

А. А. Каминский

МЕХАНИКА ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ
С ТРЕЩИНАМИ: ТЕОРИЯ, ЭКСПЕРИМЕНТ (ОБЗОР)

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. The theoretical and experimental studies of the deformation and long-term fracture processes in the viscoelastic bodies owing to the slow subcritical growth of cracks are reviewed. This review is devoted to the study of subcritical growth of cracks with well developed process zones and the conditions, which result to this dangerous development, as well as the study of all stages of slow crack growth from the initiation to the dynamical development. The models, criteria and methods of investigation of processes of the long-term fracture in the viscoelastic bodies with through-thickness and internal cracks are analyzed. The experimental studies of the process zones in polymers using the physical and mechanical techniques as well as the theoretical studies of these zones on the base of models of mesomechanics, which taken into account the structural and rheological features of polymers are reviewed, too.

A special attention is paid to the studies of crack growth in anisotropic media, to the allowance for the factor of aging viscoelastic materials in the process of their long-term fracture, to the determination of the level of safe external loads, which do not initiate the crack propagation, to the studies of mechanism of the multi-side fracture of viscoelastic bodies weakened by several cracks and here, especially, to the regularities of processes that can lead to coalescence of cracks into the main-line crack what can be a cause of the whole body failure.

The methods and results of solving the 2D and 3D problems of the mechanics of long-term fracture of aging and non-aging viscoelastic bodies with cracks under action of constant and variable external loads, wedging, and biaxial loads are given.

long-term cracking of polymers.

Key words: subcritical crack growth, viscoelastic bodies, process zone, methods of solving the viscoelastic problems, anisotropy, multi-side fracture, service life, aging bodies,

Введение.

Настоящий обзор посвящен теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов деформирования и длительного разрушения вязкоупругих тел вследствие медленного докритического развития трещин.

Проведение таких исследований необходимо для определения трещиностойкости и долговечности таких конструкционных материалов как полимеры и композиты из них, а также горные породы и многие строительные материалы.

Разрушение этих материалов имеет свои специфические особенности, которые затрудняют моделирование сложного процесса трещинообразования и кинетики роста трещин в таких материалах, поскольку классический подход Гриффитса – Ирвина не подходит для описания роста трещин в вязкоупругих средах.

Следует отметить, что если в статьях и обзорах многих исследователей по этой проблеме акцентируется внимание исключительно на исследовании медленного докритического роста отдельных изолированных трещин с очень малыми зонами предразрушения (process zones), то в настоящем обзоре рассмотрен весь спектр условий, приводящих к этому докритическому развитию, его основные этапы и их вклад в долго-

вечность (service life) вязкоупругих тел с трещинами, имеющими развитые зоны предразрушения (process zones) в зависимости от их реологических и прочностных свойств.

Особое внимание в обзоре уделено работам по исследованию роста трещин в анизотропных средах, учету влияния фактора старения вязкоупругих материалов на процесс их длительного разрушения, определению величины безопасных нагрузок, ниже уровня которых не происходит докритический рост трещин, а также исследованию механизма многоочагового разрушения вязкоупругих тел, ослабленных несколькими коллинеарными трещинами, и, особенно, закономерностям их объединения в магистральные трещины. Эти исследования, несмотря на их актуальность, еще далеки от полного завершения и требуют дальнейшей разработки.

Ниже приведен обзор теоретических и экспериментальных исследований зон предразрушения (stage zones) в различных полимерах и закономерностей докритического роста трещин в полимерных материалах на основе моделей мезомеханики разрушения.

Настоящая статья состоит из *пяти разделов*. В *первом разделе* излагается краткий анализ основных направлений исследования механики деформирования и разрушения вязкоупругих тел, включая различные теории длительной прочности материалов, особенности применения методов механики разрушения при исследовании движения трещин в вязкоупругих телах, а также краткий обзор математических методов линейной теории вязкоупругости, применительно к средам с растущими трещинами.

Во *втором разделе* дан краткий обзор начального периода исследований докритического развития трещин в вязкоупругих телах на основе моделей с зонами предразрушения. Дан анализ моделей, критериев и методов исследований процессов разрушения нестареющих вязкоупругих тел с трещинами нормального отрыва (mode I).

В *третьем и четвертом разделах* статьи изложена теория докритического развития трещин нормального разрыва (mode I) в изотропных и анизотропных вязкоупругих телах, разработанная автором [13, 15, 20, 23], а также результаты, полученных на основе этой теории, в исследованиях большого класса задач, выполненных автором и его учениками в Институте механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

В *третьем разделе* исследованы нестареющие вязкоупругие тела, а в *четвертом* – стареющие вязкоупругие среды. Для исследования деформирования вязкоупругих материалов в большинстве работ применяется метод операторных цепных дробей [23, 85]. Исследованы плоские и пространственные задачи механики длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами при действии постоянных и переменных внешних нагрузок, расклинивании, а также рассмотрена проблема многоочагового разрушения, когда вследствие ползучести материала происходит процесс, ведущий к объединению коллинеарных трещин в большую магистральную трещину, которая может завершить полное разрушение вязкоупругого тела. Приведены результаты исследования процессов длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами при двухосном нагружении, когда внешние нагрузки действуют вдоль плоскостей расположения трещин.

Исследования, в основном, проведены для немалых зон предразрушения (process zones) на основе критерия критического раскрытия трещин. Дан анализ вклада различных периодов докритического развития трещин на долговечность вязкоупругих тел различной природы.

В *пятом разделе* представлен обзор теоретических и экспериментальных работ по исследованию докритического стабильного роста трещин в полимерных материалах. Изложены подходы мезомеханики разрушения с применением двухуровневых моделей разрушения вязкоупругих тел с трещинами, когда в зоне предразрушения учитывается микроструктура частично разрушенного материала. Приведен обзор зарубежных экспериментальных исследований микроструктуры зоны предразрушения физическими методами, а также экспериментальных исследований по этой проблеме, проведенных в Институте механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. Выполнен анализ закономерностей изменения параметров зоны предразрушения при стабильном росте трещины. На основе теории докритического развития трещин в вязкоупругих телах, изложенной в третьем разделе, изучен стабильный рост трещин в различных полимерах и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

В заключение следует отметить, что изложенные в обзоре модели, теории, методы не охватывают всего многообразия возможных механизмов длительного разрушения вязкоупругих сред, а изложенные в обзоре подходы к исследованию докритического стабильного роста трещин позволяют изучить наиболее характерные из механизмов разрушения изотропных и анизотропных вязкоупругих материалов.

§1. Общие вопросы механики деформирования и разрушения вязкоупругих тел.

1.1. Некоторые концепции и критерии механики длительного разрушения. Практика эксплуатации современных машин и сооружений, выполненных из полимеров или традиционных материалов, при экстремальных условиях их работы – высоких уровнях нагружения и температуры – привела к необходимости в последние годы пересмотреть концепцию о критическом (мгновенном) характере разрушения, поскольку имеется ярко выраженная зависимость разрушения от длительности и характера нагружения. В связи с этим разрушение начали трактовать как необратимый кинетический процесс накопления внутренних повреждаемостей материала [33, 45].

Наряду с этим было установлено, что в ряде случаев полному разрушению тела предшествует длительное развитие трещины [28, 34, 141], причем величина этого периода может составлять значительную часть долговечности тела, особенно если в теле имеются начальные дефекты в виде трещин или иных концентраторов напряжений. Такой вид длительного разрушения особенно характерен для вязких полимеров, а также металлических материалов при высоких температурах. Основными причинами медленного роста трещин являются ползучесть материала и накопление повреждений.

Следует отметить, что существует два альтернативных вида процессов длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами при докритическом уровне внешних нагрузок.

В первом случае вследствие ползучести материала происходит раскрытие трещины до некоторой критической величины (инкубационный период), после чего спонтанно начинается ее быстрый динамический рост, вплоть до полного разрушения тела [23, 26, 41].

Во втором случае после инкубационного периода начинается устойчивый рост трещины вплоть до достижения трещиной критической длины, когда начинается ее динамическое развитие [20, 36, 132].

На основе механики разрушения упругих и упругопластических тел с трещинами можно установить область безопасных геометрических и силовых параметров, при которых не происходит их развитие. Так, в рамках линейной механики разрушения для трещин нормального отрыва (mode I) такие безопасные параметры определяются из условия [75]

$$K_I < K_{Ic}, \quad (1.1.1)$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений; K_{Ic} – его критическое значение, а в случае применения критерия критического раскрытия трещины (COD), соответственно, из условия [136]

$$\delta_I < \delta_{Ic}, \quad (1.1.2)$$

δ_I – раскрытие трещины в ее вершине; δ_{Ic} – ее критическое раскрытие.

Если исключить переменное нагружение, вызывающее развитие усталостных трещин, то при постоянных нагрузках условия (1.1.1) и (1.1.2) должны гарантировать нераспространение трещин. Однако эти критерии основаны только на упругих и пластических свойствах материалов и не учитывают многих временных факторов. Одним из таких факторов является вязкоупругое деформирование материала. Так, при длительном действии постоянной нагрузки в большинстве твердых тел происходит ползучесть материала, вследствие чего имеющиеся в теле трещины раскрываются, а затем начинают расти при нагрузках, значительно меньших от безопасных, определяемых из условий (1.1.1) и (1.1.2).

Если для ряда материалов, к примеру высокопрочных металлов, при нормальных температурах такое уменьшение незначительно и уровень безопасных нагрузок может определяться соотношениями (1.1.1) и (1.1.2), то для таких материалов, как бетоны, горные породы, некоторые твердые полимеры и композиты на их основе, а также другие материалы, для которых характерна ограниченная ползучесть [23, 46], область безопасных нагрузок существенно уменьшается и условия (1.1.1) и (1.1.2) для трещин нормального отрыва (mode I) преобразуются к виду [20]

$$K_I < K_{Is} < K_{Ic}; \quad \delta_I < \delta_{Is} < \delta_{Ic}, \quad (1.1.3)$$

где K_{Is} , δ_{Is} – безопасные параметры для вязкоупругого материала, которые существенно зависят от его реологических свойств.

Таким образом, только при выполнении условий $K_I < K_{Is}$, $\delta_I < \delta_{Is}$ в вязкоупругих телах с ограниченной ползучестью нет роста трещин. Если же внешние нагрузки таковы, что характеристики K_I , δ_I находятся в интервалах [20]

$$K_{Is} < K_I < K_{Ic}; \quad \delta_{Is} < \delta_I < \delta_{Ic}, \quad (1.1.4)$$

то в вязкоупругих телах наблюдается медленный докритический рост трещин вплоть до достижения ими критического состояния, соответствующего критическим параметрам K_{Ic} , δ_{Ic} , при достижении которых начинается их спонтанное развитие (подробно этот подход изложен ниже в третьем разделе).

Отметим, что в случае неограниченной ползучести вязкоупругого материала (тела типа Максвелла) безопасный диапазон параметров отсутствует, т. е. $K_{Is} = 0$, $\delta_{Is} = 0$, и, следовательно, докритический рост трещины может происходить при сколь угодно малых нагрузках [20, 23].

Одной из основных целей исследований механики разрушения вязкоупругих тел является установление закономерностей между реологическими свойствами вязкоупругих материалов и процессом медленного докритического роста трещин разрушения в этих материалах. Условно можно отметить *два подхода* к анализу роста трещин.

В *первом (микроструктурном) подходе* главное внимание уделяется кинетике разрушения трещин в малой тупиковой зоне. Полагается, что вследствие значительной концентрации напряжений в этой зоне резко усиливаются процессы деформирования и разрушения. В связи с этим зачастую предполагают, что вне трещины материал упругий, а его реологические свойства проявляются в малой концевой зоне. Кинетику микроразрушений в концевой области обычно описывают либо уравнениями химической кинетики [3], либо с помощью кинетической концепции прочности С.Н. Журкова (критический анализ этой концепции сделан в работе [34]).

Второй (феноменологический) подход основан на методах механики сплошной среды и концепциях механики разрушения. При этом развитие трещины исследуется либо в вязкоупругой среде, либо в материале с накапливающимися малыми рассеянными повреждениями. В работе [45] исследованы задачи о распространении трещин в изотропном упругом материале с накапливающимися крайне малыми повреждениями в случае статического и циклического нагружений. Однако, большинство исследователей изучало кинетику роста трещин в вязкоупругих средах, основываясь на линейной теории вязкоупругости.

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать исследования докритического развития трещин вследствие ползучести материала при низком уровне нагрузок, то для значительного класса полимерных и композиционных материалов (бетонов, горных пород и др.) для описания деформирования пригодна линейная теория вязкоупругости, за исключением зон предразрушения у вершин трещин.

Исследования напряженно-деформируемого состояния вязкоупругого тела с движущимися в нем трещинами (разрезами) ведутся в, основном, с помощью двух методов: принципа соответствия [63] и метода Больцмана – Вольтерра [60, 135].

Исследования развития трещин в вязкоупругих телах начато во второй половине XX столетия (см. работы M.L. Williams [137], Г. Н. Савина, А.А. Каминского [130], M.P. Wnuk [140], W.G. Knauss [117] и др.). На раннем этапе исследований были попыт-

ки применить известные модели линейной механики разрушения, в первую очередь Гриффитса – Ирвина, при изучении развития трещин в вязкоупругих телах. Однако, как показано в работе [35], одного энергетического критерия Гриффитса оказалось недостаточно для описания кинетики роста трещин в вязкоупругих средах. Это связано с тем, что освобождающаяся энергия зависит от реологических свойств среды, что позволяет на основе концепции о постоянстве удельной энергии разрушения (Γ) и уравнения энергетического баланса получить формальным путем некоторое условие разрушения. Стало ясно, однако, что приток энергии к вершине трещины определяется значениями мгновенных модулей упругости. В среде, которая не обладает мгновенной упругой реакцией (вязкие жидкости, тело Фойгта и т. д.), поток энергии к вершине трещины при ее продвижении равен нулю. Следовательно, при $\Gamma > 0$ разрушение оказывается как бы невозможным. Этот вывод противоречит наблюдениям и свидетельствует о недостаточности схемы прямого переноса энергетического подхода на разрушение вязкоупругих тел.

Позднее, в работе [64], посвященной дискуссии по этой проблеме, авторы пришли к выводу, что более корректное решение этой задачи можно получить, если в отличие от модели трещины Гриффитса (разреза) с неограниченными на концах напряжениями ввести модель с требованием ограниченности напряжений, что можно реализовать путем введения зон предразрушения у вершин трещины. Подробное изложение соответствующих постановок задач и решений можно найти во втором и третьем разделах настоящей работы.

1.2. Некоторые подходы и методы теории линейной вязкоупругости. 1.2.1 Формулировка проблемы. Линейная теория вязкоупругости (или теория наследственной упругости) получила интенсивное развитие в шестидесятых и семидесятых годах этого столетия [9, 12, 46, 49, 63] в связи с запросами практики в исследовании реологических свойств новых конструкционных материалов таких, как полимеры и композиты на их основе, а также бетоны, армированные бетоны, горные породы.

Особый раздел в этой проблеме занимает теория линейной вязкоупругости Больцмана – Вольтерра [60, 135], основу которой составляет применение интегральных операторов Вольтерра. Эти исследования основаны на принципе Вольтерра [60], алгебре интегральных операторов Вольтерра [9, 46] и методах расшифровки функций от интегральных операторов, т.е. сведение этих функций к стандартному виду обычных интегральных операторов Вольтерра.

В. Вольтерра в работе [135] трактовал функцию от интегрального оператора как некоторый степенной ряд (ряд Тейлора), в котором вместо переменной подставлен соответствующий интегральный оператор. Как было им показано, в случае, если функция аналитична, такой операторный ряд является сходящимся. Если вязкоупругие тела однородны и изотропны, то соответствующие функции от интегральных операторов рациональны и в этих случаях нет принципиальных трудностей для решения соответствующих задач линейной теории вязкоупругости [46].

Напротив, в случае неоднородных или анизотропных тел эти функции нерациональны и при решении конкретных задач возникают значительные трудности в связи со слабой сходимостью их разложений в виде степенных рядов [46]. По этой причине многие исследователи не смогли получить эффективных решений краевых задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных тел.

С целью решения этой проблемы в Институте механики НАН Украины в последние годы был предложен новый метод решения задач линейной теории вязкоупругости, основанный на представлении нерациональных (функций от интегральных операторов) операторными цепными дробями [23]. В работах [10, 23, 98, 111] дано обоснование этого метода, когда в качестве операторов выбраны резольвентные интегральные операторы Вольтерра второго рода – разностного и неразностного типа. Предложенный метод вследствие высокой сходимости цепных дробей позволяет получить решения ранее неразрешимых задач теории вязкоупругости. На его основе исследовано ряд новых задач механики разрушения и теории концентрации напряжений для вязкоупругих анизотропных тел [85].

1.2.2 Основные соотношения и методы исследования. Линейные вязкоупругие среды – среды, для которых физические соотношения между напряжениями и деформациями записывают в виде

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}; \quad (1.2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = R_{ijkl}^* \sigma_{kl}. \quad (1.2.2)$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} – составляющие тензоров напряжений и деформаций; E_{ijkl}^* , R_{ijkl}^* – линейные интегральные операторы Вольтерра II рода;

$$E_{ijkl}^* \varepsilon_{kl} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) + \int_{t_0}^t E_{ijkl}(t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau;$$

$$R_{ijkl}^* \sigma_{kl} = R_{ijkl} \sigma_{kl}(t) + \int_{t_0}^t R_{ijkl}(t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau;$$

$E_{ijkl}(t)$ – тензор функций релаксации; $R_{ijkl}(t)$ – тензор функций ползучести; E_{ijkl} и R_{ijkl} – упругие постоянные анизотропного тела.

Соотношения типа (1.2.1) и (1.2.2) обычно применяются в качестве основных физических соотношений в механике полимеров и композиций из них (таких, как стеклопластики, углепластики и др.), в механике горных пород, в исследованиях ползучести некоторых видов металлических материалов при повышенных температурах. Для симметричных тензоров число различных функций $E_{ijkl}(t)$ соответственно $R_{ijkl}(t)$ равно числу независимых постоянных упругой анизотропии, т.е. 21.

Соотношения (1.2.1) и (1.2.2) получены на основе принципа Л.Больцмана [60], согласно которому физические соотношения теории линейной вязкоупругости имеют ту же форму, что и в линейной теории упругости, с тем лишь отличием, что упругие постоянные анизотропии E_{ijkl} и R_{ijkl} заменены линейными интегральными операторами E_{ijkl}^* и R_{ijkl}^* . Экспериментальное определение функций $E_{ijkl}(t)$ и $R_{ijkl}(t)$ связано с большими трудностями и выполняется, в основном, для анизотропных сред, в которых имеется определенная симметрия механических свойств, что влечет за собой уменьшение числа независимых функций $E_{ijkl}(t)$ и $R_{ijkl}(t)$.

1.2.3. Принцип Вольтерра. В работе Вольтерра [135] отмечено, что при решении задач линейной теории вязкоупругости (наследственной упругости) операции, связанные с решением дифференциальных уравнений теории, и операции интегрирования по времени, связанные с вычислением операторов Вольтерра, могут выполняться в произвольном порядке. Отсюда вытекает следующее правило, которое называют принципом Вольтерра.

Для решения задач, вязкоупругости необходимо построить решение задачи линейной теории упругости и в окончательном результате заменить упругие постоянные операторами, расшифровав полученные комбинации операторов или функции от операторов.

