

В. А. Максимюк<sup>1</sup>, Е. А. Сторожук<sup>1</sup>, И. С. Чернышенко<sup>2</sup>

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup> desc@inmech.kiev.ua, <sup>2</sup> prikl@inmech.kiev.ua*

**Abstract:** A nonlinear deformation of the flexible composite shells with supported curvilinear holes under action of static loading is considered. A statement of problems of the mentioned class and a technique of their numerical solving with allowance for the finite deflections are given. For the orthotropic cylindrical shell with supported circular hole loaded by the uniform internal pressure, the distribution of stresses, strains, and displacements along the hole contour and in the zone of their concentration is studied. The findings are compared with solutions of corresponding linear problem and the shell with free hole. The results are analyzed.

**Key words:** geometrically nonlinear problem, composite shell, stress concentration, cylindrical shell, circular hole, finite deflections, internal pressure.

#### **Введение.**

Исследования напряженности и деформативности современных тонкостенных конструкций и их элементов (оболочек, пластин) в случае подкрепления контуров отверстий (вырезов) в них тонким стержнем (кольцом) представляют значительный интерес для инженерной практики.

Основные теоретические результаты по проблеме концентрации напряжений в изотропных и анизотропных оболочках с подкрепленными отверстиями при действии разного вида статических нагрузок получены на основе решения линейно-упругих задач и изложены в обобщающих монографиях и обзорных статьях [5, 9, 12, 16 и др.].

Большинство исследований по данной проблеме с учетом нелинейных факторов относится к решению осесимметричных задач [5, 11, 14].

Результаты решения нелинейных двумерных задач для оболочек с подкрепленными отверстиями получены только для оболочек, изготовленных из изотропных материалов. Так, в работе [2] изучено напряженно-деформированное состояние (НДС) ребристых пологих оболочек с подкрепленным прямоугольным отверстием при упруго-пластической стадии деформирования. Влияние конечных прогибов и пластических деформаций материала на распределение перемещений, деформаций и напряжений в области подкрепленного кругового отверстия на боковой поверхности цилиндрической оболочки исследовано в работе [9]. Числовые результаты решения физически и геометрически нелинейных задач для изотропной сферической оболочки с подкрепленным эллиптическим отверстием представлены в [9].

Ниже дана постановка геометрически нелинейных двумерных задач для произвольных тонких композитных оболочек с подкрепленными криволинейными (круговыми, эллиптическими) отверстиями и приведены основные соотношения. Изложена методика численного решения данного класса задач и представлены конкретные числовые результаты исследования нелинейного деформирования гибкой ортотропной цилиндрической оболочки с подкрепленным круговым отверстием при действии равномерного внутреннего давления.

### 1. Постановка задачи. Основные нелинейные соотношения.

Тонкую произвольную оболочку, ослабленную одним или несколькими отверстиями и находящуюся под действием поверхностных  $\{p_\alpha\} = \{p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_\gamma\}^T$  и краевых сил  $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ , отнесем к криволинейной ортогональной системе координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ . Предполагаем, что оболочка изготовлена из композитного материала (КМ). За координатную поверхность (поверхность приведения  $\gamma = 0$ ) примем срединную поверхность  $(\Sigma_0)$ . Контуры отверстий могут быть подкреплены кольцами или криволинейными стержнями (рис. 1).

При традиционном подходе оболочка с подкрепленными отверстиями рассматривается как конструкция, состоящая из собственно оболочки и подкрепляющих ее одномерных тонких стержней. НДС каждого из этих элементов определяется уравнениями соответствующей прикладной теории и имеет свои особенности. Поэтому при построении теории, описывающей НДС оболочек с подкрепленными отверстиями, возникают трудности, связанные с необходимостью учета совместности работы элементов различной мерности и удовлетворения контактных условий [5, 9]. Отметим, что такие же проблемы имеют место и при исследовании НДС ребристых оболочек [4, 7, 13, 17]. Ниже изложим подход к учету подкреплений контуров отверстий, который позволяет избежать указанных выше трудностей и прост в реализации.

