

## РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕРХЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ СО СПУТНЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ МЕТОДОМ ГЛОБАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ

Сформулирован алгоритм решения упрощенных уравнений вязкого слоя для расчета турбулентного течения в канале при взаимодействии сверхзвуковой струи со спутным дозвуковым потоком. Составной частью алгоритма является метод глобальных итераций по давлению. На каждой итерации поле течения рассчитывается маршевым методом от начального сечения. Сравнение результатов решения тестовых задач с имеющимися в литературе результатами численных расчетов и экспериментальными данными подтверждает работоспособность алгоритма.

Сформульовано алгоритм рішення спрощених рівнянь в'язкого шару для розрахунку турбулентної течії в каналі при взаємодії надзвукового струменя із супутнім дозвуковим потоком. Складовою частиною алгоритму є метод глобальних ітерацій по тиску. На кожній ітерації поле течії розраховується маршовим методом від початкового перетину. Зіставлення результатів вирішення тестових задач з результатами чисельних розрахунків та експериментальними даними, що є в літературі, підтверджує працездатність алгоритму.

The algorithm for the solution of simplified equalizations of the viscous layer for calculations of a turbulent flow in a channel at the interaction of a supersonic stream with a cocurrent subsonic flow is formulated. A component part of the algorithm is a method of global iterations on the pressure. On each iteration a flowfield is calculated by the marsh method from an initial section. Comparison of the results of the test problems solution with the existing results of numerical calculations and experimental data confirms the operability of the algorithm.

Взаимодействие сверхзвуковой струи со спутным ограниченным дозвуковым потоком имеет место во многих технических устройствах. Например, в газодинамических трактах прямооточных воздушно-реактивных двигателей или в различных типах инжекторов. Повышение требований к точности расчета характеристик таких устройств ставит перед исследователями задачу создания эффективных методов расчета реализуемых течений. В большинстве случаев рассматриваемые течения относятся к течениям с преимущественным направлением движения вдоль некоторого направления, в частности оси канала. Для исследования таких течений эффективной оказалась математическая модель, основанная на упрощенных уравнениях Навье – Стокса – уравнениях вязкого слоя, в которых оставлены все члены уравнений невязкого течения и часть членов, отражающих влияние вязкости и входящих в систему уравнений пограничного слоя. В этих уравнениях опущены вторые производные по продольной координате, что позволяет формулировать для них начально-краевую задачу. Для решения этих уравнений в работе [1] использован маршевый алгоритм, в рамках которого уравнения разбиваются на две подсистемы. К первой подсистеме относятся параболические уравнения для продольной составляющей скорости, полной энтальпии и характеристик турбулентности. Во вторую подсистему включены уравнение неразрывности и уравнение для поперечной составляющей импульса, которые совместно с уравнением состояния рассматриваются как уравнения относительно давления и поперечной составляющей вектора скорости. Эта подсистема уравнений имеет гиперболический тип. Алгоритм решения этой подсистемы формулируется так, чтобы обеспечить возможность удовлетворения краевым граничным условиям для поперечной компоненты вектора скорости, определяемой из уравнения первого порядка. Для каждой из подсистем в отдельности постановка задачи Коши является корректной, а решение можно получить, применяя маршевый алгоритм. Однако, при наличии дозвуковых областей

© И.С. Белоцерковец, 2009

пристеночного течения формулировка задачи с начальными данными как задачи Коши по продольной переменной является некорректной. Это связано с наличием градиента давления в уравнении для продольного импульса, который обеспечивает передачу возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях течения [2 – 5]. Для возможности расчета смешанных прямоточных течений маршевыми алгоритмами необходимо проводить регуляризацию решения в дозвуковых областях. Имеется много способов регуляризации, некоторые из них описаны в [3 – 5]. В работе [1] для регуляризации решения производная давления в дозвуковой области умножается на множитель, пропорциональный квадрату числа Маха, посчитанному по продольной составляющей вектора скорости. Трудоемкость численного решения упрощенных уравнений с использованием алгоритма [1] сравнима с трудоемкостью решений уравнений пограничного слоя по стандартным программам. Вследствие регуляризации решения этот алгоритм полностью исключает передачу возмущений вверх по потоку, что ограничивает его применение сверхзвуковыми, в среднем, течениями, то есть течениями, для которых, несмотря на наличие в потоке узких дозвуковых зон, интеграл Пирсона

$\Pi = \int_0^{y_w(x)} \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{1}{M_u^2} \right) y^\kappa dy$  принимает значения больше нуля. Здесь

$y = y_w(x)$  – уравнение стенки канала;  $M_u$  – число Маха, рассчитанное по продольной составляющей скорости;  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей.