В сороковые – пятидесятые годы, когда теория вязкоупругости получила новое развитие в работах американских авторов [63, 68, 69], для решения задач вязкоупругости широкое распространение получил метод, основанный на применении преобразования Лапласа. Для него был сформулирован принцип соответствия, который, по существу, представляет собой простую перефразировку принципа Вольтерра. Выполнив преобразования Лапласа над уравнениями равновесия, соотношениями связи между деформациями и напряжениями, соотношениями связи между деформациями и перемещениями и граничными условиями, получим для изображений систему уравнений, совпадающую с системой уравнений теории упругости. Ее решение не отлича-

ется от решения задачи обычной теории упругости: изображения напряжений и перемещений оказываются явно выраженными через изображения заданных на границе усилий, перемещений и функций вязкоупругости. Последний этап решения вязкоупругой задачи будет заключаться в том, чтобы перейти от изображений к оригиналам. Эта процедура повторяет ту, которая предписывается принципом Вольтерра, но в других терминах [63].

Грэхем [68, 69] обосновал применимость принципа соответствия для некоторых типов задач вязкоупругости, граничные условия которых изменяются во времени. В этих работах Грэхем показал, что принцип соответствия можно применять при исследовании напряжений и деформаций монотонно растущей трещины. Если же длина трещины убывает со временем, то, как следует из работы [69], принцип соответствия неприменим. Основанием для применения принципа Вольтерра является независимость операций по координатам и времени в уравнении состояния вязкоупругого тела. Однако, разделение пространственных и временных операций в уравнениях вязкоупругости не является достаточным критерием применимости принципа Вольтерра уже хотя бы потому, что при этом не учитываются условия на границе.

Ограничение применения принципа Вольтерра, как и принципа соответствия, основанного на преобразовании Лапласа, состоит в следующем. В каждой точке поверхности тела должно быть задано либо усилие, либо перемещение, либо какая-нибудь комбинация этих величин, но тип граничных условий не должен меняться [49, 68]. Если же граничные условия изменяются, то принцип Вольтерра может оказаться неприменимым.

В работах [23, 48] исследована применимость принципа Вольтерра при определении напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела с движущейся трещиной. Установлено, что для постоянных зон предразрушения принцип Вольтерра применим, если трещина растет монотонно со временем. Если же область приложения внешних нагрузок не изменяется со временем, этот принцип применим при любом изменении длины трещины. Для модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, наряду с выполнением условий применимости принципа Вольтерра, необходимо выполнение дополнительного условия о монотонном росте концевой зоны.

Математическое обоснование принципа Вольтерра рассмотрено в работах [9, 46].

1.2.4 Рациональные функции от операторов. В общем случае решение краевой задачи линейной теории вязкоупругости для однородных тел $f(x_j, t)$ имеет вид

$$f(x_j, t) = F(R_j^*)g(x_j, t), \quad (1.2.3)$$

где $g(x_j, t)$ – внешнее воздействие; $F(R_i^*)$ – функция операторов R_i^* , смысл которой нужно расшифровать, так как она записана формально – заменой упругих характеристик R_i на соответствующие вязкоупругие операторы R_i^* .

Если F представляет собой рациональную функцию от резольвентных операторов R_i^* , то ее расшифровку проводят с использованием алгебры резольвентных операторов [9, 46].

1.2.5 Нерациональные функции от операторов. Если F является нерациональной (иррациональной, трансцендентной и т.п.) функцией от резольвентного оператора R^* , то ее расшифровка традиционно [12, 46] проводится при помощи степенного ряда

$$F(\kappa R^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} (\kappa R^*)^n; \quad (1.2.4)$$

$F^{(n)}(0)$ – n -я производная функции F по R^* в нуле; $(R^*)^n$ – n -я степень оператора R^* , представляющая собой оператор, ядро которого итерировано $n-1$ раз.

В этом случае решение вязкоупругой задачи будет иметь вид

$$f(x_j, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} (\varkappa R^*)^n g(\varkappa R^*). \quad (1.2.5)$$

В ряде работ [12, 46] отмечается, что ряд (1.2.5) сходится медленно, вследствие чего для получения достаточно точного решения следует сохранить большое число членов (иногда несколько сотен). Это приводит к громоздким вычислениям, причем последние необходимо проводить при очень большой точности, что не всегда возможно или приемлемо. Поэтому для практических целей пытаются избежать расшифровки $F(\varkappa R^*)$ по формуле (1.2.4). Так, в работах [12, 20, 46] вводятся различные аппроксимации. Однако применимость последних существенно ограничена и расшифровка нерациональной функции F от резольвентного оператора R^* по формуле (1.2.4) является единственным выходом при построении решения рассматриваемой вязкоупругой задачи. Если F – функция не одного, а нескольких операторов R_i^* , то вычисления становятся ещё более громоздкими, чем в случае одного оператора. И, наконец, расшифровка нерациональной функции F от операторов R_i^* по (1.2.4) применима лишь для аналитических функций F , причем в результате расшифровки получается выражение $F(\varkappa_i R_i^*)$, которое выходит из класса резольвентных операторов R_i^* . В тех случаях, когда расшифровка нерациональных функций от резольвентных операторов является промежуточным этапом в процессе построения решения вязкоупругой задачи, этот выход весьма нежелателен.

Для устранения этих недостатков расшифровки нерациональных функций от операторов в монографии [23] предлагается использовать новый метод операторных цепных дробей, который излагается ниже.

1.2.6 Метод операторных цепных дробей (для операторов резольвентного типа).

В работах [23, 85, 98, 111] предложен и обоснован новый метод для решения краевых задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных тел, который позволяет эффективно разрешить проблему расшифровки нерациональных функций от интегральных операторов Вольтерра.

Вместо введенного В. Вольтерра определения функции от интегральных операторов как некоторого операторного степенного ряда (аналога ряда Тейлора) [135], предлагается представлять эту функцию в форме нового математического объекта – операторной цепной дроби (функционала) [23].

С помощью формулы Thiele [76] функция от интегральных операторов $F(R_i^*)$ представима в виде цепной дроби от этих операторов, т.е.

$$F(\varkappa_i R_i^*) = F^0 \left[1 + \underset{m=1}{\overset{\infty}{K}} \frac{c_m \varkappa_i R_i^*}{1} \right] = F^0 \left[1 + \frac{c_1 \varkappa_i R_i^*}{1 + \frac{c_2 \varkappa_i R_i^*}{1 + \frac{c_3 \varkappa_i R_i^*}{1 + \dots}}} \right]. \quad (1.2.6)$$

Это позволяет вместо слабо сходящихся операторных рядов ввести в рассмотрение быстро сходящиеся цепные дроби от резольвентных интегральных операторов.

Такой подход к расшифровке нерациональных функций от резольвентных операторов позволяет представить $F(\varkappa_i R_i^*)$ в виде линейной комбинации резольвентных операторов R^* . При этом имеет место интерполяционный процесс, однако в этом случае достаточно нескольких интерполяций, ввиду очень быстрой сходимости цепных дробей [76]. Кроме того, выражение для $F(\varkappa_i R_i^*)$ в этом случае остается в классе резольвентных операторов R_i^* . И, наконец, определение нерациональной функции от резольвентного оператора в виде цепной дроби является более общим по сравнению с определением в виде степенного ряда (1.2.5), поскольку оно применимо как для ана-

литических функций, так и для неаналитических. Причем, для аналитических функций оба определения, как следует из работ [10, 85], эквивалентны.

Этот метод был эффективно применен в работах, анализ которых проведен в третьем и четвертом разделах, для исследования развития трещин в стареющих и нестареющих анизотропных вязкоупругих телах.

В заключение отметим, что в последние годы разработаны эффективные методы исследования для нестареющих вязкоупругих тел на основе преобразования Лапласа [63], однако эти методы не позволяют исследовать стареющие вязкоупругие тела, в то же время метод операторных цепных дробей способен решить эту проблему (см. раздел 4).

§2. Начальный период исследований докритического развития трещин в вязкоупругих телах на основе моделей трещин с зонами предразрушения. 2.1. Модели, критерии и методы исследования процессов разрушения нестареющих вязкоупругих тел с трещинами нормального отрыва (mode I). Многочисленные экспериментальные исследования [27, 28, 32, 34, 103, 139] показывают, что впереди фронта трещины образуются зоны предразрушения (process zones), которые затем перемещаются вместе с фронтом трещины. Образование зон предразрушения вызвано высоким уровнем напряжений у фронта трещины. Материал в зоне предразрушения находится в полуразрушенном состоянии (к примеру, «трещины серебра» в полимерах, в металлах – в состоянии деструкции). В волокнистых композитах эта зона представляет собой клиновидную область у фронта трещины, в которой разрушено связующее и часть армирующих волокон; берега этой зоны связаны неразрушенными волокнами.

Форма зоны предразрушения, ее структура и размеры имеют существенное значение для правильного описания механизма разрушения. Как показали исследования последних лет, применение моделей мезомеханики разрушения, учитывающих зоны предразрушения, оказалось наиболее эффективным для описания развития трещин в вязкоупругих телах. Эти модели еще называют двухфазными, так как материал претерпевает две фазы разрушения, в отличие от однофазных моделей типа Гриффитса – Ирвина, где сплошной материал в процессе разрушения резко (без переходной зоны) переходит в разрушенное состояние. К двухфазным относятся модель Леонова – Панасюка [37, 42], модель Дагдейла [67], РС модель [13, 48] и др. Выбор той или иной модели разрушения для описания роста трещин в вязкоупругих телах обуславливается, прежде всего, физическими и механическими свойствами материала. Так, если для описания процесса разрушения вязкоупругопластических (слабоупрочняющихся) тел удобно выбрать модель Дагдейла [67], полагая напряжения в зоне предразрушения постоянными и равными пределу текучести ($\sigma = \sigma_T$), то при разрушении многих полимеров и волокнистых композиций на их основе необходимо применять модифицированную модель Леонова – Панасюка [20], основанную на постоянстве размера зоны предразрушения, или более общую РС модель [13, 48]. Это утверждение теоретически и экспериментально обосновано в монографиях [27, 28] и статьях [29, 94].

Рассмотрим основные работы, посвященные исследованию докритического развития трещин в вязкоупругих телах на основе моделей трещин с зонами предразрушения.

В начальный период развития механики длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами, имеющими process zones, исследователи уделяли внимание различным этапам развития трещин (в основном, трещин нормального отрыва).

Как известно, характер развития трещин в упругих телах может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Критерии, определяющие характер развития трещин, приведены, например, в монографии [54].

Отметим, что рост неустойчивых трещин в вязкоупругих телах представляет большой практический интерес (по сравнению с развитием устойчивых), поскольку он приводит к достижению критического размера трещины и последующему ее динамическому росту вплоть до полного разрушения вязкоупругого тела [20, 23, 83].

Развитие неустойчивой трещины в этом случае состоит из следующих этапов:
инкубационного, когда трещина раскрывается, но не растет;
начального, когда трещина начинает движение;
основного, когда трещина медленно растет вплоть до достижения критического размера, когда начинается ее динамический рост.

Суммарная длительность этих периодов и определяет величину долговечности вязкоупругого тела с трещиной. Знание долговечности представляет большой практический интерес.

Однако, в начальный период многими авторами рассмотрены только отдельные этапы развития трещин. В большинстве работ этого периода [132] исследован лишь основной период медленного роста трещины в предположении, что его длительность близка к величине долговечности (service life). В других исследованиях [13, 14, 130] рассмотрены только начальные периоды развития трещины.

Позднее в работах [20, 23] было показано, что для вязких нежестких (soft) вязкоупругих тел с макротрещинами, когда размер зоны предразрушения мал относительно длины трещины, длительность периода медленного роста трещины действительно близка к долговечности вязкоупругого тела. Напротив, для жестких (hard) вязкоупругих тел теоретические и экспериментальные исследования [20, 26, 28, 41] показали, что при окончании инкубационного периода практически резко начинается быстрый динамический рост трещины и поэтому длительность этого периода практически определяет долговечность вязкоупругого тела.

Отметим, что, в общем случае, для определения долговечности необходимо определить длительность всех периодов докритического развития трещины в вязкоупругом теле, что было сделано в работах [20, 23].

Работа Г.Н. Савина и А.А. Каминского [130], опубликованная в 1967 году, является одной из первых работ в механике разрушения вязкоупругих тел, в которой предложена дискретная модель зоны предразрушения у края трещины, моделирующей craze zone в полимерном материале. В этой работе впервые для исследования развития трещины в вязкоупругом теле применен критерий критического раскрытия трещины (COD) и получено уравнение для определения продолжительности инкубационного периода развития трещины и, соответственно, времени ее старта (mode I crack initiation). Более подробно эта модель будет описана в пятом разделе этого обзора.

В статьях [13, 14], опубликованных сразу после этой работы, предложены модификации указанной выше модели применительно к исследованию начальных периодов развития трещин с немалыми зонами предразрушения (craze zones) в вязкоупругих полимерных материалах и исследована кинетика их развития в начальный период.

В работе А.А. Каминского [13] предложена реологическая структурная модель трещины в полимерном материале (РС модель). Позже в работе [48] в рамках этой модели описано докритическое развитие трещины с немалой зоной предразрушения в вязкоупругом полимерном материале на всех этапах ее развития. Установлены закономерности развития характеристик зоны предразрушения в полимерах. (Более подробно РС модель рассмотрена в пятом разделе этой статьи).

В работах Б.В. Кострова, Л.В. Никитина и Л.М. Флитмана [35, 120] в рамках модели Леонова – Панасюка и критерия критического раскрытия трещины (COD) получено дифференциальное уравнение, описывающее рост трещины нормального разрыва с очень малой концевой зоной в вязкоупругой среде. Предполагается, что трещина растет с постоянной скоростью. В работах [36, 120] в той же постановке подробно исследован рост изолированной прямолинейной трещины в бесконечной вязкоупругой плоскости при длительном действии постоянных растягивающих напряжений «на бесконечности» (вязкоупругий аналог задачи Гриффитса).

Задача исследована в квазистатической постановке. Рассмотрены два этапа в развитии трещины. Инкубационный (начальный) этап, во время которого происходит раскрытие трещины без ее роста, и период медленного роста трещины вплоть до начала ее динамического развития. При исследовании кинетики роста трещины рассмотрен только случай, когда напряжения σ в концевой зоне значительно превосходят внешние нагрузки P_0 , т. е. когда концевые зоны трещины очень малы.

В качестве примеров исследован рост трещин в материалах, описываемых моделями Максвелла, Фойгта и Кельвина (стандартное линейное тело). В заключение рассмотренная задача обобщается на пространственный случай. Указывается, что полученные результаты позволяют решить задачу о росте дискообразной трещины в вязкоупругом массиве (вязкоупругий аналог задачи Зака). В случае вязкоупругого аналога задачи Гриффитса для тела Максвелла получена простая формула

$$t^* = \frac{24\sigma^2(\gamma_0 + \tau)}{\pi^2 P_0^2} \left(\frac{P_*^2 - P_0^2}{P_0^2} - \ln \frac{P_*^2}{P_0^2} \right), \quad (2.1.1)$$

(σ – напряжения в концевой области; γ , τ – реологические параметры; P_0 – интенсивность внешних нагрузок; P_* – критическая нагрузка Гриффитса), определяющая долговечность t^* вязкоупругого тела с трещиной.

Исходя из модели трещины Дагдейла и энергетического критерия, М. Внук [140] представил уравнение, описывающее докритический рост трещины в вязкоупругом теле в следующем виде:

$$M(P, l, dP/dl) + G(P, l) = G_c / \Psi(\Delta/l). \quad (2.1.2)$$

Здесь M – интегродифференциальный оператор, описывающий медленный рост трещины; Ψ – функция ползучести; G – поток энергии в вершину трещины, отнесенный к единице площади трещины; G_c – критическое значение величины G ; P – параметр внешнего нагружения; Δ – размер концевой зоны; l – длина трещины; \dot{l} – скорость роста трещины. Для плоской модели пластической зоны у конца трещины имеем

$$M = 2\sigma \frac{dP}{dl} \frac{\partial}{\partial l} \int_l^a v(x, P, l) dx; \quad G = \sigma \delta_* + \sigma \frac{\partial}{\partial l} \int_l^a v(x, P, l) dx.$$

Здесь $a = l + \Delta$; δ_* – критическое раскрытие трещины в вершине. Для случая, когда все вязкоупругие свойства тела сосредоточены в малой концевой зоне, М. Внук [140, 141] пренебрегает оператором M и рассматривает упрощенное уравнение

$$R(t)\Psi(\delta t) = R_c, \quad (2.1.3)$$

$$\left(R(t) = \frac{\pi K_I^2}{8\sigma^2}; \quad R_c = \frac{\pi K_c^2}{8\sigma^2} \right). \quad (2.1.4)$$

Решение уравнения (2.1.3) для линейного стандартного тела [46] в случае одноосного растяжения плоскости с трещиной (аналог задачи Гриффитса) имеет вид [141]

$$t - t_* = \frac{l_0 \tau_2}{\Delta} \left[x \ln \frac{x\beta}{(1+\beta)x-n} + \frac{n}{1+\beta} \ln \frac{(1+\beta)x-n}{1+\beta-n} + \ln \frac{1+\beta-n}{\beta} \right]. \quad (2.1.5)$$

Здесь t_* – начальный момент движения трещины; l_0 – начальная длина трещины; τ_2 – время релаксации материала; $\beta = E_1/E_2$ (E_1 и E_2 – параметры линейного стандартного тела); $n = (P_*/P)^2$; P_* – критическая нагрузка Гриффитса; $x = l/l_0$.

Долговечность пластины с трещиной Δt_* определится из (2.1.5):

$$\Delta t_* = t_{**} - t_* = \frac{\tau_2 n}{\Delta} \left[\frac{1}{1+\beta} \ln \frac{\beta n}{1+\beta-n} + \frac{1}{n} \ln \frac{1+\beta-n}{\beta} \right], \quad (2.1.6)$$

где t_{**} – время, соответствующее началу быстрого динамического роста трещин. В работе [142] сравниваются зависимости (2.1.5) и (2.1.6) с экспериментальными, полученными для вязкоупругого полиуретана (солитана 113).

В работе [142] для исследования медленного роста трещины предложен критерий «завершающего натяжения»

$$v(x_p, t) - v(x_p, t - \delta_t) = \varepsilon_c = \text{const}. \quad (2.1.7)$$

Согласно этому критерию приращение нормального перемещения v в некоторой точке P перед концом трещины сохраняется постоянным в течение медленной стадии роста трещины. Как видно, этот критерий близок к критерию Мак-Клинтока, однако отличается от критерия предельного раскрытия трещин, так как в нем ограничение накладывается не на смещение, а на разность смещений.

Уравнение докритического роста трещины на основе критерия (2.1.7) запишем в виде

$$R(t) + \int_{t_0}^t \Psi(t-\tau) \left\{ \sqrt{R(\tau)(R(\tau)-L)} - \frac{L}{2} \ln \frac{\sqrt{R(\tau)} + \sqrt{R(\tau)-L}}{\sqrt{R(\tau)} - \sqrt{R(\tau)-L}} \right\} d\tau = R_c, \quad (2.1.8)$$

где $R(\tau)$ – длина пластической зоны в момент времени τ ; $L = l(t) - l(\tau)$; t_0 обозначает момент времени, в который разрушается материальный элемент в точке P . Отметим, что R и R_c определяются из соотношений (2.1.4). В случае, если $R/l \ll 1$ и значение R не изменяется в интервале времени $[t, t_0]$ и уравнение (2.1.8) преобразуется в уравнение (2.1.3).

Предложенная М. Внуком модель разрушения является более сложной, чем обычная модель Леонова – Панасюка и ее обобщение на случай длительного разрушения вязкоупругих тел.

