

ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Проведен сравнительный анализ использования треугольных и прямоугольных конечных элементов в проекционно-итерационном методе при численном исследовании распределения полей напряжений в тонкой изотропной упругой прямоугольной пластине с прямоугольным отверстием при заданном линейном законе перемещений на её границе. Выполнено сравнение эффективности проекционно-итерационного варианта с традиционным методом конечных элементов. Даны рекомендации по использованию метода.

Проведено порівняльний аналіз застосування трикутних та прямокутних скінченних елементів у проєкційно-ітераційному методі при числовому дослідженні розподілу полів напружень у тонкій ізотропній пружній прямокутній пластині з прямокутним отвором при наданому лінійному законі переміщень на її границі. Виконано порівняння ефективності проєкційно-ітераційного варіанту з традиційним методом скінченних елементів. Надані рекомендації щодо застосування методу.

A comparative analysis of triangular and rectangular finite elements in a projective-iterative method for numerical investigations of the stress fields distribution in a thin isotropic rectangular plate with a rectangular hole for a specified linear law of displacements at its boundary is conducted. The efficiency comparison of a projective-iterative version of the finite element method with the standard one is given. Recommendations for the method applications are made.

При разработке современных конструкций приоритетных отраслей техники приходится иметь дело со сложными задачами механики деформируемого твёрдого тела и прочности конструкций, в частности с задачами исследования напряжённо-деформированного состояния и механики разрушения элементов неоднородных тонкостенных конструкций – пластин и оболочек с отверстиями, трещинами, включениями [8, 14, 16, 18]. Решение таких задач требует разработки соответствующего математического аппарата и эффективных численных методов, которые поддаются алгоритмизации и легко реализуются на ПК.

К наиболее распространённым и универсальным численным методам решения краевых и вариационных задач относятся метод конечных элементов (МКЭ) [9, 12] и его многосеточные модификации [17], построенные на основе использования тех или иных итерационных процессов [15]. Проекционно-итерационные методы, основанные на МКЭ, позволяют существенно снизить затраты машинного времени при решении задач теории упругости [1, 4, 10]. В [3 – 7] приведены некоторые аспекты использования проекционно-итерационных вариантов МКЭ в задачах механики деформируемого твёрдого тела и прочности конструкций. Отметим, что для областей сложной формы целесообразно использовать сочетание треугольных и прямоугольных конечных элементов (линейных и билинейных аппроксимаций) [9].

В настоящей работе проводится исследование плоского напряжённо-деформированного состояния тонкой изотропной упругой пластины с прямоугольным отверстием при заданном линейном законе перемещений на её границе. Такая задача является модельной и позволяет отработать многие сложные вопросы, возникающие при использовании МКЭ в задачах прочности для неоднородных элементов конструкций с различными нарушениями сплошности. Построены проекционно-итерационные варианты МКЭ при использовании треугольных и прямоугольных конечных элементов и проведен сравнительный ана-

лиз эффективности соответствующих вычислительных алгоритмов.

1. Рассмотрим напряжённо-деформированное состояние тонкой изотропной упругой прямоугольной пластины со сторонами L_1 , L_2 , ослабленной в центре прямоугольным отверстием размером $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2')$, контур которого Γ_1 свободен от внешних усилий (рис. 1). На внешней части границы Γ_2 заданы перемещения

$$u(x, y)|_{\Gamma_2} = g_1(x, y), \quad v(x, y)|_{\Gamma_2} = g_2(x, y), \quad (1)$$

где $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ – линейные функции переменных x и y .