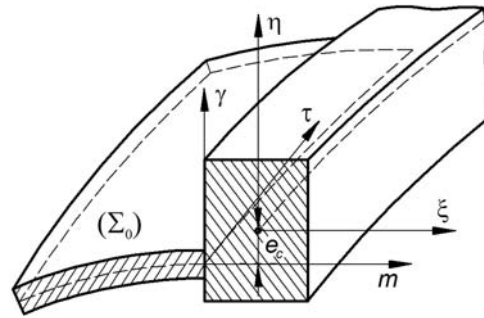


Рис. 1

Рассмотрим случай подкрепления контуров криволинейных отверстий тонкими стержнями, центры тяжести поперечных сечений которых не лежат в срединной поверхности оболочки (рис. 1). В произвольной точке сопряжения оболочки и подкрепления введем ортогональную систему координат  $(m, \tau, \gamma)$ , где  $m, \tau$  – внешняя нормаль и касательная к контуру отверстия, а  $\gamma$  – нормаль к срединной поверхности оболочки. Примем, что поперечное сечение подкрепляющего элемента лежит в плоскости  $(m, \gamma)$ . Эсцентриситет подкрепления обозначим  $e_c$ , а главные центральные оси инерции его поперечного сечения –  $\xi, \eta$ . Моделируем подкрепления фрагментами оболочек того же вида, что и основная оболочка. Примем, что срединные поверхности подкреплений эквидистантны срединной поверхности основной оболочки. За координатные поверхности подкреплений примем их эквидистантные поверхности  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N)$ , которые сопряжены со срединной поверхностью оболочки. Такой подход позволяет использовать одни и те же соотношения при моделировании деформирования как оболочки, так и криволинейных стержней (колец), а также учесть работу подкрепляющих элементов на растяжение (сжатие), кручение и изгиб в двух плоскостях. Аналогичный подход к расчету ребристых оболочек и тонкостенных конструкций ступенчато-переменной жесткости описан в работах [1, 3].

Пусть при повышенных уровнях нагрузки в оболочке и подкреплениях возникают большие (конечные) прогибы. Деформирование гибкой оболочки и тонких подкрепляющих элементов опишем соотношениями геометрически нелинейной теории непологих оболочек в квадратичном приближении, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява [5].

Выражения для компонент мембранной  $(\varepsilon_{ij})$  и изгибной  $(\mu_{ij})$  деформаций представим в векторной форме [15]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^*; \quad \varepsilon_{11}^0 = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{11}^* = \frac{1}{2} \varphi_{\alpha_1}^2; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^* ;$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^0 &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \varepsilon_{12}^* = \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2}; \quad \mu_{11} = \mu_{11}^0 = -\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \\
\varphi_{\alpha_1} &= \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad 2\mu_{12} = 2\mu_{12}^0 = -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} - \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \\
e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12} \quad (1 \rightarrow 2),
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $A_1, A_2$  – параметры Ламе;  $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n} = u_1\vec{i}_1 + u_2\vec{i}_2 + u_3\vec{i}_3$  – вектор перемещений точек координатной поверхности оболочки (подкрепления);  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$  – орты криволинейной ортогональной системы координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ ;  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  – орты глобальной декартовой системы координат  $(X, Y, Z)$ ;  $\vec{\varphi} = \varphi_{\alpha_1}\vec{e}_1 + \varphi_{\alpha_2}\vec{e}_2 = \varphi_1\vec{i}_1 + \varphi_2\vec{i}_2 + \varphi_3\vec{i}_3$  – вектор углов поворота касательных к координатным линиям; индексы «0» и «\*» вверху соответствуют линейной и нелинейной частям компонент деформации.