В работе [143] исследован начальный период развития пространственной дискообразной трещины с вырожденной кольцевой пластической зоной в вязкоупругом массиве. В основу исследования положена обобщенная модель Леонова – Панасюка – Дагдейла, в которой предполагается, что напряжения в концевой зоне трещины $\sigma = \sigma(t)$ зависят от истории нагружения и определяются следующей закономерностью:

$$\sigma(t) = A + B \exp(-C\chi), \quad (2.1.9)$$

где A, B, C – константы материала, а функция деформированного состояния

$$\chi = \left[(\varepsilon_{ij}^v - \varepsilon_{ij}^l)(\varepsilon_{ij}^v - \varepsilon_{ij}^l) \right]^{1/2}. \quad (2.1.10)$$

Индексы v и l обозначают, соответственно, вязкоупругие и упругие компоненты деформации.

Выбранный закон деформирования материала в концевой зоне трещины приводит к тому, что с ростом ползучести материала функция χ увеличивается и вызывает соответствующую релаксацию напряжений в концевой зоне трещины, что в свою очередь приводит к росту пластической зоны у края трещины. Трудности математического характера не позволили авторам в рамках указанной постановки точно исследовать даже начальный этап (инкубационный период) развития трещины. Путем значительных упрощений для случая вязкоупругой среды Максвелла получено уравнение для определения времени инициирования трещины.

В работах [16, 20, 79] предложена кинетическая модель трещин в вязкоупругопластическом теле, основанная на некоторых принципах модели Дагдейла [67] и критерия критического раскрытия трещины (COD), когда концевая зона не мала по сравнению с длиной трещины (как обычно полагают). В этом случае все периоды докритического развития трещины могут существенно влиять на долговечность вязкоупругого тела с трещиной. На основе приведенного выше подхода в квазистационарной постановке изучен докритический рост прямолинейной трещины с немалой концевой (пластической) зоной в бесконечном вязкоупругопластическом теле под действием гидростатического давления. В этом случае уравнение роста трещины приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению сложной структуры, решение которого записано в квадратурах. Для материала Максвелла решение представлено в виде простой формулы. Показано, что если для малых концевых областей ($d/l < 0,1$) инкубационный и переходный периоды вносят незначительный вклад в долговечность тела, то с ростом концевой зоны этот вклад увеличивается и для больших концевых зон он соизмерим с длительностью основного периода медленного роста трещины.

В работах [20,23] разработан приближенный метод решения определяющих уравнений роста трещин во время переходного и основного периодов в вязкоупругих материалах, деформирование которых описывается интегральными операторами наследственной теории упругости со слабосингулярными ядрами (операторы Абеля, \mathcal{E}_α -операторы). Численными методами проведено обоснование этой аппроксимации. Показана ее применимость для некоторых значений не малых зон предразрушения.

Модифицированная модель Леонова – Панасюка, основанная на постоянстве зоны предразрушения и критерии критического раскрытия трещины, предложена в работах А.А. Каминского [13, 20, 23]. На основе этой модели разработана теория докритического развития трещин в вязкоупругих телах. В работах [5, 28, 29] экспериментально установлено, что при медленном росте трещины во время основного периода развития в полимерах и композитах размеры концевых зон и критическое раскрытие δ_c практически не изменяются. На основе концепции о постоянстве концевой зоны в работах [17, 20] получено дифференциальное уравнение докритического роста макроскопической трещины в вязкоупругом теле в следующем виде:

$$\frac{K_I^*}{K_I} = 1 + \frac{d}{i} \int_0^1 R\left(\frac{ds}{i}\right) F(s) ds, \quad (2.1.11)$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений; K_I^* – его критическое значение при $l = l_*$; i – скорость роста трещины;

$$F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}. \quad (2.1.12)$$

Уравнение (2.1.11) устанавливает связь между коэффициентом интенсивности напряжений движущейся трещины и скоростью ее роста. Эта связь является универсальной, поскольку не зависит от геометрии области и типа внешней нагрузки, что было подтверждено экспериментально [28, 29] для многих видов вязкоупругих полимеров и композиций на их основе.

В работе Кнаусса [117] исследован вязкоупругий аналог задачи Гриффитса на основе модели типа Леонова – Панасюка – Дагдейла и энергетического критерия следующего вида:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \sigma_y(\xi, 0, t) v(\xi - a, 0, t) d\xi = \Gamma i. \quad (2.1.13)$$

Здесь σ_y , v – нормальные напряжения и перемещения соответственно; a – размер концевой зоны; Γ – интенсивность поверхностной энергии. Полагая, что напряжения в концевой зоне распределены по закону

$$\sigma_y(\xi, 0, t) = \sigma_0 \left([l(t)]^{1/2} / (2\xi)^{1/2} \right), \quad (2.1.14)$$

автор [117], исходя из критерия (2.1.13), получил нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее рост трещины в вязкоупругой среде,

$$\frac{2\Gamma}{\pi\sigma_0^2 l(t)} = D\left(\frac{a}{i}\right), \quad (2.1.15)$$

где $D(t)$ – функция податливости. Численное решение уравнения (2.1.15) сравнено с результатами экспериментального исследования длительности разрушения полимерных образцов с трещинами.

В работе [118] рассмотрен устойчивый рост трещины в вязкоупругой полосе под действием постоянного смещения краев полосы. В качестве модели трещины выбрана двухфазная модель типа Леонова–Панасюка с малой концевой зоной, когда напряжения

в концевой зоне изменяются по некоторому закону (на одной части концевой зоны они постоянны, а на другой изменяются по линейному закону). Предполагается, что материал несжимаем. Изучается только рост трещины с постоянной скоростью. В качестве критериев разрушения используются локальный энергетический критерий типа Черепанова–Райса и COD. Рассматриваются две концепции: напряжения в концевой зоне не изменяются со временем; размер концевой зоны остается постоянным во время роста трещины. В результате исследования определены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от скорости роста трещины. В работе описано также экспериментальное исследование разрушения вязкоупругой полосы из прозрачного полиуретана и результаты сравнены с теоретическими расчетами. Наилучшее соответствие экспериментальных и расчетных данных достигается (для обоих критериев) в случае постоянства напряжений в концевой зоне.

Расчеты также показали, что отклонение распределения напряжений в концевой зоне от равномерного незначительно изменяет результаты, поэтому можно пользоваться наиболее простым случаем, когда напряжения распределены равномерно по длине концевой зоны.

В работах Р. Шепери [131, 132] на основе предложенного им локального энергетического критерия исследуется кинетика роста трещины нормального разрыва с очень малой концевой областью в вязкоупругой среде, деформирование которой описывается интегральными операторами с разностными степенными ядрами вида

$$C(t - \tau) = C_0 + C_2(t - \tau)^m, \quad (2.1.16)$$

где C_0 , C_2 , m – положительные величины, не зависящие от времени. Рассматривается случай плоской деформации, когда деформирование* вязкоупругой среды зависит от двух интегральных операторов E^* и ν^* . Однако, конкретные примеры исследованы при упрощающем предположении, что $\nu^* = \nu = \text{const}$ (ν – коэффициент Пуассона). Изучается модель трещины, подобная модели Леонова – Панасюка [37]; при неравномерном распределении напряжений по длине концевой зоны, однако, при этом полагается, что напряжения в концевой зоне не изменяются со временем. Предполагается, что вторая производная логарифма функции податливости при ползучести мала относительно логарифма времени. В такой упрощенной постановке вычислена скорость роста трещины нормального разрыва в вязкоупругой среде вида (2.1.16), которая определяется следующим соотношением:

$$\dot{i} = \frac{\pi}{2} \left[C_2 / (8\Gamma(1 - K_I^2) / (K_I^*)^2) \right]^{1/m} \frac{\lambda_m}{\sigma_m^2 I_1^2} K_I^{2(1+1/m)}. \quad (2.1.17)$$

Здесь K_I – коэффициент интенсивности напряжений; K_I^* – его критическое значение; σ_m – максимум напряжений в концевой зоне трещины; λ_m – параметр, зависящий

только от m , причем $\lambda_m^{1/m} \approx 1/3$; $I_1 = \int_0^1 [f(\alpha\eta) / \eta^{1/2}] d\eta$; α – размер концевой зоны;

$$f(x) = \sigma(x) / \sigma_m.$$

С помощью уравнения (2.1.17) автор исследовал несколько конкретных задач механики длительного разрушения вязкоупругих материалов.

Относительно учета неравномерности распределения напряжений в концевой зоне отметим следующее. В рассмотренной работе [118] показано, что эта неравномерность (для малых концевых зон) несущественна при исследовании кинетики роста трещины. К такому же выводу для упругого случая ранее пришла Л. В. Онышко [40], которая показала, что для малых концевых областей неравномерность распределения напряжений слабо влияет на характеристики разрушения.

В рамках модели Дагдейла в работе Маккартни [126] рассматривается развитие трещины в линейном вязкоупругом теле под действием постоянной или монотонно возрастающей нагрузки. В этой работе используется как локальный энергетический критерий, как и в работе [118], так и глобальный. Отмечается, что рост трещины в

вязкоупругом теле Максвелла можно описать с помощью упомянутых критериев, а локальный энергетический критерий позволяет описывать закономерности роста трещин в вязкоупругих телах более общей реологической структуры. Так, скорость трещины нормального разрыва в вязкоупругом теле, деформирование которого описывается интегральными операторами разностного типа, в случае постоянных внешних нагрузок определяется формулой

$$\dot{i} = \frac{\pi J(0)}{24\sigma^2 J(0)} \frac{K_I^4(t)}{\frac{2\Gamma}{(1-\nu^2)J(0)} - K_I^2(t)}, \quad (2.1.18)$$

где \dot{i} – скорость конца трещины; $\sigma = \text{const}$ – напряжения в концевой зоне; $K_I(t)$ – коэффициент интенсивности напряжений; Γ – энергия разрушения; ν – коэффициент Пуассона; $J(t)$ – функция ползучести; точка над буквой обозначает производную по времени.

Из соотношения (2.1.18) легко определить время до разрушения вязкоупругого тела с трещиной

$$t_f = \frac{24\sigma^2 J(0)}{\pi^2 P^2 \dot{J}(0)} (\alpha - 1 - \ln \alpha) \left(\alpha = \frac{2\Gamma}{\pi(1-\nu^2)J(0)\sigma^2 C_0} \right). \quad (2.1.19)$$

При этом, как и в большинстве работ, предполагается, что $P/\sigma \ll 1$ (P – интенсивность внешних нагрузок), т. е. рассматриваемые трещины имеют малые концевые зоны предразрушения. Отмечается, что предлагаемый подход не описывает инкубационного периода развития трещины и с его помощью нельзя вычислить время инициирования трещины. В то же время некоторые результаты хорошо согласуются с результатами работ [35, 120].

В работе [128] предпринята попытка исследовать кинетику роста трещин в вязкоупругом бесконечном теле (аналог задачи Гриффитса), если размер концевых (пластических) зон не мал по сравнению с длиной трещины. Исследование ведется с помощью двух критериев – энергетического и деформационного (COD). Для случая энергетического критерия записано дифференциальное уравнение роста трещины, которое описывает основной период ее развития. Как уже отмечено [126], с помощью этого критерия нельзя вычислить величину инкубационного периода трещины и описать переходный период ее развития. Если при рассмотрении макроскопических трещин ($d \ll l$) для вычисления долговечности вязкоупругого тела величиной этих периодов можно было пренебречь, то при исследовании долговечности вязкоупругих тел, ослабленных трещинами, имеющими немалые концевые зоны, ими пренебрегать уже нельзя, так как они [16, 20] могут быть соизмеримыми с длительностью основного периода роста трещины.

В этой же работе исследован рост трещины с немалыми концевыми зонами на основе критерия COD (аналогичное исследование проведено в работах [16, 20]), однако исследованы только два начальных периода – инкубационный и подготовительный, причем рассмотрена простейшая модель вязкоупругого тела – модель Максвелла (уравнения роста трещин для этих периодов, полученные в работе [128], являются частными случаями общих уравнений [16, 20]). Далее в работе [128] сравниваются уравнения роста трещин, полученные на основе двух указанных критериев. Показано, что для малых концевых областей уравнения роста трещин во время основного периода обоих критериев совпадают. Для немалых концевых зон, как отмечается в работе [128], такого совпадения нет. В работе [64] приведена дискуссия между Кристенсеном и Маккартни, посвященная анализу применения глобального и локального энергетических критериев разрушения при исследовании роста трещин в вязкоупругих телах. Отмечается, что результаты исследований докритического развития трещины в вязкоупругом теле, полученные на основе этих двух критериев, будут эквивалентными, если будут выполнены следующие требования: напряжения в вершине трещины конечны, существует зона предразрушения.

В работах [20, 21] на основе теории длительного разрушения [20] исследована долговечность вязкоупругой пластины, ослабленной эллиптическим (круговым) отверстием и двумя коллинеарными макроскопическими трещинами нормального разрыва, выходящими на его границу, при длительном действии постоянных растягивающих усилий.

В работе [20] на основе теории длительного разрушения при условии постоянства зоны предразрушения изучена кинетика докритического роста круговой пространственной трещины (вязкоупругий аналог задачи Зака) при длительном действии постоянных растягивающих нагрузок.

Исследованию развития трещин в ортотропных вязкоупругих телах посвящены работы [15, 20], в которых изучены все периоды докритического развития трещин на основе критерия критического раскрытия трещины (COD).

В работе [61] предложен приближенный метод исследования кинетики роста трещин в вязкоупругих ортотропных телах. Этот метод является обобщением метода, изложенного в работах [131, 132]. Примеров, иллюстрирующих эффективность предложенного метода, в работе [61] не приведено.

2.2. Выводы.

Из анализа начального периода исследований в области механики разрушения вязко-упругих тел можно сделать вывод, что в этот период частично изучен лишь докритический рост макроскопических трещин нормального разрыва (mode I) в вязкоупругих телах, находящихся под действием постоянных либо медленно растущих во времени внешних нагрузок. Эти задачи исследованы для различных моделей разрушения вязкоупругих тел и некоторых критериев разрушения (COD, глобальный и локальный энергетические критерии и др.).

Важным результатом этих работ является установление того факта, что различные модели разрушения вязкоупругих тел, учитывающие зоны предразрушения, приводят к идентичной картине длительного разрушения, согласующейся с опытными данными. В отдельных случаях (концепция Дагдейла) уравнения для основного периода докритического роста макроскопической трещины, полученные для различных критериев, совпадают [20, 128].

Следует также отметить, что, как показано в работе [126], глобальный энергетический критерий разрушения, в отличие от критерия COD, не может описать инкубационный период развития трещины, а следовательно, исследования, основанные на этом критерии, непригодны для определения долговечности жестких вязкоупругих тел с трещинами, поскольку, как следует из работ [23, 26], инкубационный период для таких вязкоупругих тел, в основном, и определяет их долговечность.

Основным недостатком научных публикаций этого периода (60 – 70 годы XX столетия) является рассмотрение в подавляющем числе работ чрезмерно малых зон предразрушения, а также простейших моделей деформирования изотропных вязкоупругих тел без учета фактора старения материалов, отсутствие общей картины докритического развития трещины на всех этапах ее развития, включая определение области безопасных нагрузок, когда это развитие невозможно, а также ее инициирование и докритический рост на начальном и последующих этапах ее развития вплоть до начала динамического роста. На протяжении этого периода проведено очень мало исследований разрушения вязкоупругих тел более сложной структуры, изготовленных из анизотропных, неоднородных и стареющих материалов, что затрудняет применение полученных научных результатов на практике.

Как показали дальнейшие исследования по этой проблеме, наиболее эффективными и применяемыми при исследовании развития трещин в вязкоупругих телах является критерий критического раскрытия (COD), впервые введенный в механику разрушения вязкоупругих тел в работе [130] и получивший дальнейшее развитие в работах [20, 23, 35, 36, 128], а также локальный энергетический критерий [131]. Другие критерии, к примеру, глобальный энергетический критерий [64, 128] или критерий завершающего натяжения (2.1.7) не получили должного развития из-за сложности их применения.

§3. Исследование докритического развития трещин нормального разрыва (mode I) в изотропных и анизотропных нестареющих вязкоупругих телах.

3.1. Исходные положения. Как уже отмечалось выше, впереди фронта трещины, растущей в вязкоупругом материале, образуется локальная зона предразрушения (process zone), материал в которой находится в состоянии деструкции. Этот распадающийся материал, как отмечено в работе [34], обладает усредненными определяющими характеристиками, которые невозможно измерить экспериментально на сплошном образце. На рис. 3.1.1 [131] показана зона предразрушения возле трещины в полимерном материале. Отсутствие знаний о характере зоны предразрушения обычно заменяют разумным моделированием структуры края трещины, согласующимся с опытными данными.

Поскольку во многих случаях зона предразрушения представляет собой узкий клинообразный дефект на продолжении трещины, его можно моделировать [2, 37] разрезом, на берегах которого приложены некоторые самоуравновешенные напряжения.

Отметим, что процесс длительного разрушения вязкоупругих тел происходит при достаточно низких напряжениях и вызван ползучестью материала (усталостью при циклических нагрузках). Поэтому при таком разрушении зона предразрушения значительно меньше, чем в случае разрыва того же тела с трещиной при высоком уровне растягивающих внешних нагрузок, т. е. при докритическом развитии трещины зона нелинейных деформаций достаточно локализована. В общем случае, как показывают исследования [2, 32, 37], распределение напряжений $\sigma(x, t)$ в зоне предразрушения неравномерно по ее длине (рис. 3.1.2) и изменяется с ростом трещины. Неравномерность напряжений в зоне предразрушения учитывалась в работах Г. И. Баренблатта [2], М. Я. Леонова, В. В. Панасюка [37] и других при исследовании разрушения упругих тел в предположении неизменности распределения напряжений со временем. Однако, такие модели использовались лишь для чрезмерно малых зон предразрушения, когда справедлива более эффективная теория Гриффитса – Ирвина. Чтобы распространить указанные модели на области, где теория Гриффитса – Ирвина не применима, т. е. для случая микротрещин с немалыми зонами предразрушения или трещин со значительными пластическими зонами, необходимо было их упростить. С этой целью [42, 67] напряжения в зоне предразрушения полагались постоянными по длине зоны и неизменными со временем, причем σ полагалось равным либо сопротивлению отрыва σ_0 (модель Леонова – Панасюка), либо пределу текучести материала σ_T (модель Дагдейла).

Все отмеченные модели были сформулированы для упругих и упругопластических тел, поэтому условия постоянства распределения и величины напряжений в зоне предразрушения, характерные для этих моделей, в случае их применения для исследования длительного разрушения вязкоупругих тел выполняются не всегда. Так, при длительном разрушении полимерных материалов и композитов на их основе, как показано в работах [24, 27, 28, 94], напряжения в зоне предразрушения существенно изменяются с ростом трещины, что подтверждается экспериментально [5, 7, 138], однако размер зоны предразрушения при этом изменяется незначительно, а в довольно широком диапазоне скоростей роста трещины он практически постоянен. Этот



Рис. 3.1.1

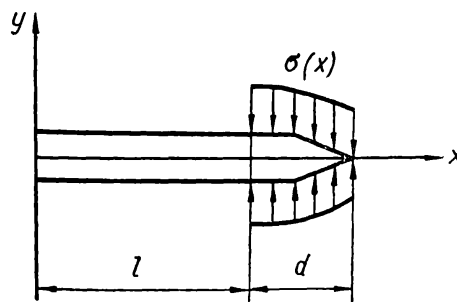


Рис. 3.1.2

факт обоснован теоретически, исходя из РС модели [13, 23], а также на основе экспериментальных исследований длительного разрушения полимеров и композитов на их основе [24, 28].