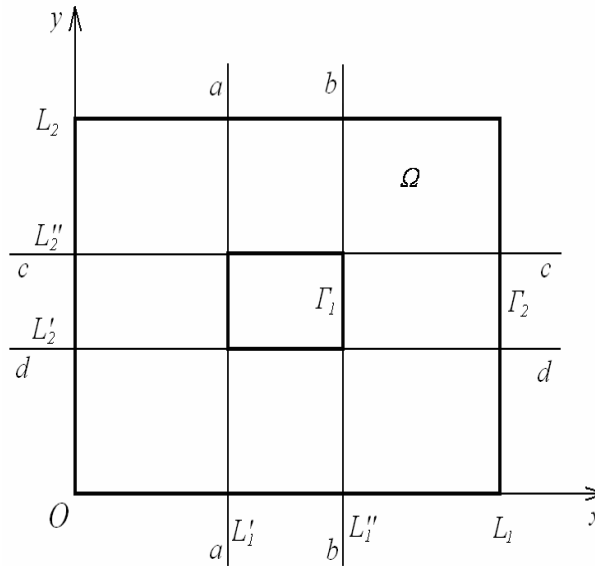


Рис. 1

В соответствии с вариационным принципом минимума полной потенциальной энергии, математическая модель рассматриваемой задачи имеет следующий вид [2, 13]. На классе функций, имеющих кусочно-непрерывную производную в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – граница Ω , и удовлетворяющих условиям (1), требуется найти $u(x, y)$, $v(x, y)$, доставляющие минимум функционалу

$$I[u, v] = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (2)$$

где $\lambda, \mu > 0$ – константы Ляме.

Поля деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ и напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Задачу нахождения минимума функционала (2) можно рассматривать как задачу условной минимизации в гильбертовом пространстве

$$I[z] \rightarrow \inf, z \in Z, \quad (3)$$

где $I[z]$ – непрерывный функционал, ограниченный снизу на множестве кинематически возможных перемещений Z вещественного гильбертова пространства $H = W_2^{(1)}(\Omega)$; $z = (u, v)$ – вектор-функция перемещений.

2. Для решения поставленной задачи применим проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов [3, 4]. Приведем его основную идею.

Исходная экстремальная задача (3) аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью дискретных экстремальных задач ($n = 1, 2, \dots$) для функций многих переменных:

$$I_n[z_n] \rightarrow \inf, z_n \in Z_n, \quad (4)$$

где Z_n – дискретный аналог множества Z .

Каждая из задач (4) решается с помощью метода последовательной верхней релаксации, но не до конца. Начиная с некоторого ($n = N$) достаточно грубого разбиения для соответствующей функции многих переменных I_n строится лишь несколько (k_n) приближений к её точке минимума, последнее из которых интерполируется на более мелкую конечно-элементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума для соответствующей функции многих переменных I_{n+1} . Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность между двумя соседними приближениями.

Следуя МКЭ, проведём дискретизацию области Ω прямоугольными и треугольными конечными элементами, получаемыми из прямоугольных элементов путём их деления пополам диагональю. На рис. 2, а изображён шестиэлементный семиузловой шаблон, в котором текущий узел (i, j) конечно-элементной сетки обозначен цифрой 7. Нумерация узлов шести смежных конечных элементов, имеющих общий узел (i, j), введена по часовой стрелке. Выбор направления осей i, j связан с матричным хранением узловых значений перемещений. На рис. 2, б приведен треугольный конечный элемент в локальной системе координат.

Внутри каждого треугольного конечного элемента искомые функции перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ приближённо заменим линейными функциями, зависящими от узловых значений u и v в каждой из трёх вершин конечного элемента ($u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$) (в этом случае имеем линейную аппроксимацию на треугольном конечном элементе – базисные функции линейны относительно координат x, y). Далее применим методику, предложенную в [7], согласно которой не требуется хранение матрицы жёсткости системы в явном виде, а значения перемещений u и v в текущем узле (i, j) выражаются через узловые значения перемещений ($u_1, u_2, \dots, u_6, v_1, v_2, \dots, v_6$) шести примыкающих к данному узлу конечных элементов.