Внутренние усилия ( $T_{ij}$ ) и моменты ( $M_{ij}$ ), вводимые в теории оболочек, связаны с компонентами деформации законом Гука [5]. Принимая, что в каждой точке оболочки (подкрепления) имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности, соотношения упругости при произвольном выборе координатной поверхности записываем в таком виде:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= T_{ii}^0 + T_{ii}^*; \quad T_{12} = T_{12}^0 + T_{12}^*; \\
T_{ii}^0 &= C_{i1}\varepsilon_{11}^0 + C_{i2}\varepsilon_{22}^0 + C_{i3}\varepsilon_{12}^0 + K_{i1}\mu_{11}^0 + K_{i2}\mu_{22}^0 + K_{i3}2\mu_{12}^0; \\
T_{12}^0 &= C_{31}\varepsilon_{11}^0 + C_{32}\varepsilon_{22}^0 + C_{33}\varepsilon_{12}^0 + K_{31}\mu_{11}^0 + K_{32}\mu_{22}^0 + K_{33}2\mu_{12}^0; \\
T_{ii}^* &= C_{i1}\varepsilon_{11}^* + C_{i2}\varepsilon_{22}^* + C_{i3}\varepsilon_{12}^*; \quad T_{12}^* = C_{31}\varepsilon_{11}^* + C_{32}\varepsilon_{22}^* + C_{33}\varepsilon_{12}^*; \\
M_{ii} &= M_{ii}^0 + M_{ii}^*; \quad M_{12} = M_{12}^0 + M_{12}^*; \\
M_{ii}^0 &= K_{i1}\varepsilon_{11}^0 + K_{i2}\varepsilon_{22}^0 + K_{i3}\varepsilon_{12}^0 + D_{i1}\mu_{11}^0 + D_{i2}\mu_{22}^0 + D_{i3}2\mu_{12}^0; \\
M_{12}^0 &= K_{31}\varepsilon_{11}^0 + K_{32}\varepsilon_{22}^0 + K_{33}\varepsilon_{12}^0 + D_{31}\mu_{11}^0 + D_{32}\mu_{22}^0 + D_{33}2\mu_{12}^0; \\
M_{ii}^* &= K_{i1}\varepsilon_{11}^* + K_{i2}\varepsilon_{22}^* + K_{i3}\varepsilon_{12}^*; \quad M_{12}^* = K_{31}\varepsilon_{11}^* + K_{32}\varepsilon_{22}^* + K_{33}\varepsilon_{12}^* \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $C_{mn}, K_{mn}, D_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) – жесткостные характеристики оболочки (подкрепления), которые вычисляются по формулам:

$$C_{mn} = B_{mn}h; \quad K_{mn} = B_{mn}eh; \quad D_{mn} = B_{mn} \left( \frac{h^3}{12} + he^2 \right); \quad B_{mn} = B_{mn}(a_{kl}), \tag{3}$$

где  $h$  – толщина оболочки или высота подкрепления;  $e$  – отклонение срединной поверхности от координатной поверхности; величины  $a_{kl}$  выражаются через механические параметры материала оболочки или подкрепления.

## 2. Методика решения двумерных геометрически нелинейных задач для композитных оболочек с подкрепленными отверстиями.

Учитывая существенную нелинейность геометрических соотношений (1) и с целью отслеживания истории процесса деформирования оболочки с подкрепленными отверстиями, при построении разрешающей системы уравнений использована процедура пошагового нагружения и представления исходных уравнений в инкрементальной форме. Такая система получена из принципа возможных перемещений с помощью модифицированного метода Ньютона – Канторовича и метода конечных элементов (МКЭ) [9].

Вариационное уравнение принципа возможных перемещений для гибкой оболочки с подкрепленными отверстиями, записанное в конце  $n$ -го шага нагружения, имеет вид [9]:

$$\sum_{i=0}^N \iint_{(\Sigma_i)} \delta \{\Delta \varepsilon\}^T \left( \{\bar{m}\} + \{\Delta m^0\} + \{\Delta m^*\} \right) d\Sigma - \iint_{(\Sigma_p)} \delta \{\Delta u_\alpha\}^T \left( \{\bar{p}_\alpha\} + \{\Delta p_\alpha\} \right) d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \delta \{\Delta u_k\}^T \left( \{\bar{m}_k\} + \{\Delta m_k\} \right) ds = 0, \quad (4)$$