Условие постоянства напряжений в зоне предразрушения следует применять для исследования разрушения вязкоупругопластических тел, когда зона предразрушения представляет собой область пластических деформаций, сосредоточенных в узких слоях вдоль направления развития трещины. Как отмечено в работах [34, 142], такой подход дает приемлемые для практики результаты для определенного класса конструктивных материалов. Основываясь на этих фактах, в этом разделе исследуем докритическое развитие трещины в линейной вязкоупругой среде в рамках работ:

модель Леонова – Панасюка – Баренблатта [2, 37]. Согласно этой модели зона предразрушения у края трещины моделируется разрезом на ее продолжении, на берегах которого приложены самоуравновешенные сжимающие напряжения $\sigma(x)$, неравномерные по длине зоны, но неизменные во времени.

Размер зоны $d(t)$ определяется из условия ограниченности напряжений в теле, которое совпадает с условием плавности смыкания берегов трещины [2, 42].

$$\lim_{x \rightarrow L(t)} \delta'(x) = 0; \quad L(t) = l(t) + d(t). \quad (3.1.1)$$

модель Леонова – Панасюка – Дагдейла [42, 67] (концепция $\sigma = \text{const}$). В случае, если $\sigma(x) = \sigma_0$, имеем обычную модель Леонова – Панасюка, при $\sigma(x) = \sigma_T$ – модель Дагдейла. В этом случае, напряжения σ в концевой зоне равномерно распределены и определяются на основе соотношения (3.1.1).

модифицированная модель Леонова – Панасюка – Дагдейла [17, 20] (концепция $d = \text{const}$). Эта модель, как и предыдущая, основана на моделировании зоны предразрушения разрезом на продолжении трещины с приложенными к нему самоуравновешенными напряжениями $\sigma(t)$, причем справедливо условие (3.1.1). В отличие от предыдущих моделей в ней полагается, что размер зоны предразрушения остается постоянным во время роста трещины, а напряжение $\sigma(t)$ изменяется с ростом трещины и определяется из условия (3.1.1).

Условием начала роста трещины в вязкоупругом теле примем далее критерий критического раскрытия трещины (COD) [130, 136]

$$\delta(x = l, t) = \delta_{lc}. \quad (3.1.2)$$

Отметим, что согласно этим моделям параметры d и σ связаны соотношением (3.1.1), из которого следует, что если один из этих параметров положить постоянным, то другой обязательно должен быть функцией от длины трещины $l(t)$ и, следовательно, неявно от времени. Так, в случае одноосного растяжения (аналог задачи Гриффитса), полагая $d = \text{const}$, получаем из (3.1.1) выражение σ в виде

$$\sigma(t) = \frac{\pi P}{2} \left[\arccos \frac{l(t)}{l(t) + d} \right]^{-1}. \quad (3.1.3)$$

Отсюда следует, что с ростом длины трещины напряжения в концевой области растут. Аналогичная тенденция наблюдается при разрушении полиметилметакрилата [138].

Рассмотренные выше модели трещин дают хорошие результаты при одноосном растяжении, однако, при двухосном растяжении коэффициент интенсивности напряжений (SIF), раскрытие трещины (COD) не зависит от составляющей нагрузки, действующей параллельно трещине, и поэтому характеристики разрушения, рассчитанные по этим моделям, не зависят от двухосности нагружения, хотя это противоречит известным экспериментальным данным [88].

В связи с этим, в разделе 3.5 предложена модель разрушения вязкоупругих тел, позволяющая учесть эффект двухосности нагружения.

Как отмечается в работах [28, 52], многие вязкоупругие материалы (полимеры, стеклопластики и др.) при достаточно высоком уровне напряжений, а некоторые вплоть до разрушения, сохраняют свойство линейности и их деформирование можно описывать соотношениями линейной теории вязкоупругости. Поскольку в рамках рассмотренных моделей область повышенных напряжений исключена из рассмотрения, то в дальнейшем будем полагать, что всюду в области деформации малы и их можно описывать линейными соотношениями наследственной теории упругости. Будем далее полагать, исходя из указанных опытных данных, что вязкоупругие деформации в массиве вне трещины за время ее роста пренебрежимо малы по сравнению с деформациями в концевой зоне.

В качестве условия роста трещины для mode I далее будем рассматривать критерий критического раскрытия трещины (COD) [42, 136], причем будем полагать, что этот критерий справедлив в каждый момент времени для растущей трещины. Тогда условие (3.1.2) преобразуется к виду

$$\delta(x, t)|_{x=l(t)} = \delta_{lc}. \quad (3.1.4)$$

Отметим, что это один из немногих критериев, который описывает рост трещин с немалой концевой областью.

Энергетические критерии не всегда пригодны для исследования разрушения вязкоупругих тел, поскольку для некоторых полимерных материалов, таких, как ПММА, энергия разрушения может существенно изменяться с ростом скорости трещины [139].

В настоящее время проводятся интенсивные экспериментальные исследования для определения применимости критерия COD при изучении длительного разрушения различных полимерных материалов [27]. В работах [28, 29, 80, 83] отмечено, что с помощью критерия COD можно также описать докритический рост трещин при ползучести многих полимерных композитных материалов (см. раздел 5).

Обобщение описанных выше моделей на разрушение вязкоупругих сред приводит к новой кинетической модели разрушения, которая отличается от обычной (статической) [42], описывающей предельное равновесие упругих и упругопластических тел с трещинами, характером не только параметров равновесия модели (две концепции), но и самого процесса разрушения. В качестве примера можно отметить характер развития неустойчивой трещины при постоянной нагрузке. Начало разрушения в обоих случаях происходит при выполнении условий (3.1.2) и (3.1.4). Однако, если в первом случае это будет ускоренное динамическое развитие, то во втором (вязкоупругом случае) – медленное квазистатическое.

Развитие трещин в вязкоупругих телах в отличие от упругих имеет несколько характерных этапов, рассмотренных в последующих параграфах этого раздела.

Следует отметить, что этот и последующие разделы выполнены на основе обзора научных работ автора и его учеников.

3.2. Основные уравнения докритического развития трещин в нестареющих вязкоупругих телах. Развитие трещины в вязкоупругом теле при докритических нагрузках, в общем случае, имеет инкубационный (подготовительный), начальный (переходный) и основной периоды медленного квазистатического роста трещины и, наконец, период динамического ее развития [20].

Инкубационный период развития трещины. Во время инкубационного периода происходит раскрытие берегов трещины без ее роста.

Согласно принципу Вольтерра уравнение контура трещины в однородном вязкоупругом теле можно во многих случаях представить так:

$$\delta(x, t) = T^* \delta_0(x, t), \quad (3.2.1)$$

Где $\delta_0(x, t)$ – функция силовых и геометрических параметров, а T^* имеет вид

$$T^* = \begin{cases} (\pi E^*)^{-1} & \text{(плоское напряженное состояние);} \\ f(E^*, \nu^*) & \text{(плоская деформация, пространственные задачи);} \\ F(R_{ijkl}^*) & \text{(анизотропное тело)} \end{cases}$$

или в стандартной форме интегральный оператор T^* представляется так:

$$T^* f(t) = T_0 \left[f(t) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (3.2.2)$$

где f и F – некоторые конкретные функции; T^* , E^* , v^* , R_{ijkl}^* – линейные интегральные операторы Вольтерра II рода.

Для прямолинейной сквозной трещины в бесконечной пластине, находящейся под действием самоуравновешенных напряжений $P(x, t)$, функция $\delta_0(x, t)$ имеет вид

$$\delta_0(x, t) = -2 \int_{-L}^L q(\xi, t) \Gamma_0(L, x, \xi) d\xi; \quad L = l + d \quad (3.2.3)$$

$$q(x, t) = \begin{cases} P(x, t), & |x| \leq l(t), \\ P(x, t) - \sigma(x, t) & l(t) \leq |x| \leq L(t). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Рост трещины согласно критерию COD начнется, когда раскрытие берегов трещины при $x = l_0$ (l_0 – начальная длина трещины) достигнет предельного значения [130]:

$$\delta(x, t)|_{x=l_0} = \delta_{lc}. \quad (3.2.5)$$

Тогда, полагая, что внешняя нагрузка приложена мгновенно в момент $t = 0$, определим длительность инкубационного периода из условия (3.2.5) с учетом соотношений (3.2.1) и (3.2.2) в виде

$$T_0(t) \left[\delta_0(l_0) + \int_0^{t_*} R(t_*, \tau) \delta_0(p(\tau, l_0)) d\tau \right] = \delta_{lc}. \quad (3.2.6)$$

Под термином «мгновенно» понимаем приложение нагрузки за время, значительно меньшее времени релаксации рассматриваемой вязкоупругой среды.

Для операторов наследственной теории упругости разностного типа имеем

$$T^* g(t) = T_0 \left[g(t) + \int_0^t R(t - \tau) g(\tau) d\tau \right]. \quad (3.2.7)$$

Уравнение (3.2.6) представим в виде

$$\delta_0(l_0) + \int_0^{t_*} R(t_* - \tau) \delta_0(p_0(\tau), l_0) d\tau = \frac{\delta_{lc}}{T_0}. \quad (3.2.8)$$

В случае, когда внешняя нагрузка не изменяется со временем, т. е. $p_0(x, t) = p_0(x)$, уравнение (3.2.8) упрощается:

$$\int_0^{t_*} R(\theta) d\theta = \frac{\delta_{lc}}{\delta(l_0)} - 1, \quad (3.2.9)$$

где $\delta(l) = T_0 \delta_0(l)$ – упругое раскрытие берегов трещины при $x = l$.

Отметим, что, по-видимому, впервые для обобщенной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла уравнение, определяющее величину инкубационного периода, получено в работе [130], где получена простая аналитическая зависимость, определяющая t_* для материала, деформирование которого описывается \mathcal{E}_α^* -операторами Ю.Н. Работнова [46].

Как известно [46], различают два типа вязкоупругих сред: среды, кривые ползучести которых имеют горизонтальную асимптоту; (заметим, что деформирование таких

вязкоупругих тел описывается ограниченными интегральными операторами, к примеру \mathfrak{D}_α^* -операторами [46]) и среды с квазивязким течением (тела типа Максвелла). В связи с этим отметим, что при монотонно возрастающей нагрузке решение уравнений (3.2.6) и (3.2.8) существует всегда. В случае, когда внешняя нагрузка не изменяется со временем, решение уравнения (3.2.9) будет существовать для произвольной нагрузки только для вязкоупругих тел типа Максвелла и, следовательно, их разрушение возможно при сколь угодно малых нагрузках.

Пусть внешняя нагрузка представима в форме $pf(x, y)$, где p – параметр нагружения, имеющий размерность напряжения; $f(x, y)$ – некоторая функция координат. Тогда для вязкоупругих тел первого типа решение уравнения (3.2.9) существует только для параметров p , больших некоторого предела p_s . Другими словами, при $p < p_s$ величина $\delta(x=l_0, t)$ не может достичь δ_{lc} даже за сколько угодно большое время и рост трещины не происходит. Будем называть нагрузки p_s безопасными, а величину $\delta_{ls} = \delta(l, p_s)$ – безопасным раскрытием. В общем случае величины безопасных нагрузок и безопасных раскрытий определяются, соответственно, из соотношений

$$\frac{\delta_{lc}}{\delta(l, p_s)} = \frac{T_\infty}{T_0}; \quad \frac{\delta_{lc}}{\delta_{ls}} = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad (3.2.10)$$

где T_∞ и T_0 – соответственно, длительное ($t = \infty$) и мгновенное ($t = 0$) значения функции $T^* \cdot 1$.

Выражение (3.2.10) для вязкоупругой пластины можно представить в форме

$$\frac{\delta_{lc}}{\delta(l, p_s)} = \frac{E_0}{E_\infty}; \quad \frac{\delta_{lc}}{\delta_{ls}} = \frac{E_0}{E_\infty}, \quad (3.2.11)$$

где E_0 , E_∞ – мгновенный и длительный модули упругости. Для макроскопических трещин ($d \ll l$), вершина которых удалена на значительное расстояние от границ тела, упругое раскрытие берегов трещины при $x=l(t)$ в случае равномерного распределения напряжений в концевой зоне можно выразить через коэффициент интенсивности напряжений K_I в виде [54]

$$\delta(l(t)) = \frac{K_I^2}{\sigma E_0} \quad (\text{концепция } \sigma = \text{const}); \quad (3.2.12)$$

$$\delta(l(t)) = \frac{2K_I}{\pi E_0} \sqrt{\frac{2d}{\pi}} \quad (\text{концепция } d = \text{const}). \quad (3.2.13)$$

Тогда коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие безопасной нагрузке K_I^s , определяются из (3.2.11), соответственно, по формулам

$$\frac{K_{lc}}{K_I^s} = \begin{cases} (E_0 / E_\infty)^{1/2}; & \sigma = \text{const}; \\ E_0 / E_\infty; & d = \text{const}, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

где K_{lc} – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, соответствующее критическому значению параметра нагрузки p_* , которая вызывает рост трещины в теле с мгновенными характеристиками. В большинстве случаев K_I можно представить в форме

$$K_I = p \cdot f(l, \eta_k), \quad (3.2.15)$$

где η_k – некоторые геометрические параметры; p – параметр нагружения. Тогда для первой и второй концепций, соответственно, имеем

$$p^*/p_s = (E_0/E_\infty)^{1/2}; \quad \sigma = \text{const}; \quad (3.2.16)$$

$$p^*/p_s = E_0/E_\infty; \quad d = \text{const}. \quad (3.2.17)$$

Отметим, что для вязкоупругих тел, деформирование которых описывается ограниченными интегральными операторами [46], существует безопасный размер трещины l_s такой, что при $l < l_s$ трещина не развивается. Эта безопасная длина определяется, в общем случае, из уравнения (3.2.10), а для вязкоупругой пластины – выражением (3.2.11), которое в данном случае принимает соответственно вид

$$\frac{\delta_{lc}}{\delta(l_s, p)} = \frac{T_\infty}{T_0}; \quad \frac{\delta_{lc}}{\delta(l_s, p)} = \frac{E_0}{E_\infty}. \quad (3.2.18)$$

Таблица 1

Материал	Температура, °C	α	$\lambda, \text{ч}^{\alpha-1}$	$\beta, \text{ч}^{\alpha-1}$	p_s / p^*	
					$\sigma = \text{const}$	$d = \text{const}$
Медь	145	0,7	0,5	0,36	0,65	0,42
Сталь	454	0,7	0,726	0,128	0,39	0,15
Эпоксидная смола ЭД-6	20	0,5	0,052	0,12	0,84	0,7
Полиуретан (солитан 113)	20	0	13,55	2,7	0,41	0,17

В случае если вязкоупругое тело с трещиной подвержено равномерному одноосному растяжению, ориентированному нормально берегам трещины (аналог задачи Гриффитса), для концепции $\sigma = \text{const}$ безопасная нагрузка определится из соотношения

$$l^*/l_s = T_\infty/T_0, \quad (3.2.19)$$

а для вязкоупругой пластины – из соотношения

$$l^*/l_s = E_0/E_\infty. \quad (3.2.20)$$

В качестве примера исследуем случай, когда ядром интегрального оператора (3.2.7) является дробно-экспоненциальная функция [45]

$$R(t-\tau) = \lambda \mathcal{E}_\alpha(\beta, t-\tau) = \lambda (t-\tau)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]}, \quad (3.2.21)$$

где α, β, λ – реологические параметры материала, определяемые из эксперимента; Γ – гамма-функция Эйлера.

В этом случае $E_0/E_\infty = 1 + \lambda/\beta$. В табл. 1 приведены значения p_s / p^* для некоторых конструкционных вязкоупругих материалов.

Следует подчеркнуть, что знание величин P_s и l_s имеет практическую ценность, так как позволяет с помощью соответствующего подбора конструкционных материалов (или их реологических свойств) уменьшить докритический рост образовавшихся трещин.

На рис. 3.2.1 приведены значения инкубационного периода t_* в зависимости от отношения p / p_s для материалов с реологическими параметрами, указанными в табл. 1 (номера кривых соответствуют строкам таблицы).

Величина t_* рассчитана по формуле

$$\lambda \int_0^{t_*} \mathcal{E}_\alpha(\beta, \theta) d\theta = \left(\frac{p^*}{p} \right)^2 - 1, \quad (3.2.22)$$

которая справедлива для концепции $d = \text{const}$, и следует из соотношения (3.2.9) с учетом формул (3.2.13) и (3.2.15).

Переходный период развития трещины.

После инкубационного периода при докритических внешних нагрузках начинается медленный рост трещины, причем, если рост устойчивых трещин носит при постоянных нагрузках затухающий характер, то развитие неустойчивых трещин происходит со скоростью, близкой к постоянной возрастающей скоростью вплоть до достижения трещиной критической длины $l = l_*$, когда начинается ее быстрый динамический рост. (Термины «устойчивый» и «неустойчивый» относятся к характеру развития трещины в упругом теле). Как следует из многих экспериментальных данных [28, 34], ускорение движущейся трещины невелико, что позволяет исследовать задачу в квазистатической постановке, т.е. полагать движение настолько медленным, что можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения и использовать уравнения статики упруго-наследственных тел.

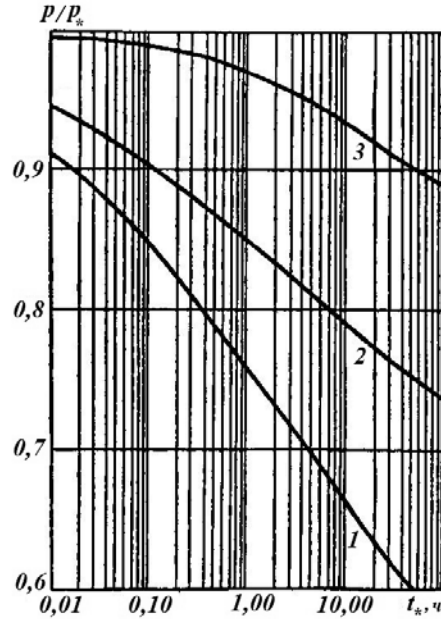


Рис. 3.2.1

Условно разделим этот период роста трещины на два. Во время начального периода (назовем его переходным) трещина начинает свое движение и проходит расстояние, равное начальному размеру концевой зоны. После этого начинается второй период, во время которого неустойчивые трещины медленно подрастают до критического размера (когда начинается их спонтанный рост), а развитие устойчивых трещин носит затухающий характер и, если внешняя нагрузка постоянна, их развитие со временем прекращается. Уравнения, описывающие рост трещины во время этих двух этапов, различны.

Остановимся вначале на исследовании первого (переходного) периода развития трещины. Он начинается при $t = t_*$ (конец инкубационного периода) и продлевается до t_1 , когда длина трещины достигнет величины $l_1 = l_0 + d$. Полагаем, что в каждый момент времени для растущей трещины справедлив критерий (3.1.4). Обозначим упругое раскрытие трещины длиной $l(t)$ в точке x через $\delta[p(t), x, l(t)]$, а в точке $x = l(t)$ — через $\delta[p(t), l(t), l(t)] = \delta[l(t)]$. Тогда, согласно соотношениям (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4), уравнение роста трещины при действии медленно возрастающих или постоянных докритических нагрузок $p(t)$ запишем так:

$$\delta_{lc} = \delta[l(t)] + \int_0^{t_*} R(t-\tau) \delta[p(\tau), l(t), l_0] d\tau + \int_{t_*}^t R(t-\tau) \delta[p(\tau), l(t), l(\tau)] d\tau. \quad (3.2.23)$$

При $p(t) = p = \text{const}$ уравнение (3.2.23) преобразуется к виду

$$\delta_{lc} = \delta[l(t)] + \delta[l(t), l_0] \int_0^{t_*} R(t-\tau) d\tau + \int_{t_*}^t R(t-\tau) \delta[l(t), l(\tau)] d\tau. \quad (3.2.24)$$

Здесь $\delta[l(t), l_0]$ — упругое раскрытие трещины длиной l_0 в точке $x = l(t)$; $\delta[l(t), l(\tau)]$ — упругое раскрытие трещины длиной $l(\tau)$ в точке $x = l(t)$.