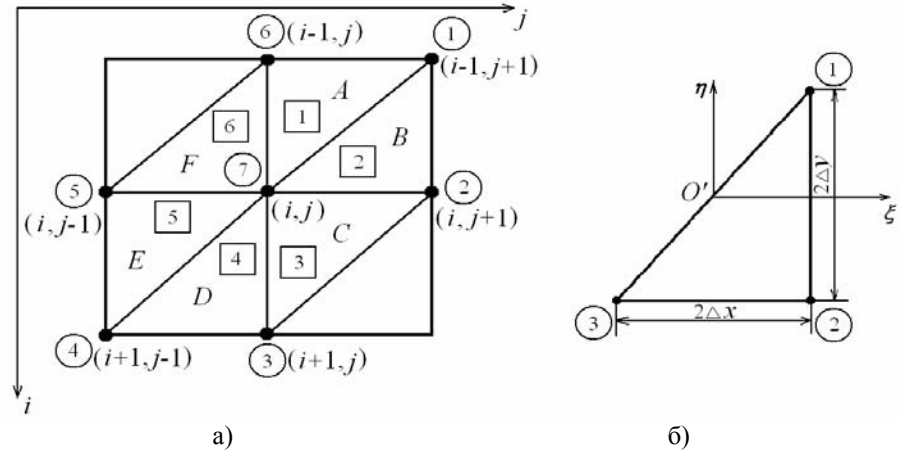


Рис. 2.

Поскольку при обходе отверстия приходится использовать неполный шаблон, то целесообразно ввести так называемые индикаторы конечных элементов A, B, C, D, E, F , где $A = B = C = D = E = F = 1$, если данный конечный элемент принадлежит шаблону, и $A = B = C = D = E = F = 0$ в противном случае.

С учётом индикаторов конечных элементов формулы для вычисления перемещений в текущем узле (i, j) примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_7 = & [(R_1 \cdot B + R_1 \cdot C) \cdot u_2 + (R_4 \cdot C + R_4 \cdot D) \cdot u_3 + (R_1 \cdot E + R_1 \cdot F) \cdot u_5 + \\ & + (R_4 \cdot A + R_4 \cdot F) \cdot u_6 + (R_3 \cdot A + R_2 \cdot B) \cdot v_1 - (R_2 \cdot B + R_3 \cdot C) \cdot v_2 - \\ & - (R_2 \cdot C + R_3 \cdot D) \cdot v_3 + (R_3 \cdot D + R_2 \cdot E) \cdot v_4 - (R_2 \cdot E + R_3 \cdot F) \cdot v_5 - \\ & - (R_3 \cdot A + R_2 \cdot F) \cdot v_6 + (R_2 \cdot C + R_3 \cdot C + R_2 \cdot F + R_3 \cdot F) \cdot v_7] / P; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_7 = & [(R_2 \cdot A + R_3 \cdot B) \cdot u_1 - (R_3 \cdot B + R_2 \cdot C) \cdot u_2 - (R_3 \cdot C + R_2 \cdot D) \cdot u_3 + \\ & + (R_2 \cdot D + R_3 \cdot E) \cdot u_4 - (R_3 \cdot E + R_2 \cdot F) \cdot u_5 - (R_2 \cdot A + R_3 \cdot F) \cdot u_6 + \\ & + (R_2 \cdot C + R_3 \cdot C + R_2 \cdot F + R_3 \cdot F) \cdot u_7 + (R_6 \cdot B + R_6 \cdot C) \cdot v_2 + \\ & + (R_5 \cdot C + R_5 \cdot D) \cdot v_3 + (R_6 \cdot E + R_6 \cdot F) \cdot v_5 + (R_5 \cdot A + R_5 \cdot F) \cdot v_6] / Q, \end{aligned}$$