где  $\{u_\alpha\} = \{u, v, w\}^T$ ,  $\{u_k\} = \{u_m, u_\tau, w, -\varphi_m\}^T$  – векторы перемещений точек срединной поверхности и контура оболочки;  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$  – вектор деформаций;  $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$  – вектор внутренних силовых факторов;  $(\Sigma_p)$  – часть области  $(\Sigma_0)$ , на которой заданы поверхностные силы;  $(\Gamma_k)$  – часть контура срединной поверхности оболочки, на которой заданы краевые силы; символами  $\Delta f$  и  $\bar{f}$  обозначены приращение функции  $f$  на  $n$ -м шаге нагружения и ее значение в конце предыдущего шага.

В результате проведения линеаризации приходим к такому функционалу:

$$\begin{aligned} \Pi^\ell = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \iint_{(\Sigma_i)} \left( \{\Delta \varepsilon^\ell\}^T [D] \{\Delta \varepsilon^\ell\} + \{\Delta \varphi_\alpha\}^T [\bar{S}] \{\Delta \varphi_\alpha\} \right) d\Sigma + \\ & + \sum_{i=0}^N \iint_{(\Sigma_i)} \left( \{\Delta \varepsilon^\ell\}^T \{\Delta m^*\} + \{\Delta \varphi_\alpha\}^T [\Delta A_L]^T \{\Delta T\} \right) d\Sigma - \\ & - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u_\alpha\}^T \{\Delta p_\alpha\} d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\}^T \{\Delta m_k\} ds + \\ & + \sum_{i=0}^N \iint_{(\Sigma_i)} \{\Delta \varepsilon^\ell\}^T \{\bar{m}\} d\Sigma - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u_\alpha\}^T \{\bar{p}_\alpha\} d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\} \{\bar{m}_k\} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\{\Delta \varepsilon^\ell\}$  – линейные относительно приращений компонент векторов перемещений и углов поворота составляющие приращений деформаций;  $[\bar{S}]$  – симметричная матрица накопленных тангенциальных усилий;  $\{\Delta T\}$  – значения приращений компонент вектора внутренних усилий;  $[\Delta A_L]$ ,  $\{\Delta \varphi_\alpha\}$  – матрица и вектор приращений углов поворота;  $[D]$  – матрица жесткостей оболочки (подкрепления).

Линейную задачу решаем с помощью варианта метода конечных элементов (МКЭ), разработанного для расчета тонких композитных оболочек сложной геометрии с подкрепленными отверстиями.

Предложенная модификация МКЭ имеет ряд особенностей.

Во-первых, для компонент деформации используются соотношения в векторной форме. В этом случае при вычислении компонент тангенциальной деформации оболочки и подкреплений вектор перемещений точек координатной поверхности  $\vec{u}$  аппроксимируется билинейной функцией

$$u_k = \sum_{i=1}^4 u_k^{(i)} L_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где  $u_k^{(i)}$  – проекции вектора перемещений на оси глобальной декартовой системы координат в  $i$ -ом узле;  $L_i(\xi_1, \xi_2)$  – билинейные функции формы локальных координат  $\xi_1, \xi_2$ .

Во-вторых, вектор углов поворота касательных к координатным линиям  $\vec{\varphi}$  не определяется по формулам (1), как это принято в классическом МКЭ для тонких оболочек, а аппроксимируется биквадратичными полиномами серендипового типа, т.е.

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^8 \varphi_k^{(i)} K_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7)$$

с выполнением зависимостей (1) для углов поворота только в узлах конечного элемента (КЭ) [9]. Здесь  $\varphi_k^{(i)}$  – проекции вектора углов поворота  $\vec{\varphi}$  на оси глобальной декартовой системы координат в  $i$ -ом узле;  $K_i(\xi_1, \xi_2)$  – биквадратичные функции формы.