В настоящей работе рассматривается процедура глобальных итераций по давлению, основанная на маршевом алгоритме [1]. Эта процедура позволяет отказаться от использования регуляризирующего множителя при продольной производной давления и получить решение в случае, если на некотором участке канала интеграл Пирсона  $\Pi < 0$ . Механизм передачи возмущений вверх по потоку обеспечивается противопоточной конечно-разностной аппроксимацией в области дозвукового течения производной от давления в уравнении для продольной составляющей скорости.

**Формулировка задачи.** Для моделирования развитого турбулентного течения вязкого совершенного газа в канале ( $\mu_t \gg \mu$ ) используется упрощенная система уравнений Навье – Стокса [1], включающая:

уравнения первой подсистемы

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\chi \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\kappa (\mu_t + \mu) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = & \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\kappa (\mu_t + \mu) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^\kappa \left( \left( \frac{1}{Pr_t} - 1 \right) \mu_t + \left( \frac{1}{Pr} - 1 \right) \mu \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial v_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v_t}{\partial y} = \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^\kappa \rho (C_1 v_t + v) \frac{\partial v_t}{\partial y} \right] + C_2 \rho v_t G + \\ + C_3 v_t \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - C_4 \rho v_t^2 \frac{G^2}{a^2} - \rho \frac{C_5 v_t^2 + C_6 v_t v}{S^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

уравнения второй подсистемы

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \kappa \frac{\rho v}{y} = 0, \quad (4)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\rho = \frac{P}{F(h)}, \quad F(h) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h, \quad (6)$$

где  $u, v$  – проекции вектора скорости вдоль осей  $X, Y$  (ось  $X$  направлена по оси канала или струи, а ось  $Y$  – перпендикулярно к ней),  $\rho$  – плотность,  $P$  – статическое давление,  $H = h + (u^2 + v^2)/2$  – полная энтальпия,  $h$  – статическая энтальпия,  $\mu_t$  – динамический коэффициент турбулентной вязкости,  $\mu$  – динамический коэффициент ламинарной вязкости,  $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля,  $Pr$  – ламинарное число Прандтля,  $\kappa = 0$  для плоского течения,  $\kappa = 1$  для осесимметричного течения,  $\chi$  – регуляризирующий множитель,  $\chi = \gamma M_u^2$  при  $M_u < 1$  и  $\chi = 1$  при  $M_u \geq 1$ .

В уравнении (3), которое представляет однопараметрическую модель турбулентности « $v_t - 90$ » [6],  $v_t$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости,  $a$  – скорость звука,  $S$  – минимальное расстояние до стенки,  $\nu$  – кинематический коэффициент ламинарной вязкости,  $C_k$  – эмпирические коэффициенты, которые вычисляются по формулам

$$C_2 = C_2' \left( \frac{y^4 G^2}{(30 v_t)^2 + y^4 G^2} \right)^\kappa \frac{v_t^2 + 11,2 v_t v + 12,8 v^2}{v_t^2 - 11,2 v_t v + 648 v^2};$$

$$C_1 = 2; \quad C_2' = 0,2; \quad C_3 = 0,7; \quad C_4 = 5; \quad C_5 = 3; \quad C_6 = 50,$$

$$\text{где } G^2 = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \kappa \left( \frac{v}{y} \right)^2$$

Характерной особенностью модели « $v_t - 90$ » является отказ от использования закона стенки, что позволяет вести расчет по этой модели во всей области. При этом на стенке при выполнении условий прилипания турбулентная вязкость обращается в нуль. Данная модель является универсальной и предназначена для расчета как пограничных слоев, так и струйных течений. Первое слагаемое в правой части (3) отвечает за диффузию турбулентной

вязкости, следующие два слагаемых – за ее порождение, предпоследнее слагаемое отвечает за учет сжимаемости среды, последнее – за профиль турбулентной вязкости в окрестности стенки.