где $\eta = \Delta x / \Delta y$; $R_1 = (2\mu + \lambda) / \eta$; $R_2 = \mu \cdot \eta$; $R_3 = \lambda$; $R_4 = \mu$; $R_5 = \mu / \eta$; $R_6 = (2\mu + \lambda) \cdot \eta$; $P = R_2 \cdot A + R_1 \cdot B + R_1 \cdot C + R_2 \cdot C + R_2 \cdot D + R_1 \cdot E + R_1 \cdot F + R_2 \cdot F$; $Q = R_6 \cdot A + R_5 \cdot B + R_6 \cdot C + R_5 \cdot C + R_6 \cdot D + R_5 \cdot E + R_6 \cdot F + R_5 \cdot F$; $2\Delta x$, $2\Delta y$ – размеры треугольного конечного элемента вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Значения \bar{u}_7 и \bar{v}_7 , найденные по (5), уточняются по формулам метода последовательной верхней релаксации [11]:

$$\begin{aligned} u_7^{(k+1)} &= u_7^{(k)} + \omega(\bar{u}_7 - u_7^{(k)}), \\ v_7^{(k+1)} &= v_7^{(k)} + \omega(\bar{v}_7 - v_7^{(k)}), \end{aligned}$$

где k – номер итерации ($k = 0, 1, \dots, k_n$); ω – параметр релаксации ($1 < \omega < 2$).

Шаблон и формулы для прямоугольных конечных элементов с использованием билинейной аппроксимации искоемых функций перемещений (в этом случае в выражение для них входит произведение координат x, y) приведены в [6]. Сходимость проекционно-итерационного метода для общего вида экстремальной задачи (3) исследована в [1].

3. Приведем результаты численного анализа. Расчёты проведены для пластинки, имеющей размеры $L_1 = L_2 = 0,0225$ м, с отверстием $0,01 \times 0,01$ м, материал пластинки – сталь: модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Функции $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, задающие линейный закон перемещений на границе Γ_2 , взяты в виде [12, гл. 4]:

$$g_1(x, y) = \gamma_0 \cdot (y - 0,01125), \quad g_2(x, y) = \gamma_0 \cdot (x - 0,01125),$$

где $\gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ – угол сдвига.

Проекционно-итерационный вариант МКЭ реализован на 6-ти вложенных вдвое конечно-элементных сетках (19×19 , 37×37 , 73×73 , 145×145 , 289×289 , 577×577) из прямоугольных и треугольных лагранжевых элементов первой степени ($h_{n+1} = h_n/2$). Количество k_n строящихся приближений на n -ом шаге ($n = 1, 2, \dots, 6$) проекционно-итерационного процесса выбиралось как наименьшее целое k , удовлетворяющее неравенству

$$\|z_n^{(k)} - z_n^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_n \quad (k = 0, 1, \dots, k_n),$$

где ε_n – заданная точность вычислений на n -ой сетке; $z_n^{(k)}$ – приближённое решение n -ой конечномерной задачи (с шагом дискретизации h_n).

Численные результаты получены на ПК Toshiba U300 (1,73 GHz) с 1 GB оперативной памяти. Алгоритм метода реализован на языке Фортран.

Приведём результаты численной реализации традиционного метода конечных элементов и его проекционно-итерационного варианта на последовательности 6-ти конечно-элементных сеток с использованием треугольных (табл. 1) и прямоугольных (табл. 2) конечных элементов при $\varepsilon = 10^{-9}$, $\omega = 1,75$.

Таблица 1

Номер сетки	Сетка	ε_n	Проекционно-итерационный вариант МКЭ		Традиционный МКЭ	
			k_n	Время счёта, с	k_n	Время счёта, с
1	19×19	$32 \cdot 10^{-9}$	130	0,02	–	–
2	37×37	$16 \cdot 10^{-9}$	113	0,05	–	–
3	73×73	$8 \cdot 10^{-9}$	268	0,54	–	–
4	145×145	$4 \cdot 10^{-9}$	880	6,47	–	–
5	289×289	$2 \cdot 10^{-9}$	2720	81,69	–	–
6	577×577	$1 \cdot 10^{-9}$	6895	934,94	20568	2526