Такой подход к определению вектора углов поворота, по существу, является реализацией гипотез Кирхгофа – Лява в дискретной форме. Впервые метод дискретного наложения гипотез Кирхгофа – Лява был предложен в работе [10] и далее широко применялся для расчета тонких пластин и оболочек [6, 8].

Построенный криволинейный КЭ оболочки (подкрепления) удовлетворяет условиям непрерывности векторов перемещений и углов поворота, точно описывает поступательную часть перемещения КЭ как жесткого целого и имеет 20 степеней свободы.

Из условий стационарности дискретного аналога функционала (5) получим систему разрешающих уравнений для тонкой композитной оболочки с подкрепленными криволинейными отверстиями при учете конечных прогибов, которая в матричной форме для  $n$ -го шага нагружения имеет вид

$$([K_0] + [K_\varphi] + [K_\sigma]) \{\Delta q\} = \{\Delta P\} - \{\Delta \Omega\} + \{\Delta \Psi\}, \quad (8)$$

где  $[K_0]$  – матрица жесткости линейно-упругих оболочки и подкреплений;  $[K_\varphi], [K_\sigma]$  – матрицы влияния начальных углов поворота и напряжений;  $\{\Delta q\}$  – вектор приращений узловых степеней свободы;  $\{\Delta P\}$  – вектор нагрузок;  $\{\Delta \Omega\}$  – вектор нелинейностей;  $\{\Delta \Psi\}$  – вектор невязок уравнений равновесия в конце  $(n-1)$ -го шага нагружения.

Отметим, что в случае использования принципа возможных перемещений геометрические условия контакта оболочки и подкреплений

$$u_m^c = u_m; \quad u_\tau^c = u_\tau; \quad u_\gamma^c = w; \quad \theta_\tau^c = -\varphi_m \quad (9)$$

удовлетворяются на этапе составления выражения для полной энергии оболочки и подкрепляющих элементов (5), а статические условия контакта выполняются автоматически, т.е. следуют из условий стационарности полной энергии. В формулах (9) обозначено:  $u_m^c, u_\tau^c, u_\gamma^c$  – перемещения стержня на линии контакта;  $\theta_\tau^c, -\varphi_m$  – углы поворота поперечного сечения стержня и нормали  $\gamma$  к срединной поверхности оболочки вокруг касательной к контуру отверстия.

### 3. Апробация методики.

Эффективность разработанной методики проверена путем решения тестовых задач и сравнения полученных результатов с данными других авторов. В качестве тестового примера рассмотрено деформирование ортотропной сферической оболочки радиуса  $R$ , толщины  $h_0$  с подкрепленным круговым отверстием радиуса  $r_0$ . Срединная поверхность оболочки отнесена к полугеодезической системе координат  $(r, \theta)$  с началом в центре отверстия.

Исследования проведены для оболочки с геометрическими параметрами  $R/h_0 = 400$ ;  $r_0/h_0 = 30$  и характеристиками материала  $E_{rr} = 15$  ГПа;  $E_{\theta\theta} = 12$  ГПа;  $G_{r\theta} = 2,33$  ГПа;  $\nu_{\theta r} = 0,12$ .

Контур отверстия подкреплен кольцом прямоугольного поперечного сечения высотой  $h_c = 3h_0$ , шириной  $b_c = 3h_0$  и эксцентриситетом  $e_c = 0$ . Кольцо изготовлено из однородного изотропного материала с коэффициентом Пуассона  $\nu^c = 0,3$ .

Оболочка находится под действием равномерного внутреннего давления  $q = q_0 \cdot 10^5$  Па и перерезывающей силы  $Q_k = qr_0^2 / (2r_0 - b_c)$ , приложенной к оси кольца. Внешний контур оболочки ( $r = 6r_0$ ) – шарнирно закреплен.