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

при  $x = 0$  в струе  $u = u_a, T = T_a, P = P_a, v_a = 0, v_t = v_{ta}$ ;

в спутном потоке  $u = u_\infty, T = T_\infty, P = P_\infty, v_\infty = 0, v_t = v_{t\infty}$ ;

при  $x > 0$  на оси канала  $y = 0$ :  $\partial f_k / \partial y = 0$  для функций  $f_k = (u, T, P, v_t)$  и  $v = 0$ ; на стенке канала  $y = y_w(x)$ :  $u = v = v_t = 0, \partial T / \partial y = \partial P / \partial y = 0$ .

При решении первой подсистемы полагается, что статическое давление  $P$  и поперечная компонента скорости  $v$  известны. Тогда эта группа уравнений имеет параболический тип и допускает решение маршевым методом, например по неявной абсолютно устойчивой итерационной схеме типа Кранка – Николсона [7] с применением скалярной прогонки. Особенности реализации алгоритма расчета уравнений второго порядка, записанных в унифицированном виде, описаны в [8].

Отличительной особенностью при аппроксимации уравнений первой группы является использование на текущей глобальной итерации следующих аппроксимаций продольных производных давления:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j}^n = \frac{P_{i,j}^n - P_{i-1,j}^n}{\Delta x} \text{ при } u > a ;$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j}^n = \frac{P_{i+1,j}^{n-1} - P_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \text{ при } u < a , \quad (7)$$

где верхним индексом  $n$  обозначен номер глобальной итерации, нижний индекс  $i$  соответствует номеру маршевого сечения, а нижний индекс  $j$  – номеру расчетного узла.

Уравнения (4), (5), составляющие вторую подсистему, рассматриваются как уравнения относительно статического давления  $P$  и поперечной составляющей скорости  $v$ . При этом значения  $u, H, v_t$  в расчетных узлах текущего маршевого сечения полагаются известными, а плотность  $\rho$  определяется из уравнения состояния. Особенностью уравнений второй подсистемы является то, что это система уравнений первого порядка, которая должна удовлетворять краевым условиям для поперечной составляющей вектора скорости: на оси канала – условию симметрии, на стенке канала – условию прилипания. При сделанных предположениях вторая подсистема уравнений имеет гиперболический тип и может быть решена маршевыми методами.

Разностная аппроксимация уравнений первой и второй групп приводит к системе уравнений с трехдиагональными матрицами, которые можно решать методом скалярной прогонки [7].

Распространение возмущений в дозвуковых зонах вверх по потоку обуславливает продольный градиент давления в уравнении количества движения (1). Аппроксимация члена  $\partial P / \partial x$  в дозвуковой области течения «разностями вперед» (7) обеспечивает работу в численном алгоритме механизма передачи

возмущений. При этом для сохранения однонаправленного маршевого счета следует заранее задавать значения давления в узлах сетки впередистоящего  $(i + 1)$ -го сечения по отношению к рассчитываемому  $i$ -му маршевому сечению. Следовательно, при реализации метода глобальных итераций по давлению необходимо использовать распределение давления во всем поле течения, полученное в предыдущей итерации. Начальное распределение давления можно рассчитать, используя маршевый алгоритм [1]. В процессе расчета на каждой глобальной итерации определяется новое распределение давления, которое можно использовать для расчета продольного градиента давления, необходимого при следующем прохождении расчетной области. Такая итерационная процедура продолжается до получения сходимости. Метод глобальных итераций позволяет значительно сократить используемый объем памяти ЭВМ, так как не требует хранения всего поля течения во всей расчетной области, а лишь только поля статического давления.