Из табл. 1 видно, что, исходя из нулевого начального приближения, задаваемого на самой грубой сетке (19×19), приближённое решение исходной задачи было получено проекционно-итерационным вариантом МКЭ с использованием треугольных конечных элементов за $130 + 113 + 268 + 880 + 2720 + 6895 = 11006$ итераций (17 мин 3 с). При решении этой же задачи традиционным МКЭ на одной последней сетке с нулевым начальным приближением решение было найдено за 20568 итераций (42 мин 6 с). При этом, с точки зрения затрат машинного времени проекционно-итерационный вариант МКЭ оказывается приблизительно в 2,5 раза эффективнее обычного МКЭ.

Таблица 2

Номер сетки	Сетка	ε_n	Проекционно-итерационный вариант МКЭ		Традиционный МКЭ	
			k_n	Время счёта, с	k_n	Время счёта, с
1	19×19	$32 \cdot 10^{-9}$	46	0,01	–	–
2	37×37	$16 \cdot 10^{-9}$	43	0,02	–	–
3	73×73	$8 \cdot 10^{-9}$	155	0,31	–	–
4	145×145	$4 \cdot 10^{-9}$	492	4,13	–	–
5	289×289	$2 \cdot 10^{-9}$	1426	46,21	–	–
6	577×577	$1 \cdot 10^{-9}$	3744	505,96	13762	1867,67

Следуя данным табл. 2, видно, что приближённое решение исходной задачи было получено с помощью проекционно-итерационного варианта МКЭ при использовании прямоугольных конечных элементов за $46 + 43 + 155 + 492 + 1426 + 3744 = 5906$ итераций (9 мин 18 с). Для решения этой же задачи традиционным МКЭ на одной последней сетке с нулевым начальным приближением потребовалось 13762 итерации (31 мин 8 с). Выигрыш по времени счёта на ПК в этом случае проекционно-итерационным вариантом МКЭ по сравнению с обычным МКЭ оказывается в 3,4 раза.

Сопоставляя данные табл. 1 и 2, приходим к выводу, что использование прямоугольных конечных элементов в проекционно-итерационном процессе приводит к сокращению машинного времени (приблизительно в 1,8 раза) по сравнению с использованием треугольных конечных элементов.

Расчеты проведены также для других значений параметра релаксации ω ($\omega = 1,4; 1,45; \dots 1,95$ с шагом 0,05).

Результаты, полученные в характерном сечении пластины $a - a$ (при $x = L_1'$, $0 \leq y \leq L_2$) проекционно-итерационным вариантом МКЭ на последовательности 6-ти конечно-элементных сеток с использованием прямоугольных (линия 1) и треугольных (линия 2) конечных элементов, приведены на рис. 3 – 5.