В табл. 1 приведены значения относительных радиальных перемещений ( $\tilde{u} = u/h_0$ ), прогибов ( $\tilde{w} = w/h_0$ ), радиальных ( $\sigma_r = \sigma_r^0 \cdot 10^5$  Па) и окружных ( $\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cdot 10^5$  Па) напряжений на внешней ( $\tilde{\gamma} = \gamma/h_0 = 0,5$ ) и внутренней ( $\tilde{\gamma} = -0,5$ ) поверхностях оболочки на контуре отверстия, полученные с помощью разработанной методики (неклассического подхода). Расчеты выполнены в линейной постановке для интенсивности внутреннего давления  $q_0 = 1$  и ряда значений модуля Юнга материала подкрепления: 1)  $E^c = 0$  ( $N = 1$ ; свободное отверстие); 2)  $E^c = 1,5$  ГПа ( $N = 2$ ); 3)  $E^c = 15$  ГПа ( $N = 3$ ); 4)  $E^c = 40$  ГПа ( $N = 4$ ); 5)  $E^c = 80$  ГПа ( $N = 5$ ); 6)  $E^c = 15 \cdot 10^5$  ГПа ( $N = 6$ ; жесткое включение). Эта задача также была решена с использованием классического подхода, в котором деформирование подкрепления описывается теорией криволинейных стержней, основанной на гипотезах Кирхгофа – Клебша (табл. 2).

Таблица 1

Решение	$\tilde{\gamma}$	Неклассический подход					
		$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
$\tilde{u} \cdot 10^2$	0,0	6,939	5,971	2,946	1,531	0,765	-0,437
$\tilde{w} \cdot 10$	0,0	23,17	20,21	8,020	4,169	2,570	0,582
$\sigma_r^0$	0,5	-4	-7	223	184	125	-9
	-0,5	-2	72	73	218	335	559
$\sigma_\theta^0$	0,5	1205	1047	410	202	113	-1
	-0,5	739	649	335	209	146	54

Таблица 2

Решение	$\tilde{\gamma}$	Классический подход					
		$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
$\tilde{u} \cdot 10^2$	0,0	6,939	5,995	2,993	1,571	0,795	-0,436
$\tilde{w} \cdot 10$	0,0	23,17	20,30	8,154	4,249	2,618	0,581
$\sigma_r^0$	0,5	-4	-7	224	187	128	-9
	-0,5	-2	72	69	212	330	559
$\sigma_\theta^0$	0,5	1205	1052	418	207	116	-1
	-0,5	739	651	339	212	148	54

Из представленных данных следует, что наибольшее отличие максимальных напряжений, полученных с использованием обоих подходов, имеет место для подкрепления близкого к оптимальному ( $N = 4$ ) и не превышает 3%. Это свидетельствует об эффективности разработанной методики и возможности ее применения для расчета тонких оболочек с подкрепленными отверстиями.

#### 4. Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с подкрепленным круговым отверстием.

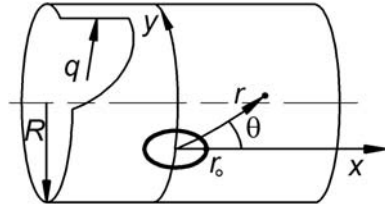


Рис. 2

Представим результаты исследования НДС возле подкрепленного кругового отверстия радиуса  $r_0$  на боковой поверхности гибкой ортотропной оргонопластиковой цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , которая нагружена внутренним давлением интенсивности  $q = q_0 \cdot 10^5$  Па (рис. 2). Введем на координатной поверхности прямоугольную декартовую  $(x, y)$  и полярную  $(r, \theta)$  системы координат.

Расчеты выполнены для таких геометрических параметров оболочки и подкрепления прямоугольного сечения:  $R/h_0 = 400$ ;  $r_0/h_0 = 30$ ;  $h_c = b_c = 3h_0$ ;  $e_c = 0$ .

Оси ортотропии материала цилиндра ориентированы так, что  $E_{xx} = 38,4$  ГПа;  $E_{yy} = 25,3$  ГПа;  $G_{xy} = 7,6$  ГПа;  $\nu_{yx} = 0,157$ .

Подкрепление изготовлено из изотропного материала с механическими характеристиками:  $E^c = 25$  ГПа;  $\nu^c = 0,3$ .