**Сравнительные результаты параметров течения в канале.** С целью проверки описанного маршевого метода расчета и подтверждения его работоспособности были проведены расчеты и сравнения с имеющимися в литературе данными экспериментальных и численных исследований. В качестве тестовой задачи рассматривалась задача об истечении недорасширенной сверхзвуковой турбулентной струи из профилированного сопла в цилиндрический канал.

Влияние модели турбулентности и величины начальной турбулентности потока на характеристики течения при взаимодействии турбулентной сверхзвуковой осесимметричной струи с безграничным дозвуковым спутным потоком иллюстрирует рис. 1.

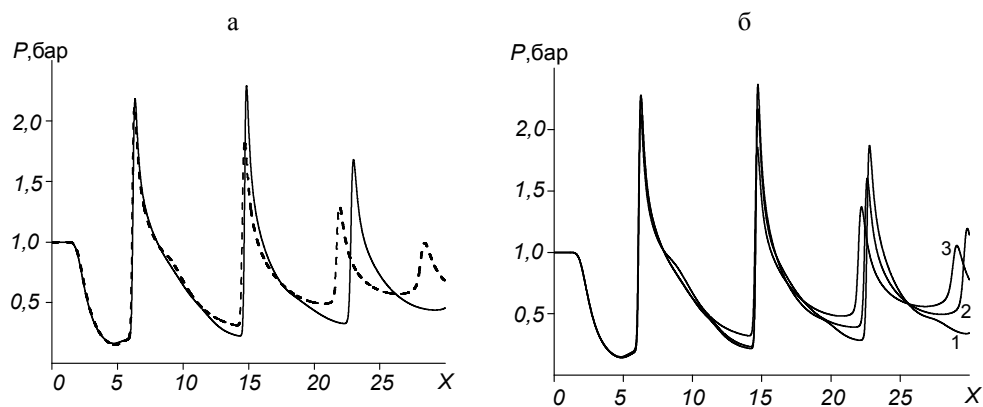


Рис. 1

Расчеты выполнены при следующих значениях определяющих параметров: числе Маха струи  $M_a = 2$ , статической температуре струи  $T_a = 300$  К и нерасчетности на срезе профилированного сопла  $n = P_a/P_\infty = 2$ ; числе Маха  $M_\infty = 0,2$  и статической температуре  $T_\infty = 300$  К в спутном дозвуковом потоке. Число Рейнольдса, рассчитанное по параметрам потока в струе на срезе сопла и радиусу сопла, принято равным  $Re_a = 10^4$ . Опорное значение начальной турбулентности потока равно  $\bar{v}_t = v_t/v_a = 100$  и определя-

ется как отношение коэффициента кинематической турбулентной вязкости в струе на срезе сопла к коэффициенту кинематической ламинарной вязкости в начальном сечении. При интегрировании уравнений для кинематического коэффициента турбулентной вязкости использованы предлагаемые авторами моделей оригинальные значения эмпирических коэффициентов.

На рис. 1а приведены расчетные распределения статического давления по оси струи для двух однопараметрических дифференциальных моделей турбулентности: сплошная кривая соответствует расчету с использованием модели турбулентности « $v_t - 90$ », штриховая кривая – модели турбулентности Секундова [9]. На рис. 1б показано влияние начальной турбулентности потока на распределение статического давления вдоль оси струи при расчете с использованием модели турбулентности « $v_t - 90$ ». Кривые 1 – 3 соответствуют значениям  $\bar{v}_t = 0,1; 1,0; 10$ .

Представленные на рис. 1 результаты расчетов свидетельствуют о влиянии выбора модели турбулентности и значения начальной турбулентности потока на характеристики течения вниз по потоку, приводя как к изменению амплитуды колебаний характеристик, так и к изменению фазы колебаний. Поэтому при проведении сравнительных тестовых расчетов этот факт необходимо учитывать.

Для верификации рассматриваемых в статье алгоритма и модели выбраны результаты расчетов работы [4], в которой рассмотрено истечение струи в канал квадратного поперечного сечения и использованы более полные параболизированные уравнения Навье – Стокса. Расчеты выполнены при следующих значениях определяющих параметров:  $M_a = 2$ ;  $T_a = 300$  К;  $n = 1,45$ ;  $Re_a = 10^4$ ;  $M_\infty = 0,05 \div 0,25$ ;  $T_\infty = 300$  К;  $P_\infty = 0,98$  бар. Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3.