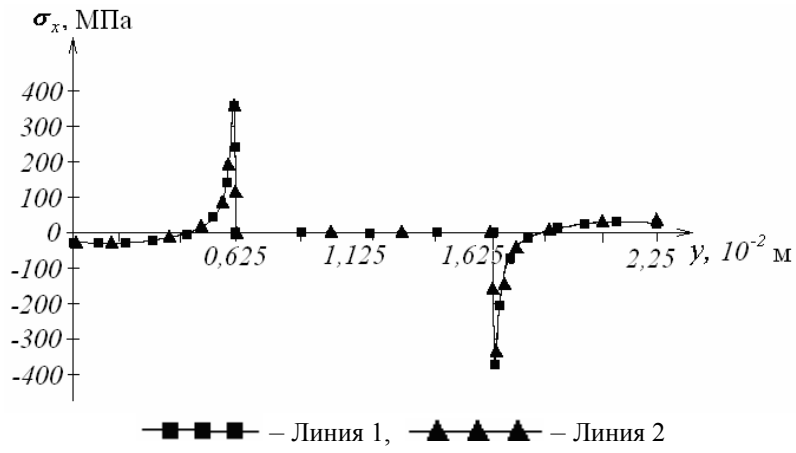


Рис. 3

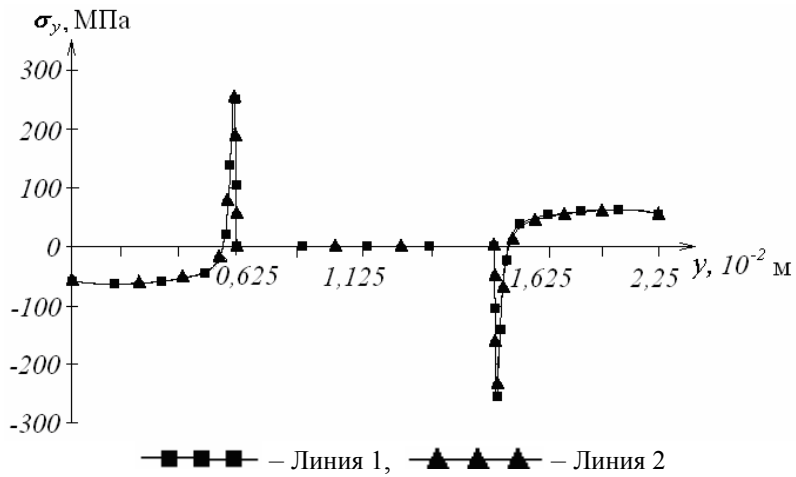


Рис. 4

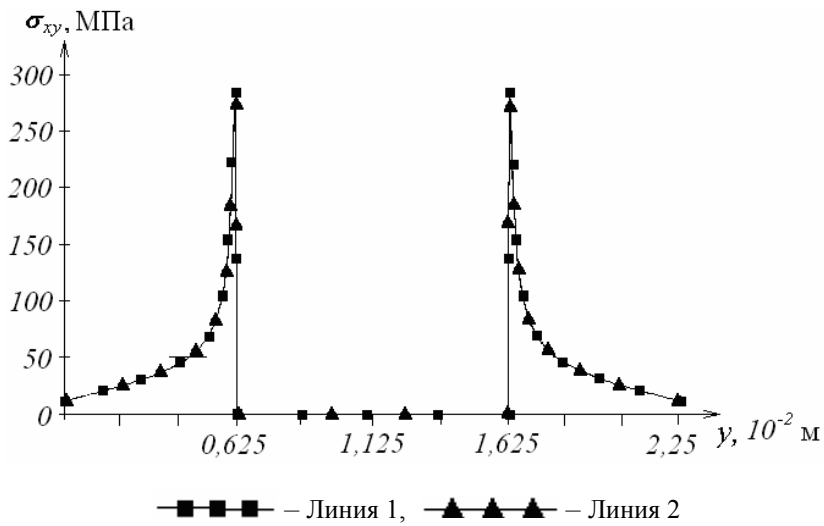


Рис. 5

Из рис. 3 – 5 видно, что численные решения σ_x , σ_y , σ_{xy} , полученные с использованием прямоугольных и треугольных конечных элементов, отличаются друг от друга не более чем на 1,7%. В угловых точках, как известно, имеет место концентрация напряжений. Решение, получающееся на основе проекционно-итерационного варианта МКЭ на всей сетке, в том числе и в угловых точках, является дискретной функцией, минимизирующей функционал $I_n[z_n]$, аппроксимирующий полную потенциальную энергию системы. Поэтому, начиная с расстояния двух шагов сетки от угловой точки, перемещения и вычисляемые по ним напряжения достаточно достоверно характеризуют напряжённо-деформированное состояние пластины [13, гл. 4, §1]. Следует заметить, что использование треугольных конечных элементов позволило получить более точные значения σ_x , σ_y , однако для σ_{xy} более точный результат показывает использование прямоугольных конечных элементов.

На рис. 6 – 8 приведены линии равных напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} соответственно, полученных проекционно-итерационным вариантом МКЭ с использованием треугольных конечных элементов.