Принято, что отверстие закрыто крышкой, которая передает на ось подкрепления только действие перерезывающего усилия  $Q_k = qr_0^2 / (2r_0 - b_c)$ , а на достаточном расстоянии от контура отверстия имеет место безмоментное напряженное состояние.

На оболочку действует внутреннее давление интенсивности  $q_0 = 1,7$ . При проведении расчетов заданная величина нагрузки разбивалась на 20 шагов.

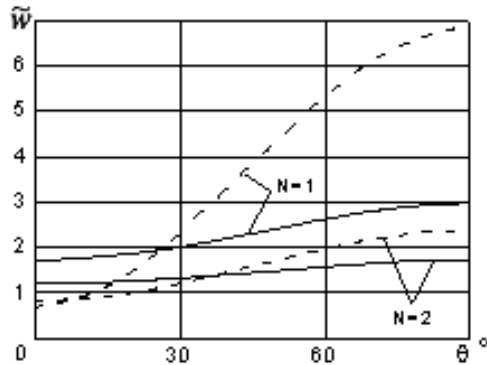


Рис. 3

Результаты решения линейной (ЛЗ) и геометрически нелинейной (ГНЗ) задач для цилиндрической оболочки со свободным ( $N = 1$ ) и подкрепленным ( $N = 2$ ) круговыми отверстиями получены в виде графиков и таблиц.

На рис. 3 показан характер изменения относительных прогибов ( $\tilde{w} = w/h_0$ ) вдоль контура отверстия. Здесь пунктирные линии соответствуют решениям линейной, а сплошные – геометрически нелинейной задач.

Таблица 3

N	$\theta$	$\tilde{\gamma}$	ЛЗ		ГНЗ	
			$e_r \cdot 10^2$	$e_\theta \cdot 10^2$	$e_r \cdot 10^2$	$e_\theta \cdot 10^2$
1	0°	0,5	-0,1606	0,9732	-0,1861	1,1520
		-0,5	-0,3322	2,1220	-0,1860	1,1710
	90°	0,5	-0,2120	0,8965	-0,1305	0,5266
		-0,5	0,2371	-1,0220	0,0181	-0,0956
2	0°	0,5	-0,0856	0,4950	-0,0392	0,5102
		-0,5	0,1477	0,6660	0,0902	0,5275
	90°	0,5	0,2312	0,3324	0,1317	0,2560
		-0,5	-0,1860	0,0108	-0,0906	0,0957

Таблица 4

N	$\theta$	$\tilde{\gamma}$	ЛЗ		ГНЗ	
			$\sigma_r^0$	$\sigma_\theta^0$	$\sigma_r^0$	$\sigma_\theta^0$
1	0°	0,5	-31	2457	-21	2911
		-0,5	4	5370	-9	2961
	90°	0,5	4	3443	-13	2019
		-0,5	-17	-3928	-12	-370
2	0°	0,5	-31	1248	163	1316
		-0,5	1006	1843	690	1443
	90°	0,5	816	1471	507	1104
		-0,5	-482	-73	-178	325

В табл. 3 приведены значения радиальных ( $e_r$ ) и окружных ( $e_\theta$ ) деформаций на контуре отверстия в узловых точках  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$  на внешней ( $\tilde{\gamma} = 0,5$ ) и внутренней ( $\tilde{\gamma} = -0,5$ ) поверхностях оболочки. Величины соответствующих напряжений ( $\sigma_r = \sigma_r^0 \cdot 10^5$  Па и  $\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cdot 10^5$  Па) в тех же точках представлены в табл. 4.

Из полученных результатов решения ЛЗ и ГНЗ следует, что как для оболочки со свободным, так и подкрепленным отверстиями, максимальные прогибы имеют место на контуре отверстия в точке  $\theta = 90^\circ$ , а максимальные деформации и напряжения – на контуре отверстия в точке  $\theta = 0^\circ$  на внутренней поверхности. Отметим, что для обоих вариантов расчета ( $N = 1, 2$ ) максимальными являются окружные деформации и напряжения.