На рис. 2 кривой со значками показано распределение статического давления по оси струи, рассчитанное данным методом для случая  $M_\infty = 0,25$ . Там же показаны расчетные распределения давления, заимствованные из работ [4] (сплошная линия) и [10] (штрихпунктирная линия). Штриховая линия соответствует экспериментальному распределению давления из [10].

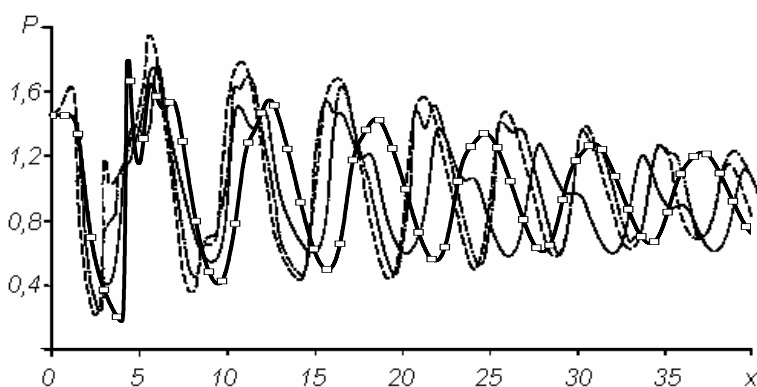


Рис. 2

Влияние скорости спутного дозвукового потока на распределение статического давления вдоль оси струи показано на рис. 3, на котором приведены результаты расчетов работы [4] и результаты настоящей работы (рис. 3а и 3б, соответственно, сплошные линии соответствуют  $M_\infty = 0,25$ ; штрихпунктирные –  $M_\infty = 0,1$ ; штриховые –  $M_\infty = 0,05$ ).

Из графиков, представленных на рис. 2, 3 следует, что результаты расчетов, выполненных описанным выше методом, согласуются с соответствующими расчетными и экспериментальными данными других авторов. Некоторые количественные расхождения в полученных результатах связаны с тем, что в [4] рассматривается истечение струи в канал квадратного поперечного сечения и используется алгебраическая модель турбулентности.