Определим длительность переходного периода $\Delta t_1 = t_1 - t_*$. Поскольку в рассматриваемом случае $\delta[l(t_1), l_0] = 0$, то из (3.2.24) получаем уравнение для определения величины Δt_1 в виде

$$\delta_{lc} = \delta(l_1) + \int_0^{\Delta t_1} R(\Delta t_1 - \theta) \delta(l_1, l(\theta + t_*)) d\theta. \quad (3.2.25)$$

Отметим, что при исследовании первых двух периодов вследствие единого подхода пренебрегаем небольшим изменением δ_{lc} при срагивании трещины, что наблюдается для некоторых вязкоупругих материалов (аналогичное явление наблюдается и для K_c). Учет этого изменения нетрудно ввести, заменив в соотношениях δ_{lc} на его функциональную зависимость, полученную из эксперимента.

Основной период развития трещины в вязкоупругой среде. Рассмотрим модель, которая имеет две последовательные фазы разрушения. Первая фаза разрушения состоит в том, что элемент сплошной среды переходит в некоторое промежуточное состояние (концевая зона предразрушения), а затем происходит его окончательное разрушение. В начальный период трещина двигалась по первоначально сформированной концевой зоне (предполагается, что к моменту $t=0$ в теле уже существует трещина длиной l_0 с концевой областью d_0), поэтому берега разреза в концевой зоне уже имели дополнительное раскрытие за время инкубационного периода (второе слагаемое в уравнении (3.2.23)). На втором этапе развития трещины такой ситуации уже нет. Трещина последовательно разрывает сплошной материал, формируя перед этим концевую область. Раскрытие берегов разреза в концевой области начинается с момента попадания вершины концевой области в соответствующую точку вязкоупругой среды. Обозначим этот момент через t' . Уравнение медленного роста трещины в этот период, как и в предыдущем случае, получаем, полагая, что в любой момент развития трещины выполняется критерий (3.1.4). В этом случае имеем

$$\delta_{lc} = T_0 \left\{ \delta_0[l(t)] + \int_{t'}^t R(t-\tau) \delta_0[l(t), l(\tau)] d\tau \right\}, \quad (3.2.26)$$

где $\delta[x, l(t)] = T_0 \delta_0[x, l(t)]$, а t' определяется из уравнения

$$l(t) - l(t') = d. \quad (3.2.27)$$

Уравнение (3.2.26) есть нелинейное интегральное уравнение сложной структуры, решение которого в общем случае представляет большие трудности.

Проведем качественный анализ уравнения (3.2.26). Так как развитие устойчивых и неустойчивых трещин на этом этапе качественно различно, исследуем эти случаи отдельно.

Остановимся вначале на изучении роста неустойчивых трещин. Начиная с момента t_1 , скорость движения трещины близка к постоянной, за исключением небольшого интервала времени перед окончанием этого периода, когда трещина переходит на динамический режим развития. Поскольку оба слагаемых в правой части (3.2.26) – положительные величины, причем $\delta_0[l(t)]$ увеличивается с ростом $l(t)$, то, очевидно, при $T_0 \delta_0[l(t)] > \delta_{lc}$ уравнение (3.2.26) не будет иметь решения. Итак, условие

$$T_0 \delta_0[l(t) = l_*] = \delta_{lc} \quad (3.2.28)$$

критическое и совпадает по форме с обычным критерием предельного раскрытия [42], отличаясь от него тем, что вместо упругих постоянных материала в условии (3.1.4) стоят мгновенно упругие постоянные. Длину трещины $l(t = t_2) = l_*$ и время t_2 , когда эта длина достигается, будем называть критическими.

Анализируя уравнение (3.2.26), можно заключить, что оно как бы состоит из двух частей: мгновенно упругой (первое слагаемое) и вязкой (второе слагаемое), причем если вязкая часть в начале движения трещины играет основную роль, то с ростом

трещины ее величина убывает (при $l \rightarrow l_*$ второе слагаемое уравнения (3.2.26) стремится к нулю) и доминирующее положение приобретает мгновенно упругая часть уравнения (3.2.26). При $l = l_*$ начинается динамический рост трещины, который происходит за короткое время и составляет малую часть полного времени развития трещины (долговечности), поэтому его вкладом в долговечность вязкоупругого тела с трещиной можно пренебречь, полагая, что время t_2 совпадает с временем полного разрушения тела.

Таким образом, долговечность вязкоупругого тела с трещиной T определяется формулой

$$T = t_* + \Delta t_1 + \Delta t_{II}. \quad (3.2.29)$$

Здесь $\Delta t_{II} = t_2 - t_1$, а величины t_* и Δt_1 определяются из уравнений (3.2.8), (3.2.9) и, соответственно, (3.2.23), (3.2.25).

Отметим, что развитие неустойчивых трещин в вязкоупругих средах представляет большой интерес (по сравнению с развитием устойчивых), поскольку оно очень опасно и в ряде случаев может привести к полному разрушению вязкоупругого тела.

Рассмотрим развитие устойчивых трещин. В этом случае при длительном действии постоянной внешней нагрузки развитие трещины в отличие от предыдущего случая происходит с убывающей скоростью и через некоторое время останавливается. Для поддержания незатухающего движения трещины необходим рост внешней нагрузки со временем. Рассматриваемый случай отличается от предыдущего тем, что для устойчивых трещин уравнение (3.2.26) описывает медленный ее рост и при критическом значении внешней нагрузки. Это следует из того, что функция $\delta[l(t)]$ убывает с ростом трещины.

Реальную опасность полного разрушения развитие устойчивой трещины может представить лишь в том случае, когда участок устойчивого роста трещины сменяется неустойчивым. Тогда трещина может медленно расти до начала участка неустойчивого роста, а далее произойдет ее спонтанное развитие, вызывающее разрушение тела. Время, прошедшее от приложения внешней нагрузки до момента достижения начала участка неустойчивого роста, и будет определять долговечность тела в этом случае.

Для разностного ядра $R(t - \tau)$ преобразуем уравнение (3.2.26) к виду, удобному для его исследования. Полагая в выражении (3.2.26) $\tau = \theta + t'$ и $t' = t - q$, получаем

$$\delta_{ic} = T_0 \left\{ \delta_0[l(t)] + \int_0^q R(q - \theta) \delta_0[l(\theta), l(t)] d\theta \right\}. \quad (3.2.30)$$

Здесь q – время, за которое конец трещины проходит расстояние, равное d .

3.3. Докритический рост одиночных сквозных трещин в изотропных и ортотропных вязкоупругих телах при постоянных и переменных нагрузках. Как следует из публикаций раннего периода (раздел 2), большинство исследований было проведено для малых зон предразрушения. Это справедливо, когда выполняется концепция тонкой структуры конца трещины [54]. Однако, для малых трещин (микротрещин), зачастую имеющих зоны предразрушения, соизмеримые с длиной трещины, такая концепция неверна, а введение коэффициентов интенсивности напряжений (SIF) теряет смысл.

Такая ситуация также возможна для материалов с развитой пластичностью, а также хрупких композитных материалов в случае невысоких адгезионных свойств наполнителя и связующего.

Немалые зоны предразрушения; анализ влияния их размеров и характера распределения напряжений в зоне на долговечность вязкоупругих тел.

В работах [16, 20, 23] в рамках модели Леонова – Панасюка (равномерное распределение постоянных напряжений σ_0 в зоне предразрушения) и теории докритического развития трещин [20], изложенной в предыдущих разделах, решены задачи о докри-

тическом развитии сквозной прямолинейной трещины (mode I) с развитыми зонами предразрушения в вязкоупругой изотропной пластине при действии равномерного растяжения на бесконечности.

Исходя из основных уравнений (3.2.9), (3.2.24) и (3.2.26), определяющих кинетику развития трещины, и основываясь на специальной аппроксимации интегрального оператора [20], получены аналитические соотношения, определяющие длительность трех основных периодов развития трещины для ядра ползучести типа Абеля и для тела Максвелла.

В частности, для ядра Абеля имеем

$$R(t - \tau) = \lambda \frac{(t - \tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}; \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (3.3.1)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера; λ – реологический параметр материала.

Полная долговечность определится из формулы

$$T = \left[\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\lambda} \right]^2 \left\{ (l_*/l_0 - 1)^2 + \frac{1}{K^2(\alpha)} (l_*/l_1 - 1)^2 \right\} + \varepsilon^{-2}(\alpha, \gamma) \left\{ \ln l_*/l_1 - 2(l_*/l_1 - 1) + \frac{1}{2} [(l_*/l_1)^2 - 1] \right\}. \quad (3.3.2)$$

Здесь l_0, l_* , – соответственно начальные и критические полудлины трещин; $l_1 = l_0 + d$, d – размер зоны предразрушения;

$$\varepsilon(\alpha, \gamma) = \lambda \frac{K(\alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{(1 - \cos \gamma)^{2 - \alpha}}{\ln \sec \gamma}; \quad \gamma = \frac{\pi p_0}{2 \sigma_0},$$

где p_0 – интенсивность внешней нагрузки; σ_0 – напряжения в зоне предразрушения;

$$K(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2 - \alpha)}{2(2 - \alpha) \Gamma(2,5 - \alpha)} - \text{корректирующий коэффициент.}$$

Полученные расчетные данные на основе (3.3.2) и других соотношений для обеих вязкоупругих сред показывают, что в отличие от малых зон предразрушения ($d/l_0 \ll 1$), когда долговечность практически определяется основным периодом роста трещины, в случае немалых зон предразрушения инкубационный и переходной период вносят существенный вклад в общую долговечность вязкоупругого тела.

В работе [23] приведенная выше задача исследована в рамках модифицированной модели Леонова – Панасюка (концепция $d = \text{const}$). Расчеты показали, что как и в случае концепции $\sigma = \text{const}$, если для малых зон предразрушения $d/l_0 \ll 1$ инкубационный и переходной периоды вносят незначительный вклад в долговечность вязкоупругого тела, то с увеличением относительных размеров зоны предразрушения этот вклад возрастает и его необходимо учитывать при определении долговечности вязкоупругого тела.

Как следует из анализа полученных результатов, трещина начинает расти с малой скоростью, затем в течение малого интервала времени ее скорость резко возрастает и в дальнейшем во время переходного периода остается близкой к постоянной. В конце переходного периода трещина плавно переходит в квазистационарное развитие (основной период) и лишь на малом интервале времени при приближении к критической длине начинается ее быстрое спонтанное развитие.

В работах [23, 25] приведено решение аналогичной задачи для модели Леонова – Панасюка – Баренблатта, когда напряжения в зоне предразрушения распределены по линейному и нелинейному законам.

Для конкретизации нелинейное распределения напряжений выбрано в форме

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{L - |x|}{L - l} \right)^{3/2} \right] \quad (L = l + d). \quad (3.3.3)$$

Это распределение напряжений в первом приближении соответствует контуру зоны предразрушения вблизи ее вершины в форме $v = A\xi^{3/2}$, что хорошо согласуется с наблюдениями за интерференционной картиной в РММА [5].

Была проведена оценка долговечностей вязкоупругого тела с трещиной при различных законах распределения напряжений в немалой зоне предразрушения. Расчеты показали, что в этих случаях, также как и в предыдущих, вклад инкубационного и переходного периодов может быть сравним с длительностью основного периода медленного роста трещины.

Результаты расчетов долговечности при задании различных законов распределения напряжений в зоне предразрушения отличаются между собой, и этот факт (на первый взгляд) ставит исследователя в весьма затруднительное положение, поскольку для определения долговечности тела с трещиной необходимо знать характеристики (закон) распределения напряжений в зоне предразрушения.

Следует отметить, что в последнее время появились экспериментально-численные методы определения таких законов распределения напряжений для вязкоупругих тел различной природы [70], однако, использование этих зависимостей для решения основной задачи о докритическом развитии трещины представляет значительные трудности.

Возникает вопрос: нельзя ли при расчетах долговечности заменить сложный характер распределения напряжений в зоне предразрушения более простым, например, $\sigma = \tilde{\sigma} = \text{const}$, где $\tilde{\sigma}$ является некоторым усредненным значением истинных напряжений в этой области.

В работе [23] приведены такие расчеты, когда усреднение выполнено по формуле

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{d} \int_l^L \sigma(x) dx. \quad (3.3.4)$$

Полученные численные результаты показали, что при таком усреднении закономерности изменения величин долговечностей при линейном и нелинейном распределениях напряжений хорошо согласуются с результатами расчетов при равномерном распределении осредненных напряжений $\tilde{\sigma}$. При этом максимальная относительная погрешность при таком осреднении невелика и значительно убывает с уменьшением размера зон предразрушения.

В связи с этим можно сделать следующий вывод: для приближенного определения долговечности вязкоупругой пластины с трещиной можно моделировать зону предразрушения разрезом с приложенными на его берегах равномерно распределенными сжимающими напряжениями $\sigma = \tilde{\sigma}$, являющимися некоторыми усредненными значениями истинных напряжений в этой области.

Развитие трещин с немалыми зонами предразрушения в вязкоупругих изотропных и анизотропных пластинах под действием переменных нагрузок. В статье [106]

на основе теории [20] (см. разделы 3.1 и 3.2) исследуется длительное разрушение изотропной вязкоупругой пластины вследствие медленного докритического роста имеющейся в ней микротрещины (немалая зона предразрушения) вследствие растяжения монотонно возрастающими или циклическими внешними нагрузками, нормальными к линии распространения трещины. Исследования проводятся в рамках теории Больцмана – Вольтерра для резольвентных интегральных операторов с разностными ядрами, описывающих деформирование

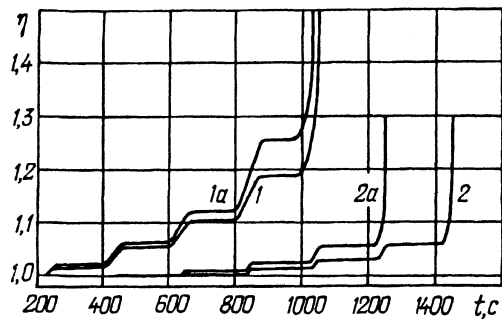


Рис. 3.3.1

материала, реологические свойства которого изменяются со временем. Численные расчеты проведены для резольвентных ограниченных операторов с разностным ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова. Изучена кинетика роста трещин с концевыми зонами, соизмеримыми с их длиной (микротрещин), когда введение коэффициентов интенсивности напряжений теряет смысл и дано сравнение с результатами расчетов для трещин с малыми зонами предразрушения (макротрещин), когда справедлива концепция тонкой структуры конца трещины и возможно введение коэффициентов интенсивности напряжений.

В работе [107] на основе модифицированной модели разрушения Леонова – Панасюка в рамках концепции постоянства размера области предразрушения у фронта продвигающейся трещины исследуется длительное разрушение вязкоупругой ортотропной пластины вследствие докритического развития имеющейся в ней прямолинейной сквозной трещины с немалой зоной предразрушения (микротрещины), расположенной вдоль одной из осей ортотропии. Описывается развитие трещины вследствие длительного действия на пластину равномерно распределенных монотонно возрастающих и циклических внешних нагрузок, нормальных плоскости распространения трещины. Исследования проводятся в рамках теории Больцмана – Вольтерра для резольвентных интегральных операторов разностного типа, описывающих деформирование материала. Для определения аналитического вида ядра нерациональной функции от линейной комбинации вышеупомянутых интегральных операторов применен метод операторных цепных дробей, разработанный в работах [23, 85]. Численные расчеты проведены для резольвентных ограниченных операторов с разностным ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова. Изучена кинетика роста трещин с концевыми зонами, соизмеримыми с их длиной (микротрещин), когда введение коэффициентов интенсивности напряжений теряет смысл, и дано сравнение результатов расчетов для трещин с малыми зонами предразрушения (макротрещин), когда справедлива концепция тонкой структуры конца трещины и возможно введение коэффициентов интенсивности напряжений.

На рис. 3.3.1 представлены расчеты кинетики роста трещин для двух полимерных ортотропных композиционных материалов (кривая 1 – композит на основе полиэтиленового связующего, кривая 2 – композит аналогичной структуры на основе эпоксидной смолы); для циклической нагрузки (эти результаты качественно соответствуют экспериментальным данным, полученным в работе [138]).

$$p(t) = 1 + \gamma \sin \omega t; \quad \gamma = 0, 1; \quad \omega = 10^{-2} \cdot \pi \text{ (Гц)}$$

при изменении нормализованной полудлины трещины $\eta = l / l_0$ ($2l$ – длина трещины, $2l_0$ – ее начальное значение), для двух значений параметра $\eta^* = l_* / l_0$, где $2l_*$ – критическая длина трещины.

Исследование процесса расклинивания вязкоупругого тела с трещиной жестким клином. В работах [62, 90, 92, 93] в рамках плоской задачи линейной теории вязкоупругости исследовано докритическое развитие полубесконечной трещины с немалой зоной предразрушения d_0 в изотропных и ортотропных вязкоупругих материалах, вызванное расклиниванием жестким клином неубывающей во времени толщины $2h(t)$, постоянной по его длине (рис. 3.3.2).

Все исследования проведены на основе теории докритического развития трещин, изложенной в разделах 3.1 и 3.2 в рамках концепции $d = \text{const}$.

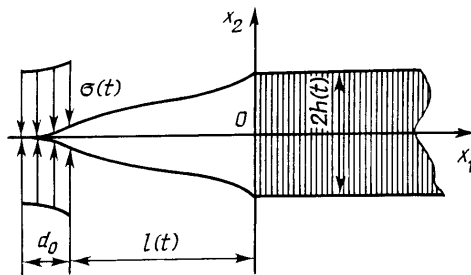


Рис. 3.3.2

Расположим прямоугольную систему координат $x_1 O x_2$ следующим образом: ось x_1 проходит через точку смыкания берегов трещины параллельно сторонам клина, разделяя его толщину пополам; начало координат O расположено на передней поверхности клина (рис. 3.3.2). Примем, что ось x_1 является линией упругой симметрии материала рассматриваемого тела.

Запишем реологические уравнения, соответствующие обобщённому закону Гука для линейно-вязкоупругого тела, в виде

$$\varepsilon_{11} = D_{11}^* \sigma_{11} + D_{12}^* \sigma_{22}; \quad \varepsilon_{22} = D_{12}^* \sigma_{11} + D_{22}^* \sigma_{22}; \quad \gamma_{12} = D_{66}^* \tau_{12}, \quad (3.3.5)$$

где D_{ij}^* – линейные интегральные операторы Вольтерра второго рода, которые могут быть выражены через вязкоупругие операторы, соответствующие техническим упругим постоянным ортотропного материала следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= (1 - \nu_{13} \nu_{31} \eta) / E_1^*; \quad D_{12}^* = -(\nu_{12} - \nu_{13} \nu_{32} \eta) / E_1^*; \\ D_{22}^* &= (1 - \nu_{23} \nu_{32} \eta) / E_2^*; \quad D_{66}^* = 1 / G_{12}^*, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где $\eta = 0$ в случае обобщённого плоского напряжённого состояния и $\eta = 1$ в случае плоской деформации, а параметры ν_{ij} приняты не зависящими от времени.

