемы Томсона–Хаскелла принципиально ограничена при непосредственной компьютерной реализации, поскольку вычисление дает ошибки для высоких частот в диапазо-

не критических углов распространения волн. В статье развиты подходы к устранению этой проблемы для случая произвольного дипольного эффективно-точечного источника, находящегося в любом слое горизонтально-слоистого полупространства. Предложенный способ повышения точности для моделирования трехкомпонентных сейсмограмм основывается на переходе от представления волнового поля характеристическими матрицами 4-го порядка к его представлению характеристическими матрицами высших порядков. После осуществления такого перехода стало возможным проводить вычисление волновых полей как при большой толщине слоев среды, так и для высоких частот волн.

Ключевые слова: математическое моделирование, сейсмическое волновое поле, матричный метод, горизонтально-слоистая среда, дипольный источник, синтетическая сейсмограмма.

A METHOD OF INCREASING THE NUMERICAL STABILITY OF THE WAVE FIELD CALCULATION BASED ON THE MATRIX METHOD OF THOMSON–HASKELL

R.M. Pak

*Army Academy named after Hetman Petro Sahaydachnyi, Gvardiyska Str., 32, Lviv 79012, Ukraine,
e-mail: rpak@email.ua*

Purpose. It is known that the area of application of the Thomson–Haskell calculation scheme is in principle limited during the direct computer realization. The purpose of this work is the development of approaches to fix this problem for the case of arbitrary dipole effective-point source which is located in any layer of horizontal-layered half-space.

Design/methodology/approach. The suggested approach is based on the method of transition from image of the wave field using characteristic matrices of the 4th order (method of Thomson–Haskell) to image, using characteristic matrices of the 6th order.

Findings. The result of this work is the wave field presentation which does not include the characteristic matrices of the 4th order. Each minor of these matrices is replaced with the corresponding element of characteristic matrices of the 6th order. There is a doubling of columns and rows in the resulting matrices of the 6th order. Because of this, the order of characteristic matrices is lowered to five by reducing them to a quasi diagonal form. This will save computer time during calculation of interference fields.

Practical value/implications. The developed approach increases the numerical stability during the calculation of wave fields. As a result, the computation of synthetic seismograms can be done for very thick layers of medium and higher wave frequencies.

Keywords: mathematical modelling, seismic wave-field, matrix method, vertically heterogeneous medium, tensor of seismic moment, synthetic seismogram.

References:

1. Aki K., Richards P. *Kolichestvennaya seismologiya* [Quantitative Seismology]. Moscow, Mir, 1983, 519 p.
2. Molotkov L.A. *Matrichnyy metod v teorii rasprostraneniya voln v sloistykh, uprugikh i zhidkikh sredakh* [Matrix method in the theory of wave propagation in layered, elastic and liquid media]. Leningrad, Nauka, 1984, 201 p.
3. Molotkov L.A. *O rasprostraneni uprugikh voln v sredakh, sodержashchikh tonkie ploskoparallel'nye sloi* [Propagation of elastic waves in media containing thin plane-parallel layers]. *Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seismicheskikh voln* [Questions dynamic theory of seismic wave propagation]. Leningrad, Publishing house of Leningrad University, 1961, no. 5, pp. 240-280.
4. Pak R.M. *Modeliuvannya khvylovoho polia, zbudzhenoho hlybnyym dzherelom u vertykalno-neodnorodnomu seredovyshchi* [Modeling of wave-fields excited by deep source in a vertically-heterogeneous medium]. *Geofizicheskij zhurnal* [Geophysical Journal], 2005, vol. 27, no. 5, pp. 887-894.
5. Pak R.M. *Khvylove pole v odnorodnomu seredovyshchi dlia dzherela u vyhliadi odyarnoi syly abo podviinoi pary syl* [Wave field calculation for rupture with displacement along inner surface]. *Geoinformatika* [Geoinformatics (Ukraine)], 2004, no. 1, pp. 36-44.
6. Chapman C.H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm. *Geophysical Journal International*, 2003, vol. 154, pp. 212-223.
7. Dunkin I.W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1965, vol. 55, pp. 335-358.
8. Knopoff L.A. Matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1964, vol. 54, pp. 431-438.
9. Thrower E.N. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media. *Journal of Sound and Vibration*, 1965, vol. 2, pp. 210-226.
10. Wang R. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1999, vol. 89, pp. 733-741.
11. Watson T.N. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered halfspace. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1970, vol. 60, pp. 161-166.

Надійшла до редакції 23.07.2014 р.

Received 23/07/2014