Симметричная картина линий равных напряжений, которая соответствует физическому смыслу задачи, хорошая согласованность с решением из [13, гл. 4], найденным с помощью метода конечных разностей, свидетельствуют о достоверности полученных результатов. Отметим также резкое возрастание (концентрацию) напряжений вблизи угловых точек отверстия, что очевидно соответствует физике процессов, происходящих в рассматриваемой пластине.

Выводы. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1) применение проекционно-итерационного варианта МКЭ для решения задач теории упругости для пластин с прямоугольными отверстиями имеет значительные преимущества по сравнению с обычным МКЭ (выигрыш по времени счёта составляет более 3 раз);

2) рекомендуемое значение параметра релаксации для указанного класса задач $\omega = 1,75$;

3) проекционно-итерационный вариант МКЭ применим для решения задач большой размерности (с более 300 тыс. неизвестными), при этом решение может быть получено за приемлемое время. Это, в частности, делает метод привлекательным для использования в исследованиях, направленных на уточнение математических моделей задач выбранного класса;

4) проекционно-итерационный вариант МКЭ при использовании треугольных конечных элементов даёт более точное значение напряжений, однако несколько проигрывает по времени счёта на ПК проекционно-итерационному варианту МКЭ с использованием прямоугольных конечных элементов;

5) разработанный алгоритм и комплекс компьютерных программ на его основе позволяют решать задачи для функционалов вида (2) при других конфигурациях пластин и типах граничных условий.