Для удобства записи введём вспомогательные операторы

$$E_1'^* = \frac{E_1^*}{1 - \nu_{13} \nu_{31} \eta}; \quad E_2'^* = \frac{E_2^*}{1 - \nu_{23} \nu_{32} \eta}$$

и постоянную

$$\nu_{12}' = \frac{\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32} \eta}{1 - \nu_{13} \nu_{31} \eta}. \quad (3.3.7)$$

Резольвентные интегральные операторы Вольтерра запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1'^*} &= \frac{1}{E_1'} (1 + \lambda_1 R^*(\beta_1)); \quad \frac{1}{E_2'^*} = \frac{1}{E_2'} (1 + \lambda_2 R^*(\beta_2)); \\ \frac{1}{G_{12}^*} &= \frac{1}{G_{12}} (1 + \lambda_3 R^*(\beta_3)) \left(E_1' = \frac{E_1}{1 - \nu_{13} \nu_{31} \eta}; \quad E_2' = \frac{E_2}{1 - \nu_{23} \nu_{32} \eta} \right), \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

где E_i' ($i = 1, 2$) – мгновенные вспомогательные постоянные материала; λ_i , β_i – реологические параметры, которые определяются из опытов на ползучесть

$$R^*(\beta_i) f = \int_0^t R(t - \tau, \beta_i) f(\tau) d\tau. \quad (3.3.9)$$

Граничные условия вязкоупругой задачи для нижней полуплоскости тела запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x_1 \leq -l(t) - d_0; \\ \sigma_{22} &= \sigma(t), \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad -l(t) - d_0 < x_1 \leq l(t); \\ \sigma_{22} &= \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad -l(t) < x_1 \leq 0; \\ v &= -h(t), \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x_1 < \infty, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где v – перемещение в направлении оси x_2 .

Рассмотрим сначала задачу в упругой постановке. Применяя метод Галина, найдём, что при $-l - d \leq x_1 \leq 0$

$$v_1|_{x_2=0} = \frac{2A\sigma}{\pi} \sqrt{x_1(-x_1 - l - d)} \arctg \sqrt{d/l} - \frac{A\sigma}{\pi} (x_1 + l) \ln \frac{\sqrt{(x_1 + l + d)l} + \sqrt{-dx_1}}{\sqrt{(x_1 + l + d)l} - \sqrt{-dx_1}}, \quad (3.3.11)$$

где функция упругих постоянных рассматриваемого материала

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu'_{12}}{E'_1}\right)\frac{1}{E'_2} + 2\sqrt{\frac{1}{E'_1}\left(\frac{1}{E'_2}\right)^{1.5}}}; \quad (3.3.12)$$

$$v_2|_{x_2=0} = -\frac{2}{\pi}h(t)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x_1+l+d}{-x_1}}. \quad (3.3.13)$$

Как следует из результатов работы [23], принцип Вольтерра применим к решению вязкоупругого аналога задачи для v_1 в случае возрастания $d(t)$. Поскольку выражение для $v_2|_{x_2=0}$ не зависит от упругих постоянных материала, возможность применения принципа Вольтерра к уравнению (3.3.13) очевидна. Найденное с помощью принципа Вольтерра решение для вязкоупругого перемещения границы нижней полуплоскости представим в виде

$$v|_{x_2=0} = \frac{A^*\sigma}{\pi} \left\{ 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{d_0}{l}}\sqrt{-x_1(x_1+l+d_0)} - \right. \\ \left. -(x_1+l)\ln\frac{\sqrt{(x_1+l+d_0)}l+\sqrt{-d_0x_1}}{\sqrt{(x_1+l+d_0)}l-\sqrt{-d_0x_1}} \right\} - \frac{2}{\pi}h(t)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x_1+l+d_0}{-x_1}}, \quad (3.3.14)$$

где A^* – функция операторов вязкоупругости, определяемая из выражений (3.3.8) и (3.3.12).

Рассмотрим поведение трещины в инкубационный период развития [20]. В этом случае трещина раскрывается без увеличения длины, т.е. $l(t) = l_0 = \text{const}$.

Переформулируем задачу следующим образом: будем искать такой предельный закон роста толщины клина $h = h_s(t)$, при котором в каждый момент времени раскрытие в вершине трещины – критическое. В таком случае для любого другого закона роста толщины клина $h = h(t)$, при котором $h < h_s(t)$ трещина не достигает такого состояния, когда возможно увеличение её длины.

Применяя условие плавности смыкания берегов трещины и критерий критического раскрытия в вершине трещины $(2v|_{x_2=0, x_1=-l(t)} = -\delta_{lc})$ к уравнению (3.3.14), получаем [6]

$$\frac{h_s(t)}{[l_0 + d_0]\operatorname{arctg}\sqrt{d_0/l_0} + \sqrt{d_0l_0}} = \frac{h_s(t)}{\sqrt{d_0l_0}} - \frac{\pi\delta_{lc}}{4\sqrt{d_0l_0}\operatorname{arctg}\sqrt{d_0/l_0}}. \quad (3.3.15)$$

Поскольку выражение вида $h_s(t) = \text{const}$ является решением уравнения (3.3.14), приходим к выводу, что любое достижение законом роста толщины клина $h = h(t)$ некоторого значения, определяемого величинами l_0 , d_0 и δ_{lc} , приводит к окончанию инкубационного периода развития трещины и, как следствие, увеличению длины трещины. При этом критическое значение толщины клина может быть найдено либо из уравнения (3.3.15), либо на основании решения упругого аналога рассматриваемой вязкоупругой задачи.

Перейдём к рассмотрению поведения трещины в переходный период её развития. Применяя условие плавности смыкания берегов трещины и критерий критического раскрытия в вершине трещины, получим [93]

$$\frac{1}{\sqrt{d_0 l(t)} \operatorname{arctg} \sqrt{d_0 / l(t)}} (A^*)^{-1} \cdot \left[h(t) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d_0}{l(t)}} - \frac{\pi \delta_c}{4} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{d_0 + l(t)}}{(d_0 + l(t)) \operatorname{arctg} \sqrt{d_0 / l(t)} + \sqrt{d_0 l(t)}} (A^*)^{-1} \cdot \frac{h(t)}{\sqrt{d_0 + l(t)}} \quad (3.3.16)$$

для поиска длины трещины $l(t)$.

Уравнение (3.3.16) является сложным интегральным уравнением относительно функции времени $l = l(t)$ и его аналитическое решение в общем случае представляется затруднительным. Предложим численный метод решения этого уравнения.

В работе [93] рассмотрено развитие трещины в условиях плоского напряжённого состояния в полимерном композитном материале с характеристиками, определенными на основе экспериментальных данных в работе [28].

Начальное отношение длины зоны предразрушения к длине трещины принято равным 0,2. Используя приближение третьего порядка точности для операторной функции $(A^*)^{-1}$, получим графики изменения безразмерного параметра $l(t)/l(0)$, показанные на рис. 3.3.3. При этом кривая 1 на рисунке соответствует закону роста толщины клина $h(t) = h(0)(1 + 0,0002t)$, а кривая 2 – закону $h(t) = h(0)(1 + 0,0005t)$. Переходной период роста трещины заканчивается в первом случае в момент времени $t = 483$ с, а во втором – $t = 192$ с. Также отметим, что вязкоупругие свойства материала проявляются в большей мере при более медленном росте толщины клина.

В работе [91] на основе теории, изложенной в разделах 3.1 и 3.2, получены результаты в задаче об исследовании закрытия трещины в слоистом композите с вязкоупругим связующим и стекловолоконистым наполнителем для равного объемного содержания двух различных слоев. Поскольку в связи с уменьшением длины трещины принцип Вольтерра не применим, решение в этой работе было получено на основе уравнений линейной теории вязкоупругости, сформулированных Больцманом [60]. Исследованы решения для разных значений объемного содержания наполнителя в слоях типа «1» ($C_1^{(1)}$) и «2» ($C_1^{(2)}$). Начальное значение отношения l к d принималось равным 0,1. Были выполнены расчеты для аппроксимаций второго и третьего порядков точности функции A^* (в случае $C_1^{(1)} = 0$ и $C_1^{(2)} = 0$ (изотропный материал связующего без наполнителя) было получено точное решение. Относительная точность полученных решений порядка 10^{-5} .

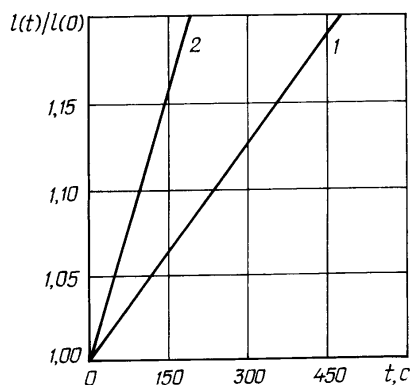


Рис. 3.3.3

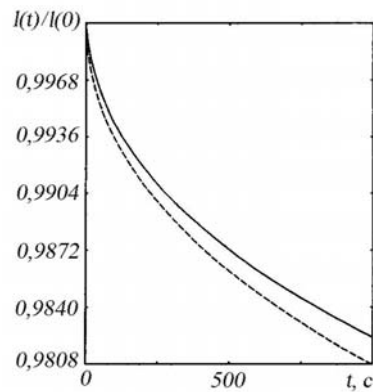


Рис. 3.3.4

Результаты расчетов представлены на рис. 3.3.4. Пунктирная линия соответствует приближенному подходу, не учитывающему некоторых вязкоупругих свойств связующего. Сплошная линия – результаты, полученные на основе полного учета вязкоупругих свойств материала и $C_1^{(1)} = 0,2, C_1^{(2)} = 0,5$. В работе [91] приведены данные, позволяющие судить о точности использованного приближения. Относительная ошибка на рассмотренном интервале времени между приближениями второго и третьего порядка точности составила примерно $2,6 \times 10^{-6}$.

Полученные данные указывают на то, что среди композитов с разными параметрами армирования более значительное закрытие будет наблюдаться в композитах с меньшим армированием для одинакового начального значения отношения $d(0)/l(0)$.

3.4. Медленный рост внутренних плоских круговых трещин (penny-shaped cracks) в анизотропных вязкоупругих массивах при постоянных и переменных нагрузках. В работе [112] исследуется докритический рост плоской круговой трещины с немалой зоной предразрушения под действием постоянных во времени нагрузок, нормальных плоскости расположения трещины (mode I) в трансверсально-изотропном массиве, моделирующем композиционный материал.

Для исследования длительного распространения трещины в рамках теории докритического роста трещины в анизотропной вязкоупругой среде используется модифицированная модель Леонова – Панасюка [20, 23] с постоянной шириной кольцеобразной зоны предразрушения. Примем следующие допущения: 1) плоскость распространения трещины совпадает с плоскостью изотропии исследуемого трансверсально-изотропного материала; 2) при распространении трещина остается круговой в плане; 3) зона предразрушения моделируется кольцеобразным разрезом на продолжении трещины; к берегам этого разреза приложены самоуравновешенные напряжения; 4) ширина кольцеобразной зоны предразрушения остается постоянной ($d = \text{const}$) в течение всего времени распространения трещины. В работе полагается, что размер зоны предразрушения является достаточно большим, что не позволяет введение коэффициентов интенсивности напряжений для описания напряженного состояния вблизи вершины трещины.

Рассмотрим трещину, которая расположена в плоскости изотропии исследуемого трансверсально-изотропного массива и находится на значительном расстоянии от его границ (рис. 3.4.1). К массиву приложены равномерно распределенные усилия интенсивности p , действие которых направлено по нормали к плоскости расположения трещины. В этом случае вязкоупругое раскрытие трещины запишется в виде

$$\delta(r, t) = \tilde{L}^* \delta_0 [p, r, a(t)]; \quad \tilde{L}^* = L^* / L, \quad (3.4.1)$$

где

$$\delta_0(p, r, a) = La_0 p \zeta(r/a_0, a/a_0)$$

– упругое раскрытие трещины радиуса $a(t)$ в точке r , $a_0 = a(0)$; функция $\zeta(\xi, \eta)$ определяется соотношением [10]

$$\zeta(\xi, \eta) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\eta}{\rho} + 1 \right) \left(2 \frac{\eta}{\rho} + 1 \right)^{-1/2} \int_{\arcsin \frac{\eta}{\eta + \rho}}^{\arcsin \frac{\eta}{\xi}} \sqrt{\eta^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (3.4.2)$$

для $0 < \eta \leq \xi \leq \eta + \rho$; $\rho = d/a_0$ – безразмерная ширина кольцеобразной зоны предразрушения.

Здесь \tilde{L}^* – функция от интегральных операторов E_{ij}^* , характеризующих вязкоупругие свойства материала ($\tilde{L}^* = F(E_{ij}^*)$).

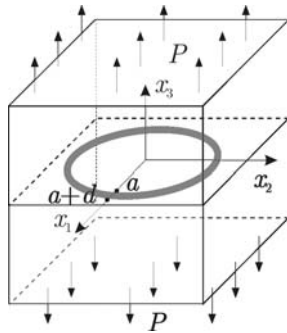


Рис. 3.4.1

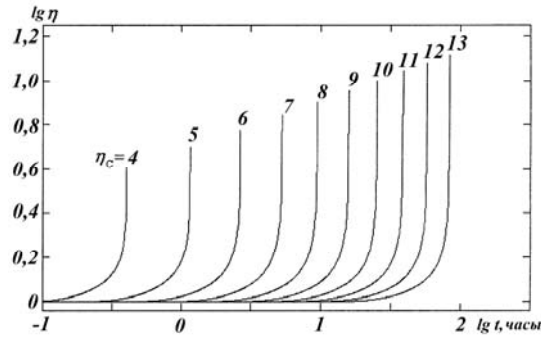


Рис. 3.4.2

Далее будем исходить из критерия критического раскрытия трещины, который в этом случае примет вид

$$\delta(x, t)|_{x=a(t)} = \delta_{lc}. \quad (3.4.3)$$

Выполнение условия (3.4.3) соответствует инициации роста трещины. Применение критерия критического раскрытия трещины с использованием концепции $d = \text{const}$ к описанию кинетики распространения трещины в полимерных материалах и композитах на их основе экспериментально обосновано в работе [28].

Согласно теории докритического развития трещины в вязкоупругих средах [20, 23], на каждом из периодов докритического роста зависимость радиуса трещины от времени неявным образом определяется интегральными уравнениями (см. раздел 3.2)

$$\delta(p(t), a_0) + \int_0^{t_*} R(t_* - \tau) \delta(p(\tau), a_0) d\tau = \delta_{lc}; \quad (3.4.4)$$

$$\delta[p(t), a(t)] + \int_0^{t_*} R(t - \tau) \delta(p(\tau), a(t), a_0) d\tau + \int_{t_*}^t R(t - \tau) \delta[p(\tau), a(t), a(\tau)] d\tau = \delta_{lc}, \quad (3.4.5)$$

$$\delta[p(t), a(t)] + \int_{t'}^t R(t - \tau) \delta(p(\tau), a(t), a(\tau)) d\tau = \delta_{lc}, \quad (3.4.6)$$

где величина t' является решением уравнения $a(t) - a(t') = d$.

Решая последовательно эти уравнения, можно исследовать кинетику развития трещины и определить долговечность вязкоупругого композита, за которую будем принимать момент окончания стабильного роста трещины.

На рис. 3.4.2 показаны кинетические кривые роста трещины $\eta - t$ ($\eta = a/a_0$) в вязкоупругом композите (стеклопластике на основе полиэтилена), когда его вязкоупругие свойства описаны интегральными операторами с ядрами Работнова (3.2.21) для различных параметров разрушения $\eta_c = a_*/a_0$ (a_0 и a_* – соответственно, начальный и критический радиусы трещины).

Рост трещин при переменных нагрузках. В большинстве работ [23] исследовалась кинетика развития трещин при длительном действии постоянных нагрузок.

В работе [105] на основе теории длительного разрушения в рамках концепции постоянства размера области предразрушения у фронта продвигающейся трещины исследуется длительное разрушение трансверсально-изотропного вязкоупругого мате-

риала вследствие медленного докритического роста имеющейся в нем плоской круговой в плане макротрещины нормального отрыва под действием циклической нагрузки. При этом полагаем, что частота нагружения не высока, и поэтому можно не учитывать влияние усталости материала на развитие трещины. Исследования проводились в рамках теории Больцмана – Вольтерра для интегральных операторов, описывающих трансверсальную изотропию вязкоупругих деформационных свойств рассматриваемого материала, которые являются резольвентными ограниченными операторами разностного типа.

Рассмотрено разрушение массива из трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, ослабленного внутренней трещиной нормального отрыва диаметром $2a$ с кольцевой зоной предразрушения, расположенной в плоскости изотропии, подверженного растяжению равномерно распределенными, нормальными к плоскости расположения трещины, усилиями интенсивности (рис. 3.4.1)

$$p(t) = p_0(1 + \gamma \sin \omega t), \quad (3.4.7)$$

где $\gamma = \Delta p / p_0$ – параметр нагружения; ω – частота нагружения.

Рассмотрим осесимметричную задачу, когда трещина расположена в плоскости изотропии и, распространяясь, не выходит из этой плоскости, оставаясь круговой в плане.

Согласно принципу Вольтерра уравнение контура макротрещины в трансверсально-изотропном вязкоупругом материале можно представить в виде [10, 108]

$$\delta(x, t) = L^* \delta_0(\sigma(t), x, a(t)) \quad (3.4.8)$$

$$\left[\delta(\sigma(t), x, a(t)) = L_0 \delta_0(\sigma(t), x, a(t)) = 4L_0 d / \pi \sigma(t) F((x - a(t)) / d) \right] \quad (3.4.9)$$

– упругое раскрытие трещины радиуса $a(t)$ в точке x ($a(t) \leq x \leq a(t) + d$); d – размер зоны предразрушения:

$$\left(\sigma(t) = \frac{\sqrt{\pi} K_I}{\sqrt{8d}}; \quad F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}; \right. \\ \left. L^* = F(E_{ij}^*) = \sqrt{(1+\nu_{13}^*) / (E_{11}^* E_{33}^*)} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{2 \left(\sqrt{(1-\nu_{12}^{*2})(1-\nu_{13}^* \nu_{31}^*)} E_{11}^* / E_{33}^* - (1+\nu_{12}^*) \nu_{13}^* \right) + E_{11}^* / G_{13}^*} \right). \quad (3.4.10)$$

Если вязкоупругие свойства материала массива можно описать резольвентными операторами

$$\frac{1}{E_{11}^*} = \frac{1}{E_{11}^0} (1 + \lambda_{11} R^*(\beta_{11})); \quad \frac{1}{E_{33}^*} = \frac{1}{E_{33}^0} (1 + \lambda_{33} R^*(\beta_{33})); \\ \frac{1}{G_{13}^*} = \frac{1}{G_{13}^0} (1 + \lambda_G R^*(\beta_G)); \quad (3.4.11)$$

$$\nu_{12}^* = \nu_{12}^0 (1 + \lambda_{12} R^*(\beta_{12})); \quad \nu_{13}^* = \nu_{13}^0 (1 + \lambda_{13} R^*(\beta_{13})); \quad \nu_{31}^* = \nu_{31}^0 (1 + \lambda_{31} R^*(\beta_{31}));$$

(реологические параметры $1/E_{11}^0$, $1/E_{33}^0$, $1/G_{13}^0$, ν_{12}^0 , ν_{13}^0 , ν_{31}^0 , λ_{11} , λ_{33} , λ_G , λ_{12} , λ_{13} , λ_{31} , β_{11} , β_{33} , β_G , β_{12} , β_{13} , β_{31} определяются из экспериментов на ползучесть), то для расшифровки иррациональной функции (3.4.10) можно использовать метод операторных цепных дробей [23], согласно которому (3.4.10) можно аппроксимировать выражением

$$L^* = L_0 \left(1 + \sum_{i=1}^L k_i R^*(\lambda_i) \right); \quad R^*(\lambda_i) \cdot 1 = \int_{t'}^t R(t-\tau, \lambda_i) d\tau. \quad (3.4.12)$$

Расчеты проведены для интегрального оператора с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова (3.2.21).