Из анализа представленных данных следует, что подкрепляющее кольцо уменьшает максимальные прогибы, деформации и напряжения. Так, уменьшение максимальных прогибов составляет 65% и 42%, максимальных деформаций – 69% и 55%, максимальных напряжений – 66% и 51%, соответственно, для линейной и геометрически нелинейной задач.

Геометрическая нелинейность проявляется, в основном, в случаях неподкрепленного и подкрепленных кольцами малой жесткости отверстий. С увеличением жесткости подкрепления ее влияние уменьшается. Так, учет конечных прогибов в случае неподкрепленного отверстия приводит к уменьшению максимальных напряжений на 45%, максимальных деформаций на 45% и максимальных прогибов на 57%, а в случае подкрепления контура отверстия кольцом данной жесткости – на 22%, 21% и 28%, соответственно.

#### **Заключение.**

Таким образом, в работе дана постановка и изложена методика численного решения двумерных геометрически нелинейных задач для тонких композитных оболочек с подкрепленными криволинейными отверстиями, которая базируется на применении процедуры пошагового нагружения, модифицированного метода Ньютона – Канторовича и метода конечных элементов. Особенность предложенной методики состоит в использовании одних и тех же соотношений при моделировании деформирования как оболочки, так и подкрепляющих элементов. Эффективность описанного подхода проверена путем решения тестовых задач. С помощью разработанной методики исследовано нелинейное напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной цилиндрической оболочки с подкрепленным круговым отверстием при действии равномерного внутреннего давления. Числовые результаты представлены в виде таблиц и графиков.



РЕЗЮМЕ. Досліджено нелінійне деформування гнучких композитних оболонок з підкріпленнями криволінійними отворами при дії статичного навантаження. Дано постановку задач вказаного класу та методику їх чисельного розв'язання з врахуванням скінченних прогинів. Для ортотропної циліндричної оболонки з підкріпленням круговим отвором, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском, досліджено розподіл напружень, деформацій і переміщень вздовж контура отвору та в зоні їх концентрації. Отримані дані порівняно з розв'язками відповідних задач в лінійно-пружній постановці та для оболонки з вільним отвором. Проведено аналіз отриманих результатів.

1. Карлов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. – 288 с.
2. Ларионов А.А. Расчет пологой оболочки с подкрепленным прямоугольным отверстием в упруго-пластической стадии // Сб. науч. тр. Красноярск. политехн. ин-та. – 1975. – № 8. – С. 55 – 62.
3. Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
4. Теория ребристых оболочек / Амиро И.Я., Заруцкий В.А. – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т.2).
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т.1).
6. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff-Love constraints // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2005. – 64. – P. 1166 – 1206.
7. Bushnell D. Analysis of Ring-stiffened Shells of Revolution under Combined Thermal and Mechanical Loading // AIAA Journal. – 1971. – 9, N 3. – P. 401 – 410.
8. Dvorkin E.N., Bathe K.-J. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis // Engineering Computations. – 1984. – 1. – P. 77 – 88.
9. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 12. – P. 1269 – 1300.
10. Herrmann L.R., Campbell D.M. A finite-element analysis for thin shells // AIAA Journal. – 1968. – N 6. – P. 1842 – 1847.
11. Kaufman A., Spera D. Investigation of the elastic-plastic stress state around reinforced opening in a spherical shell // NASA Scientific and technical publications. – Washington, 1965. – P. 1 – 27.
12. Kharat A., Kulkarni V.V. Stress Concentration at Openings in Pressure Vessels – A Review // Int. J. of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. – 2013. – 2, N 3. – P. 670 – 678.
13. Maiborodina N.V., Meish V.F. Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs Under a Nonstationary Distributed Load // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 693 – 701.
14. Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 685 – 692.
15. Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 613 – 687.
16. Pilkey W.D., Pilkey D.F. Peterson's Stress Concentration Factors. – New-York: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 560 p.
17. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open Journal of Composite Materials. – 2012. – 2. – P. 61 – 86.

Поступила 28.12.2012

Утверждена в печать 29.05.2014