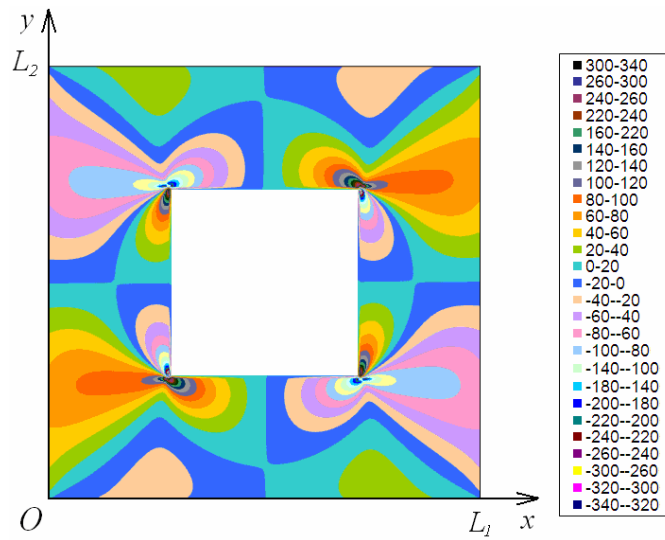


Рис. 6

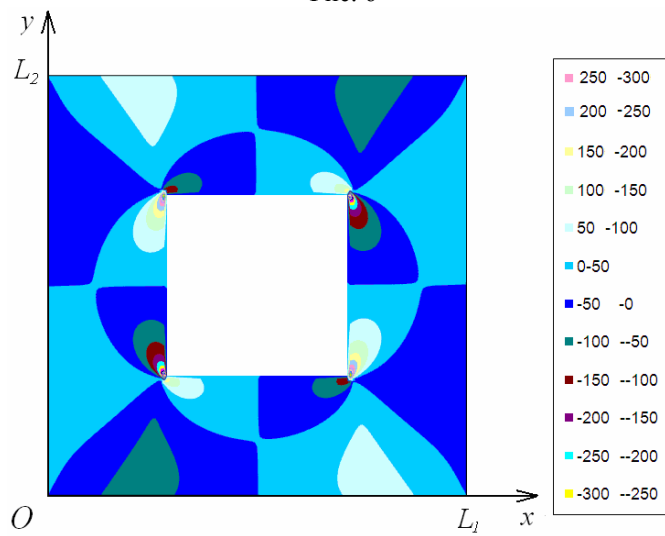


Рис. 7

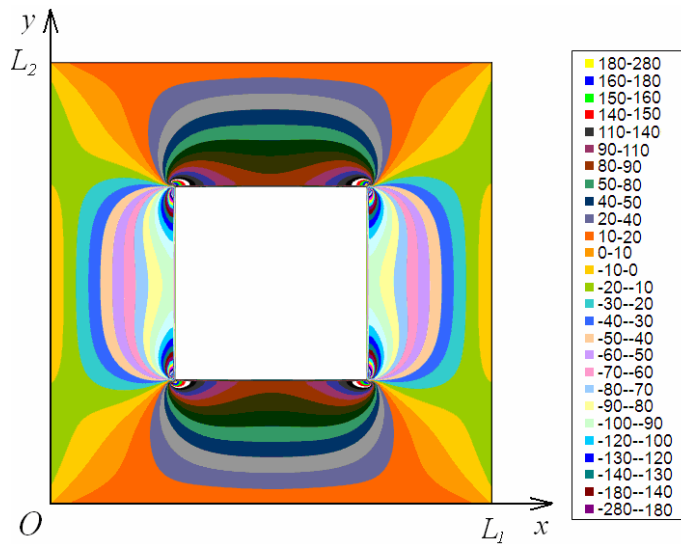


Рис. 8

В дальнейшем проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов при использовании как треугольных, так и прямоугольных конечных элементов может быть применён к решению задач теории упругости и пластичности для пластин и оболочек с несколькими отверстиями при варьировании их размеров и включениями неканонической формы [8, 16, 18], задач механики разрушения для пластин с трещинами и включениями, в том числе с использованием аппроксимаций более высоких порядков. Проведенные исследования могут быть использованы при решении более сложных задач механики деформируемого твердого тела и прочности элементов неоднородных тонкостенных конструкций.

1. Балашова С. Д. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями / С. Д. Балашова, Э. Л. Тавадзе // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Днепропетровск. : Вид-во ДГУ, 1996. – С. 128 – 134.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 544 с.
3. Гарт Э. Л. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей / Э. Л. Гарт, И. В. Борисовская // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – Днепропетровск. : Вид-во ДНУ, 2004. – Вип. 8. – Т. 2. – С. 44 – 51.
4. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56 – 61.
5. Гарт Е. Л. Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів : ІППМ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2008. – Т. 3. – С. 18 – 20.
6. Гарт Э. Л. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2008. – Вип. 12. – С. 34 – 42.
7. Гудрамович В. С. Контактные взаимодействия трубопроводов с седловыми опорами с учетом дефектов формы в зоне контакта / В. С. Гудрамович, В. А. Блажко, Э. Л. Гарт // Міцність та надійність магістральних трубопроводів (МТ-2008): Міжнародн. наук.-техн. конф., 2008 р., Київ: тези доп. – К. : ІПМ ім. Г. С. Писаренка НАНУ, 2008. – С. 35 – 36.
8. Гузь А. Н. Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов. – К. : Наук. думка, 1980. – 692 с.
9. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ. / Под ред. Н. С. Бахвалова / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
10. Красносельский М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М. : Наука, 1969. – 455 с.
11. Кузьменко В. И. Трёхмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета / В. И. Кузьменко // Изд. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1984. – № 4. – С. 105 – 112.
12. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. Сахарова А. С., Альтенбаха И. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
13. Молчанов И. Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. / И. Н. Молчанов. – К. : Наук. думка, 1979. – 316 с.
14. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наук. думка, 1968. – 888 с.
15. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
16. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М. : Наука, 1989. – 288 с.
18. Hudramovych V. S. Feature of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfection / V. S. Hudramovych // Intern. Appl. Mechanics. – 2006 – 42, No 12. – P. 1323 – 1355.

Институт технической механики НАН и НКА Украины,
Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара

Получено 01.04.09,
в окончательном варианте 03.04.09