Далее численными методами было проведено решение уравнений (3.4.4) – (3.4.6) для малых зон предразрушения для разных значений параметра $\Delta = K_I^0 / K_I^*$, где K_I^0 и K_I^* – соответственно, начальное и критическое значение коэффициентов интенсивности напряжений (SIF).

На рис. 3.4.3 проиллюстрирована зависимость кинетики роста трещины от начального параметра Δ . Зависимость $t - a(t) / a_0$ приведена для следующих параметров: $\gamma = 0,1$, $\omega = \pi / 500$ Гц, $\rho = 0,05$, кривая 1 – $\Delta = 0,72$, кривая 2 – $\Delta = 0,71$, кривая 3 – $\Delta = 0,7$.

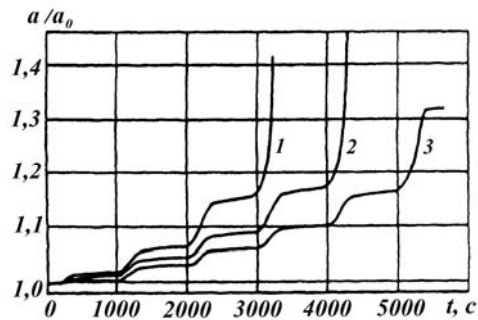


Рис. 3.4.3

В работах [10, 104, 108] в аналогичной постановке исследованы задачи о докритическом развитии внутренних круговых трещин (penny-shaped cracks) в анизотропных вязкоупругих массивах, подверженных растяжению равномерно распределенными усилиями $p(t) = p_0(1 + at^z)$, нормальными к плоскости расположения трещин, причем в работах [104, 108] рассмотрен трансверсально-изотропный материал, а в работе [10] – материал с цилиндрической анизотропией.

3.5. Моделирование и исследование процесса разрушения вязкоупругих ортотропных тел при двухосном нагружении. Моделирование процесса разрушения материалов при двухосном нагружении имеет свои специфические особенности, на которые обращалось внимание во многих исследованиях [10, 72, 88]. Одной из таких особенностей является тот факт, что коэффициент интенсивности напряжений (SIF), J – интеграл и раскрытие δ_I в вершине трещины, определяемые для mode I на основе известных моделей и критериев Гриффитса – Ирвина, Черепанова – Райса, Леонова – Панасюка – Дагдейла, Баренблатта, не зависят от составляющей нагрузки, действующей параллельно трещине, и, следовательно, характеристики разрушения, рассчитанные по этим моделям, не зависят от двухосности нагружения, хотя этот результат не соответствует многочисленным экспериментальным данным (см. библиографию в [88]).

Поскольку все перечисленные выше модели трещин как в случае изотропных, так и анизотропных вязкоупругих материалов, не позволяют учесть наличие компоненты внешнего нагружения, действующей параллельно плоскости расположения трещины, то в большинстве исследований по механике разрушения вязкоупругих тел рассматривались трещины нормального отрыва при одноосном растяжении. Однако, как показывают эксперименты [87, 88], даже в случае статического нагружения двухосность оказывает существенное влияние на предельное состояние тел, ослабленных трещинами, и, следовательно, можно ожидать, что подобный эффект тем более будет иметь место при длительном воздействии двухосного нагружения.

В работе [86] предлагается модель трещины в ортотропном материале, основанная на обобщении модели трещины Леонова – Панасюка – Дагдейла на случаи ортотропных материалов [20] и позволяющая эффективно решать задачи механики разрушения вязкоупругих тел в условиях двухосного нагружения.

Модель трещины в ортотропном вязкоупругом материале. Будем полагать, что деформативные свойства материала описываются линейными соотношениями вплоть до разрушения. К таким материалам относится большой класс полимерных композитных материалов – стеклопластики, углепластики, боропластики и др. Как показывают эксперименты [10, 28], при разрушении таких материалов образуются узкие зоны предразрушения, внутри которых произошло разрушение менее прочного связующего и части высокопрочной арматуры.

Будем также полагать, что во всех точках зоны предразрушения достигнуто предельное состояние материала, описываемое критерием прочности общего вида

$$F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0, \quad (3.5.1)$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения; C_i – некоторые определяемые экспериментально постоянные, не зависящие от времени.

При построении модели зоны предразрушения у вершины трещины в тонкой ортотропной вязкоупругой пластине будем исходить из следующих гипотез.

1. Развитие трещины происходит без изменения направления в плоскости ее первоначального расположения.

2. Зоны предразрушения, возникающие вблизи вершин трещины, представляют собой узкие клинообразные области на продолжении трещины и при моделировании могут быть заменены разрезами на продолжении трещины, на берегах которых приложены равномерно распределенные напряжения σ_y^0 .

3. Компоненты тензора напряжений в зоне предразрушения удовлетворяют критерию прочности (3.5.1) и условию непрерывности на фронте трещины.

4. Компоненты тензора напряжений имеют конечное значение во всей области.

Отметим, что для случая изотропных и ортотропных упругих материалов эта модель получила экспериментальное обоснование в работах [87, 88]

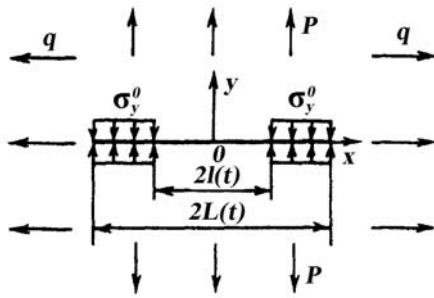


Рис. 3.5.1

Уравнение контура трещины в ортотропной вязкоупругой пластине при двухосном нагружении. Основываясь на данных гипотезах, рассмотрим тонкую пластину, выполненную из ортотропного вязкоупругого материала, которая ослаблена сквозной трещиной длиной $2l(t)$ вдоль одной из осей ортотропии, которая совпадает с осью координат Ox , и находится под длительным воздействием постоянных нагрузок $\sigma_x^\infty = q$, $\sigma_y^\infty = p > 0$ (рис. 3.5.1).

Возникающие вблизи вершин трещины под действием внешней нагрузки зоны предразрушения заменим дополнительными разрезами длиной $d(t)$ на продолжении трещины, на берегах которых действуют некоторые равномерно распределенные самоуравновешенные сжимающие напряжения σ_y^0 . Поскольку эти напряжения определяются на основании условия (3.5.1), постоянного во времени, то они также не зависят от времени и могут быть определены в момент $t = 0$ из решения соответствующей задачи теории упругости. Воспользовавшись решением аналогичной задачи для плоскости с трещиной, полученным в [87], находим, что напряжения σ_x^0, σ_y^0 в зоне предразрушения определяются для данной задачи в результате решения системы двух линейных уравнений

$$\sigma_x^0 = \beta(\sigma_y^0 - p) + q; \quad F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, C_i) = 0, \quad (3.5.2)$$

где $\beta = \sqrt{E_1 / E_2}$, а раскрытие трещины в точке $x \in [l, L]$ определяется соотношением

$$\delta(x, l, L) = -\frac{2\sigma_y^0 T}{\pi} \left\{ -2l \ln \frac{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 - l^2}}{\sqrt{x^2 - l^2}} + \right. \\ \left. + x \ln \frac{L^2 - Ll + \sqrt{L^2 - l^2} \sqrt{L^2 - x^2}}{L^2 + Ll + \sqrt{L^2 - l^2} \sqrt{L^2 - x^2}} + x \ln \frac{x+l}{x-l} \right\}, \quad (3.5.3)$$

где

$$T = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \left\{ 2 \left[\left(\frac{E_1}{E_2} \right)^{1/2} - \nu_{12} \right] + \frac{E_1}{E_{12}} \right\}^{1/2}.$$

Таким образом, необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние вязкоупругой ортотропной пластины с разрезом длиной $2L(t) = 2(l(t) + d(t))$ вдоль оси ортотропии Ox при следующих граничных условиях:

$$\sigma_y = \begin{cases} 0, & |x| \leq l(t), \quad y = 0; \\ \sigma_y^0, & l(t) < |x| \leq L(t); \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0; \quad v = 0, \quad |x| \geq L(t), \quad y = 0; \quad (3.5.4)$$

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0, \quad |x + iy| \rightarrow \infty.$$

Как показано в [20], для поставленной задачи применим принцип Вольтерра, согласно которому вязкоупругое раскрытие берегов трещины представимо в виде [23]

$$\delta(x, t) = T^* \delta_0(x, t), \quad (3.5.5)$$

где $\delta_0(x, t)$ – функция силовых и геометрических параметров; T^* – функция от интегральных операторов, вид которых определяется соотношениями

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{E_1^* E_2^*}} \left\{ 2 \left[\left(\frac{E_1^*}{E_2^*} \right)^{1/2} - \nu_{12}^* \right] + \frac{E_1^*}{G_{12}^*} \right\}^{1/2}; \quad (3.5.6)$$

$$\delta_0(x, t) = -\frac{2\sigma_y^0}{\pi} \left\{ -2l(t) \ln \frac{\sqrt{[L(t)]^2 - x^2} + \sqrt{[L(t)]^2 - [l(t)]^2}}{\sqrt{x^2 - [l(t)]^2}} + \right.$$

$$\left. + x \ln \frac{[L(t)]^2 - L(t)l(t) + \sqrt{[L(t)]^2 - [l(t)]^2} \sqrt{[L(t)]^2 - x^2}}{[L(t)]^2 + L(t)l(t) + \sqrt{[L(t)]^2 - [l(t)]^2} \sqrt{[L(t)]^2 - x^2}} + x \ln \frac{x + l(t)}{x - l(t)} \right\}, \quad (3.5.7)$$

где E_1^* , E_2^* , G_{12}^* – интегральные операторы Вольтерра II рода.

Экспериментально показано, что для некоторых ортотропных вязкоупругих материалов можно пренебречь ползучестью вдоль осей ортотропии и учитывать только ползучесть при сдвиге, т.е. положить [28, 45]

$$E_1^* \approx E_1^0 = \text{const}; \quad E_2^* \approx E_2^0 = \text{const}; \quad \nu_{12}^* \approx \nu_{12}^0 = \text{const}; \quad 1/G_{12}^* = 1/G_{12}^0 [1 + \lambda R^*(\gamma)], \quad (3.5.8)$$

где E_1^0 , E_2^0 , ν_{12}^0 , G_{12}^0 – мгновенные значения соответствующих характеристик; R^* – резольвентный интегральный оператор вида $R^* f = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau$, $R(t-\tau)$ – ядро

интегрального оператора R^* .

Функцию от интегральных операторов (3.5.6) можно представить в виде разложения в равномерно сходящуюся цепную дробь [76]

$$T^* = T_0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0,25 \lambda^i R^*(\gamma)}{I} \right], \quad (3.5.9)$$

где I – единичный оператор

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1^0 E_2^0}} \left\{ 2 \left[\left(\frac{E_1^0}{E_2^0} \right)^{1/2} - \nu_{12}^0 \right] + \frac{E_1^0}{G_{12}^0} \right\}^{1/2}; \quad \lambda' = \frac{\lambda E_1^0 / G_{12}^0}{\left[\left(E_1^0 / E_2^0 \right)^{1/2} - \nu_{12}^0 \right] + E_1^0 / G_{12}^0}.$$

Удерживая в разложении (3.5.9) необходимое число членов и используя алгебру резольвентных операторов [9], интегральный оператор T^* представим в виде линейной комбинации интегральных операторов

$$T^* = T^0 \left[1 + \sum_{i=1}^N C_i R^*(\gamma_i) \right] \quad (3.5.10)$$

с ядром

$$T(t-\tau) = \sum_{i=1}^N C_i R(t-\tau, \gamma_i), \quad (3.5.11)$$

где $R(t-\tau, \gamma_i)$ – ядра резольвентных операторов $R^*(\gamma_i)$.

Необходимо отметить, что вследствие быстрой сходимости цепных дробей для получения достаточно точного решения достаточно ограничиться учетом нескольких первых членов (3.5.10).

Безопасные нагрузки. Рост трещины, согласно критерию COD (3.1.2), начинается, когда раскрытие берегов трещины в вершинах $|x| = l_0$ ($2l_0$ – начальная длина трещины) достигает предельного значения δ_{lc} ; тогда с учетом (3.5.5) получаем уравнение для определения момента страгивания трещины (или длительности инкубационного периода развития трещины в вязкоупругом теле) в виде [20]

$$\int_0^{l_0} T(\vartheta) d\vartheta = \frac{\delta_{lc}}{\delta(l_0)} - 1, \quad (3.5.12)$$

где $\delta(x) = T_0 \delta_0(x)$ – упругое раскрытие берегов трещины в точке x .

Если внешняя нагрузка постоянна во времени, то решение уравнения (3.5.12) для произвольной нагрузки будет существовать только для тел с неограниченной ползучестью, а для тел с ограниченной ползучестью существует совокупность нагрузок (p_s, q_s) , называемых безопасными, определяющая область нагружения, в которой величина $\delta(l_0, t)$ не может достичь критического значения δ_{lc} даже за сколь угодно большое время, и рост трещины не происходит. В общем случае поле безопасного нагружения определяется соотношением [23]

$$\frac{\delta_{lc}}{\delta(l, p_s, q_s)} = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad (3.5.13)$$

где T_∞ – длительное ($t = \infty$) значение функции $T^* \cdot 1$.

Рассмотрим критерий прочности Мизеса – Хилла

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{B1} \sigma_{B2}} = 1, \quad (3.5.14)$$

где σ_{B1} и σ_{B2} – пределы прочности ортотропного материала в направлениях x , y , соответственно. В качестве ядра интегрального оператора R^* выберем дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова (3.2.21).

В этом случае, учитывая выражение для упругого раскрытия в вершине трещины на основании (3.5.13), поле безопасных нагрузок (p_s, q_s) можно определить соотношением

$$\sigma_y^0(p_s, q_s) \ln \cos \frac{\pi p_s}{2\sigma_y^0(p_s, q_s)} = \frac{T_0}{T_\infty} \delta_{lc}. \quad (3.5.15)$$

Величина δ_{lc} связана с критической нагрузкой при одноосном растяжении $p_*^{(0)}$ соотношением

$$\frac{4T_0\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)l}{\pi} \ln \sec \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} = \delta_{lc}. \quad (3.5.16)$$

Из соотношений (3.5.15), (3.5.16) следует

$$\sigma_y^0(p_s, q_s) \ln \cos \frac{\pi p_s}{2\sigma_y^0(p_s, q_s)} = \frac{T_0}{T_\infty} \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (3.5.17)$$

Задание $p_*^{(0)}$ однозначно определяет длину трещины l_0 и, следовательно, соотношение (3.5.17) определяет совокупность безопасных нагрузок (p_s, q_s) для данной длины трещины.

На рис. 3.5.2 представлены «безопасные кривые» для различных значений $p_*^{(0)} / \sigma_{B2}$: 0,1 (1); 0,4 (2); 0,6 (3); 0,9 (4) для материала со следующими характеристиками: $E_1^0 = 1,533 \cdot 10^9$ Па, $E_2^0 = 2,315 \cdot 10^9$ Па, $G_{12}^0 = 0,3086 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{12}^0 = 0,08$, $\sigma_{B1} / \sigma_{B2} = 0,8$, $\alpha = 0,85$, $\lambda = 0,275 c^{1-\alpha}$, $\gamma = -0,181 c^{1-\alpha}$ (параметры ядра (3.2.21)). Кривая 5 определяет предельное состояние бездефектного материала, определяемое условием (3.5.14). Пунктиром показаны предельные кривые (p_*, q_*) для соответствующих длин трещин, определяемых из уравнения [86]

$$\sigma_y^0(p_*, q_*) \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \sec \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (3.5.18)$$

Как видно, составляющая нагрузка q , действующая вдоль линии расположения p_s трещины, оказывает существенное влияние на величину p_s по сравнению с одноосным растяжением.

Развитие трещины в вязкоупругом теле будет происходить только в области изменения нагрузок, ограниченной кривыми (3.5.17) и (3.5.18). Очевидно, что изменение реологических параметров материала λ и γ оказывают существенное влияние на область безопасного нагружения: увеличение λ при прочих постоянных характеристиках приводит к уменьшению этой области, а увеличение γ — к ее увеличению. Таким образом, подбирая реологические параметры, можно уменьшить область докритического развития трещины.

В работе [59] в аналогичной постановке исследована задача об определении безопасных нагрузок при деформировании вязкоупругой ортотропной пластины, ослабленной периоди-

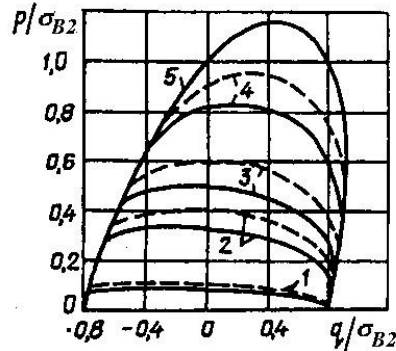


Рис. 3.5.2

ческой системой коллинеарных трещин одинакового размера, с немалыми зонами предразрушения при двухосном нагружении пластины. Система трещин расположена вдоль одной из осей ортотропии, которая совпадает с осью координат Ox с центрами трещин в точках $x_n = \pm 2nD$, $y = 0$. Пластина находится под воздействием однородного двухосного напряжения $\sigma_x = p > 0$, $\sigma_y = q$; исходя из основных положений, сформулированных в предыдущей задаче, в аналитической форме получено соотношение для определения безопасных нагрузок (p_s, q_s) . В работе описаны два возможных механизма разрушения вязкоупругой пластины.

В первом случае возможно мгновенное разрушение пластины при критических нагрузках (p_*, q_*) . В работе [59] получено соотношение для определения этих критических параметров.

Во втором случае существует некоторая совокупность нагрузок (p^c, q^c) , при которых происходит объединение зон предразрушения соседних трещин, т.е. происходит разрушение вязкоупругого тела путем объединения трещин. Эти нагрузки определяются из соотношения

$$\cos \frac{\pi p^c}{2\sigma_y^0(p^c, q^c)} = \sin \frac{\pi \lambda_0}{2D}, \quad (3.5.19)$$

где $2l_0$ – начальная длина трещин; σ_y^0 – нормальное напряжение в зоне предразрушения.

На рис. 3.5.3 показаны: «безопасная» кривая 1; кривая предельных нагрузок – 2 и кривая «объединения зон предразрушения» (3.5.19) – 3 для $p_*^{(1)} / \sigma_{02} = 0,5$; $D/l = 2,0$ для материала со следующими характеристиками: $E_1^0 = 1,533 \cdot 10^9$ Па; $E_2^0 = 2,315 \cdot 10^9$ Па; $G_{12}^0 = 0,3086 \cdot 10^9$ Па; $\nu_{12}^0 = 0,08$; $\alpha = 0,85$; $\lambda = 0,275 c^{1-\alpha}$; $\gamma = -0,181 c^{1-\alpha}$; $\sigma_{01} / \sigma_{02} = 0,8$.

Кривая 4 соответствует критерию прочности (3.5.14).