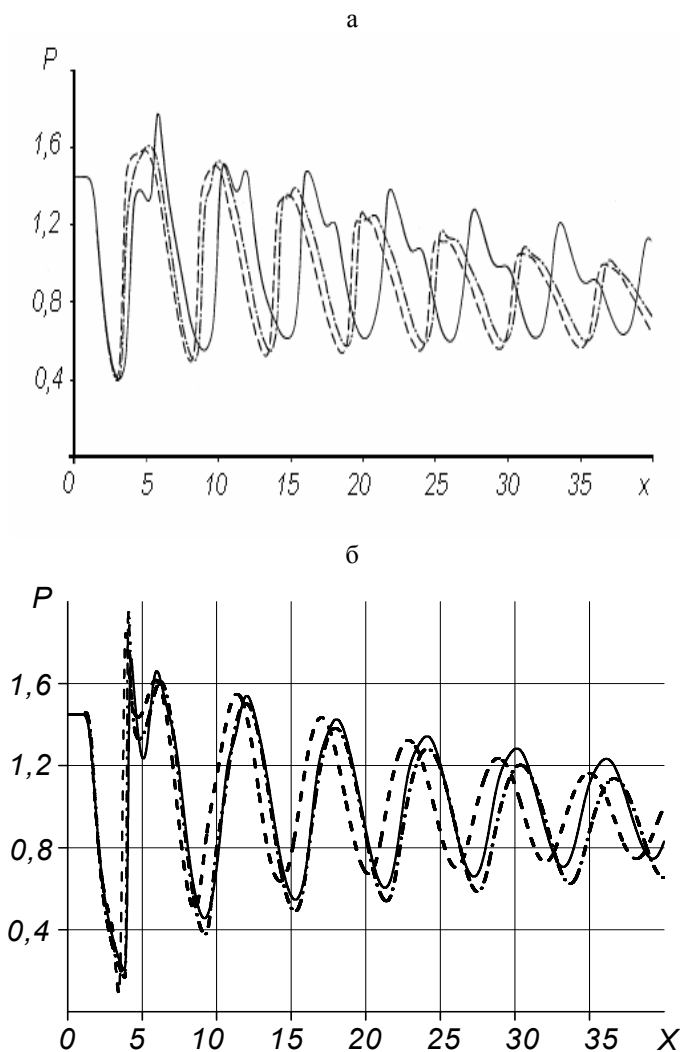


Рис. 3

При малой протяженности дозвуковых зон в исследуемом течении эллиптические эффекты передачи влияния вверх по потоку сравнительно малы и описанным в [1] алгоритмом удается получить решение за одно-единственное прохождение поля течения, т.е. маршевым методом. Однако в

случае, когда влияние распространения возмущений вверх по потоку велико, например из-за отрыва, наличия взаимодействия ударных волн и т. п., маршевые методы оказываются достаточно грубыми, так как для подавления неустойчивости используемые методы регуляризации решения приводят к большим ошибкам. В этих случаях можно использовать описанный выше метод глобальных итераций по давлению. Метод расчета, основанный на глобальных итерациях по давлению, позволяет отказаться от использования регуляризирующего множителя  $\chi$  при продольной производной давления в дозвуковой области течения и учесть передачу возмущений через дозвуковые зоны снизу вверх по потоку.

Результаты расчетов методом глобальных итераций поля течения в трубе постоянного поперечного сечения при взаимодействии турбулентной сверхзвуковой струи со спутным дозвуковым потоком иллюстрирует рис. 4, на котором показано влияние относительных размеров дозвуковой области течения на характеристики потока. На этом рисунке приведены распределения статического давления вдоль стенки трубы (а) и продольной составляющей вектора скорости на границе формирующегося на стенке пограничного слоя (б) при двух значениях относительного радиуса трубы  $\bar{y}_w = y_w/r_a$ . Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\bar{y}_w = 2$  и  $\bar{y}_w = 4$ . Сплошными линиями показаны распределения параметров после сходимости процесса глобальных итераций по давлению, штриховыми – начальные распределения, полученные маршевым методом [1] с использованием регуляризации. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров в струе и в спутном дозвуковом потоке на срезе сопла:  $M_a = 2$ ;  $T_a = 300$  К;  $P = 1$  бар;  $n = 2,0$ ;  $Re_a = 10^4$ ;  $M_\infty = 0,7$ ;  $T_\infty = 300$  К.

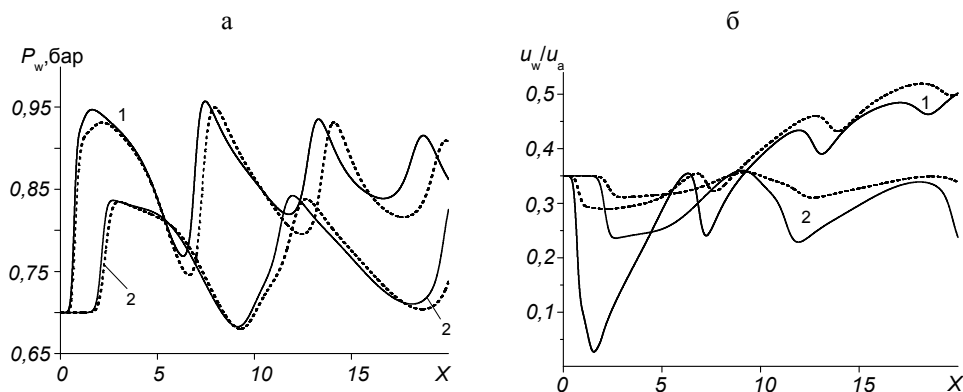


Рис. 4

Графики, представленные на рис. 4, иллюстрируют влияние глобальных итераций на расчетные зависимости характеристик течения. Видно (рис. 4а), что глобальные итерации слабо влияют на распределение давления вдоль стенки канала. Однако с увеличением расстояния от входного сечения это влияние возрастает. Существенное влияние оказывают глобальные итерации на распределение продольной скорости вдоль границы пограничного слоя (рис. 4б). Учет полного продольного градиента давления в дозвуковой области течения приводит к немонотонности скорости и увеличению амплитуды ее



колебаний. Эти особенности сильнее проявляются с уменьшением радиуса трубы, т.е. при относительно меньшей области дозвукового течения (кривая 1 на рис. 4б). Это вполне объяснимо, так как колебания параметров (давления, скорости), вызванные волновой структурой течения в сверхзвуковой подобласти, сильнее затухают с ростом поперечных размеров дозвуковой подобласти. Дальнейшее уменьшение радиуса трубы приводит к отрыву потока от стенки трубы и образованию локальных рециркуляционных зон. Получить решение задачи методом глобальных итераций при меньших значениях радиуса трубы и прежних значениях скорости спутного дозвукового потока на входе в трубу не удалось в силу появления в процессе итераций в области течения рециркуляционных зон.

**Выводы.** Предложен вариант алгоритма глобальных итераций по давлению для расчета прямого течения в канале при взаимодействии истекающей из профилированного сопла нерасчетной сверхзвуковой турбулентной струи со спутным дозвуковым потоком. Проиллюстрированы возможности метода глобальных итераций. При определенных начальных значениях параметров в струе и спутном потоке метод глобальных итераций позволяет получить сходящееся решение при незначительном количестве глобальных итераций, отличающееся от исходного начального приближения, полученного посредством маршевого алгоритма расчета работы [1]. Однако, в случае попадания интенсивного скачка на пограничный слой, сформировавшийся на стенках канала, получить сходящееся решение задачи при наличии области возвратного течения методом глобальных итераций по давлению не удалось. В дальнейшем для получения решения в таких случаях предполагается использовать нестационарные уравнения вязкого слоя и решать их методом установления по времени.

1. Тимошенко В. И. Маршевый расчет течения при взаимодействии сверхзвуковой турбулентной струи со спутным ограниченным дозвуковым потоком / В. И. Тимошенко, И. С. Белоцерковец // Вісник Дніпропетровського університету. – 2008. – Вып. 1, Т. 1, Механика. – С.15 – 23.
2. Родионов А. В. Новый маршевый метод расчета струй продуктов сгорания / А. В. Родионов // ЖВМ и МФ. – 2002. – Т. 42, № 9. – С. 1413 – 1424.
3. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа / В. И. Тимошенко. – Киев : Наук. думка, 1987. – 184 с.
4. Макашева А. П. Численные расчеты сверхзвуковых недорасширенных струй в спутном потоке с использованием параболизированных уравнений Навье – Стокса / А. П. Макашева, А. Ж. Найманов // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 54 – 63.
5. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен : В 2-х т. Т.2. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – 392 с.
6. Гуляев А. Н. К созданию универсальной однопараметрической модели турбулентной вязкости / А. Н. Гуляев, В. Е. Козлов, А. Н. Секундов // МЖГ. – 1993. – №4. – С. 69 – 81.
7. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
8. Тимошенко В. И. Газовая динамика высокотемпературных технологических процессов / В. И. Тимошенко. – Днепропетровск : Институт технической механики НАНУ и НКАУ, 2003. – 460 с.
9. Абрамович Г. Н. Турбулентные течения при взаимодействии объемных сил и неавтомоделности / Г. Н. Абрамович, С. Ю. Крашенинников, А. Н. Секундов. – М. : Машиностроение, 1975. – 94 с.
10. Абдол-Хамид К. С. Моделирование эффектов многомасштабной турбулентности в недорасширенных сверхзвуковых струях / К. С. Абдол-Хамид, Р. Г. Уилмот // Аэрокосмическая техника. – 1990. – № 7. – С. 43 – 52.

Ин-т техн. механики НАН Украины и НКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 03.04.09,  
в окончательном варианте 07.04.09