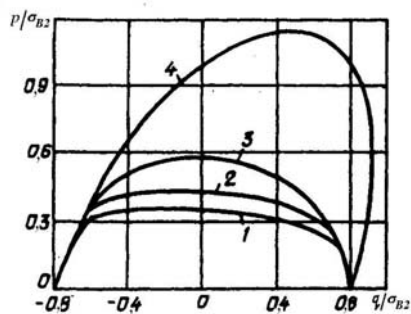


Рис. 3.5.3

Таким образом, завершающее разрушение перемычки в этом случае, как следует из рис. 3.5.3, должно происходить спонтанно, а второй механизм (объединение зон предразрушения) не будет реализован. Рассмотренная задача определяет только первую фазу многоочагового разрушения вязкоупругих тел. Более подробно сам процесс объединения трещин вследствие ползучести вязкоупругих тел будет изложен в следующем разделе.

3.6 Исследования процессов развития систем коллинеарных трещин в вязкоупругих телах и закономерности процесса их объединения (многоочаговое разрушение). Как следует из обзора работ, приведенных выше, большинство исследований развития трещин в вязкоупругих телах посвящено проблемам длительного разрушения одиночных изолированных трещин. Однако на практике существует еще один реальный механизм длительного разрушения вязкоупругих тел – так называемое многоочаговое разрушение, когда в процессе медленного подрастания мелких не опасных трещин происходит их объединение в магистральную трещину критической длины, развитие которой завершает полное разрушение вязкоупругого тела.

В частности, эта проблема обсуждалась на международной конференции ICF-8, которая проходила в Киеве в 1993 году. В конференции, наряду с известными учеными в области механики разрушения, участвовали ведущие специалисты по прочности

многих авиационных КБ (Boeing, Tupoleva, Антонова и др.) в связи с катастрофой одного авиалайнера в начале 90-х годов, вызванной многоочаговым разрушением элементов конструкции, выполненных из полимерных композитных материалов.

Следует отметить, что, несмотря на большую актуальность этой проблемы и судить по научной литературе, полного решения всех задач в этой области, к сожалению, не достигнуто до настоящего времени.

В одной из первых работ по этой проблеме [71] исследовано развитие двух коллинеарных трещин одинаковой длины в изотропной вязкоупругой пластине в рамках модели Дагдейла (концепции $\sigma = \text{const}$) и критерия критического раскрытия трещины (COD). Исследование проводилось на основе решения системы интегральных уравнений докритического развития трещин, приведенных выше в разделе 3.2, численным методом.

Предполагалось, что длины трещин достаточно велики по сравнению с расстоянием между ними, поэтому при расчетах исследован лишь рост трещин в области перемычки между ними, вследствие высокой концентрации напряжений в этой зоне.

В качестве примеров исследованы вязкоупругие среды, описываемые интегральными операторами с ядрами Максвелла и Абеля, а также с экспоненциальным ядром.

Расчеты показали, что разрушение перемычки происходит по двум различным механизмам. В первом случае спонтанный рост трещин начинается в момент, когда часть перемычки еще находится в неповрежденном состоянии. Это происходит, в основном, тогда, когда вязкоупругое раскрытие в вершине трещины близко к δ_{lc} .

При реализации второго механизма происходит стабильный рост трещин, после которого зоны предразрушения стремятся объединиться. Скорость движения зон при этом значительно возрастает. Величина раскрытия трещины в этом случае значительно меньше δ_{lc} . На рис. 3.6.1 приведены расчетные данные, которые соответствуют моменту завершающего разрушения перемычки. Расчеты выполнены для ядра Абеля (3.3.1) при $\lambda = 0,5 \text{ ч}^{1-\alpha}$, $\alpha = 0,7$.

На рис. 3.6.1 показаны зависимости нормированной полудлины перемычки \tilde{a} от времени t (кривая 1) и изменение скорости движения вершины трещины v (кривая 2). Следует отметить, что решение этой задачи также приведено в монографии [23].

В работе [114] предыдущая задача рассмотрена в рамках более широкой постановки, когда исследовалось движение всех четырех вершин двух коллинеарных трещин одинаковой длины (mode I) в изотропной вязкоупругой пластине. Деформирование пластины происходит в условиях плоского напряженного состояния.

Связь между напряжениями и деформациями в линейно вязкоупругом теле представлена в такой форме:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau), \quad (3.6.1)$$

где R_{ijkl} – функции релаксации материала (в случае изотропии независимыми будут лишь две из них).

К пластине на бесконечности приложены равномерно распределенные растягивающие усилия p , нормальные к плоскости расположения трещин.

Как и в предыдущих разделах, при исследовании докритического развития трещин, используется теория длительного разрушения вязкоупругих тел [20, 23], осно-

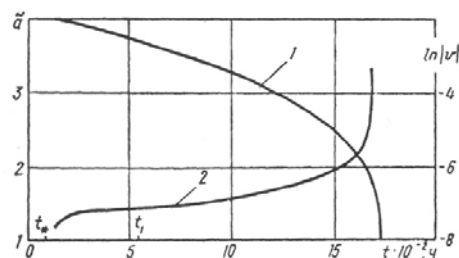


Рис. 3.6.1

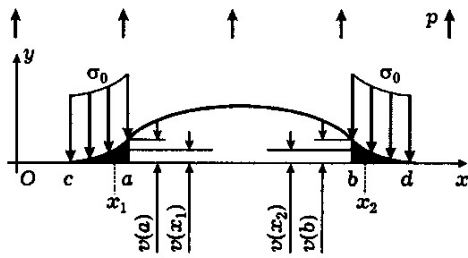


Рис. 3.6.2

где имеет место взаимодействие берегов, в область, где ее нет. Рост трещин при докритическом уровне напряжений сдерживается материалом в зонах нелинейных деформаций (process zones) до тех пор, пока вертикальные перемещения берегов в концах трещин не превзойдут критического значения (COD) $\delta_{ic} = 2v^*$.

Таким образом, определение положения концов трещин как функций времени состоит в решении уравнений, которые определяются путем приравнивания вертикального смещения, как функции времени, к своему критическому значению.

В работе, исходя из упругого решения этой задачи [113] и принципа Вольтера, получена функция перемещения в форме

$$v(x, t) = l(t)v_1(x, a_0, b_0) + \int_0^t l(t-\tau) \frac{d}{d\tau} v_1[x, a(\tau), b(\tau)] d\tau, \quad (3.6.2)$$

где $v_1(x, a, b) = L_0 p v(x, a, b)$, $l(t) = L(t) / L_0$ – нормированная функция ползучести.

В этом случае координаты концов трещин, как функций времени, определяются из системы интегро-дифференциальных уравнений

$$v(a(t), t) = v^*; v(b(t), t) = v^*. \quad (3.6.3)$$

Эту систему уравнений решаем численным методом.

В качестве примера ниже приведены расчеты для вязкоупругого аналога модуля Юнга в форме [114]

$$E(t) = E_\infty + \sum_i a_i E_{\delta, i}(-\delta_i t^\delta), \quad (3.6.4)$$

где E_∞ – длительное значение $E(t)$, $E_{\delta, \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / [\Gamma(\delta n + \gamma)]$ – функция Миттаг – Леффлера; Γ – гамма-функция Эйлера.

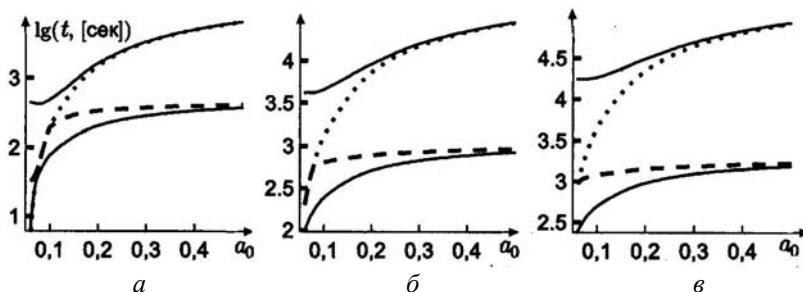


Рис. 3.6.3

На рис. 3.6.3 приведены характерные моменты развития трещин: длительность инкубационного периода (нижняя сплошная линия); момент времени объединения трещин (пунктирная линия); время начала распространения трещин во внешние сто-

роны (штриховая кривая); общее время докритического роста трещин в часах (верхняя сплошная линия). На рисунках приведены обозначения таких параметров: a_0 – начальное положение левого конца трещины (рис. 3.6.2), при этом полагается, что положение правого конца – $b_0 = a_0 + 1$; ρ_2 – нормализованный силовой параметр, равный σ_0 / p (σ_0 – напряжения в зоне предразрушения); на рисунках, соответственно: а) $\rho_2 = 6$, б) $\rho_2 = 8$, в) $\rho_2 = 10$.

Анализируя результаты, приведенные в работе, в частности, на рис. 3.6.3, следует отметить, что для высоких уровней внешнего нагружения (малых ρ_2) и малых начальных расстояниях между трещинами (малых a_0) момент времени разрушения перемычки может наступить раньше, чем момент начала распространения вне перемычки. Этот случай как раз и был исследован в работах [23, 71] и проанализирован выше.

С увеличением размера начальной перемычки между трещинами момент начала распространения трещин во внешние стороны приближается по величине к длительности инкубационного периода (сближение штриховых и нижних сплошных кривых на рис. 3.6.3), а момент соединения трещин – до длительности всего периода докритического роста (сближение пунктирных кривых и верхних сплошных кривых на рис. 3.6.3).

Таким образом, при достаточном начальном удалении двух коллинеарных трещин каждая из этих трещин может развиваться в обе стороны, причем момент разрушения перемычки может соответствовать или окончанию их докритического развития, или началу динамического разрушения вязкоупругого тела, в зависимости от величины внешних нагрузок и реологических параметров вязкоупругого материала.

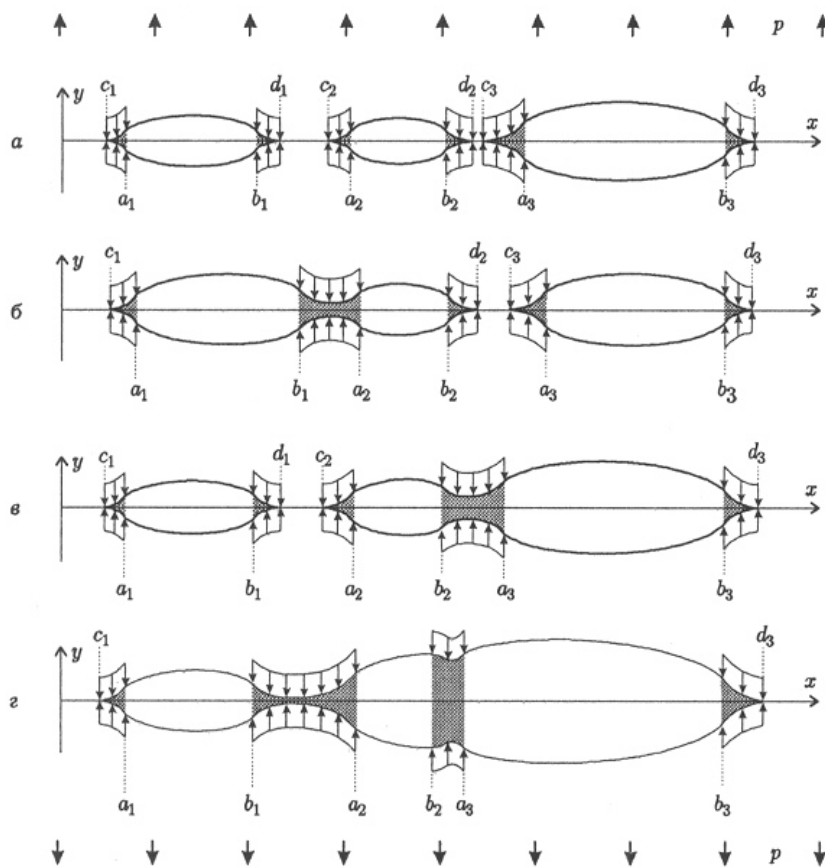


Рис. 3.6.4

Исследованию деформирования и разрушения упругого и вязкоупругого тела с тремя коллинеарными трещинами неравной длины с зонами предразрушения (mode I) посвящена работа [115].

Рассмотрены различные варианты расположения трещин, вплоть до их объединения (рис. 3.6.4). Расчеты показали, что образование большой трещины из-за объединения двух трещин практически не влияет на деформационные характеристики третьей трещины.

Исходя из критерия критического раскрытия трещины (COD), определена длительность инкубационного периода вязкоупругого тела с тремя трещинами неравной длины.

В качестве примера приведен расчет mode I crack initiation для вязкоупругого полимера РММА с тремя коллинеарными трещинами.

4. Страгивание и докритический рост трещин в стареющих вязкоупругих телах.

4.1. Постановка проблемы. Многие вязкоупругие материалы, такие как полимеры, бетоны, древесина, горные породы, стареют с течением времени, особенно под влиянием внешней среды (температура, влажность и т.п.), в связи с чем изменяются их механические и реологические характеристики.

В работах [47, 50] в постановке Г.Н. Савина изучено влияние старения на концентрацию напряжений возле отверстий. Этот фактор необходимо также учитывать при исследовании процессов длительного разрушения элементов конструкций, выполненных из данных материалов, поскольку он может в ряде случаев оказать значительное влияние на конечные результаты [1, 23].

Большой цикл исследований докритического развития трещин в стареющих вязкоупругих изотропных телах изложен в монографии [23]. В этой работе на основе линейной теории вязкоупругости с применением подхода Маслова – Арутюняна и модифицированной модели трещины Дагдейла, получены определяющие уравнения развития трещин на всех этапах их стабильного роста. Получены решения ряда новых плоских задач механики длительного разрушения стареющих вязкоупругих тел.

Особый интерес представляет разработка методов теоретического исследования деформирования и длительного разрушения стареющих вязкоупругих анизотропных тел с дефектами типа трещин в связи с изучением проблем разрушения горных массивов, конструкций, выполненных из дерева и армированных бетонов, асфальтовых дорожных покрытий, полимерных композитных материалов [47, 65, 96, 101, 124]. Большинство исследований по этой проблеме выполнено на основе линейной теории вязкоупругости без рассмотрения старения материалов [20, 23], поскольку его учет для анизотропных тел приводит к существенным математическим трудностям. Применение к решению этой проблемы метода операторных цепных дробей [23, 95 – 102] снимает многие математические трудности и позволяет исследовать процессы длительного разрушения при любой анизотропии вязкоупругих свойств материала.

Ниже дан обзор работ, в которых на основе линейной теории Больцмана – Вольтерра для интегральных операторов с неразностными ядрами, которая описывает процесс старения материала, и метода операторных цепных дробей [23, 95] исследовано деформирование изотропных и анизотропных вязкоупругих тел с трещинами. Кинетика развития трещины описывается определяющими уравнениями ее докритического роста, полученными в работах [20, 23]. Полагается, что трещина при своем развитии не выходит из плоскости своего расположения.

В большинстве работ по этой проблеме [1, 23, 135] деформационные свойства стареющего материала описываются неразностными операторами Вольтерра второго рода

$$\bar{A}_{ij} f(t) = A_{ij}^0 \left(f(t) + \int_{\tau_1}^t A_{ij}(t, \tau) d\tau \right), \quad (4.1.1)$$

где τ_1 – возраст материала, в котором к нему приложено внешнее воздействие.

В некоторых работах [23] начального периода исследования по этой проблеме использована классическая модель Дагдейла, т.е. концепция $\sigma = \text{const}$ для вязкоупругого случая. Однако в большинстве поздних работ [101, 102] в качестве модели трещины используется модифицированная модель Леонова – Панасюка – Дагдейла [20]. В данной модели полагается, что размер зоны предразрушения d остается постоянным во время роста трещины. Эта концепция подтверждена для ряда стареющих полимерных материалов и композитов на их основе [28], а также некоторых видов бетона и армированного бетона [39, 55].

Согласно этой модели, зона предразрушения у фронта движущейся трещины представляется разрезом постоянной ширины ($d = \text{const}$), к берегам которого приложены самоуравновешивающиеся напряжения $\sigma(t)$. Величина этих напряжений удовлетворяет условию конечности напряжений или, что то же самое – плавности смыкания берегов трещины.

В качестве критерия разрушения примем критерий критического раскрытия в вершине трещины [20, 136]

$$\delta(x, t) \Big|_{x=a(t)} = \delta_{lc}. \quad (4.1.2)$$

Полагаем, что условие (4.1.2) выполняется в каждый момент времени t растущей трещины [20, 23]. Как следует из экспериментальных исследований [39, 55], для таких стареющих материалов как бетоны, древесина, некоторые полимеры и композиты на их основе, величины δ_{lc} и d незначительно изменяются с возрастом и их можно считать постоянными. Данный критерий разрушения для некоторых стареющих материалов рассматривался в работах [101, 102].

Таким образом, модель зоны предразрушения основывается на следующих предположениях: d и δ_{lc} – некоторые константы материала; на берегах трещины в зоне предразрушения действуют напряжения $\sigma(t)$, определяемые из условия конечности напряжений в вершине трещины.

В рамках изложенной выше модели разрушения в работах [48, 49] доказана применимость принципа Вольтерра при решении краевой квазистатической задачи линейной теории вязкоупругости в случае монотонного роста трещины. Согласно этому принципу решение вязкоупругой задачи может быть получено из соответствующего упругого решения путем подстановки вместо упругих постоянных временных интегральных операторов.

В этом случае вязкоупругое раскрытие трещины можно представить так:

$$\delta(x, t) = \bar{T} \delta_0(x, t), \quad (4.1.3)$$

где $\delta_0(x, t)$ – функция силовых и геометрических параметров, а \bar{T} – функция временных неразностных операторов, которая в канонической форме имеет вид

$$\bar{T}f(t) = T_0 \left[f(t) + \int_{\tau_1}^t \Pi(t, \tau) f(\tau) d\tau \right]. \quad (4.1.4)$$

4.2. Иницирование и медленный докритический рост трещины. Рост трещин в стареющих вязкоупругих материалах проходит последовательно в несколько стадий, которые разделяются на инкубационный период, переходный период, основной период квазистатического роста и последний период – динамического роста [20, 23]. Рассмотрим последовательно каждый из периодов, кроме последнего (период динамического распространения трещины не входит в рамки исследования данной работы).

Инкубационный период. Примем за начало отсчета времени момент начала процесса старения материала. Тогда момент начала инкубационного периода будет соответствовать возрасту материала τ_i , в котором к телу была приложена внешняя растягивающая нагрузка. В течение данного периода происходит только раскрытие трещины без ее роста. Окон-

чанием периода будет тот момент времени, когда раскрытие в вершине трещины длиной $2a$ достигнет своего критического значения. Как следует из выражений (4.1.2) – (4.1.4), уравнение для определения длительности инкубационного периода будет иметь вид

$$T_0 \left(g_0(a(t_*), a(t_*)) + \int_{\tau_1}^{t_*} \Pi(t_*, \tau) g_0(a(t_*), a(\tau)) d\tau \right) = \delta_{lc} \quad (4.2.1)$$

Так как трещина не растет в течение данного периода, то $a(t) = a_0$, $\tau_1 \leq t \leq t_*$, и уравнение (4.2.1) примет вид

$$T_0 g_0(a_0, a_0) \left(1 + \int_{\tau_1}^{t_*} \Pi(t_*, \tau) d\tau \right) = \delta_{lc} \quad (4.2.2)$$

$$1 + \int_{\tau_1}^{t_*} \Pi(t_*, \tau) d\tau = \frac{\delta_{lc}}{\delta(a_0)} [\delta(a(t)) = T_0 g_0(a(t), a(t))]. \quad (4.2.3)$$

Для макротрещин ($d \ll a$) выражение (4.2.1) примет вид

$$\delta(x, t) = \bar{T} A_0 F \left(\frac{x-a}{d} \right); \quad F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}, \quad (4.2.4)$$

которое определяет раскрытие в вершине трещины в момент времени t .

Как показано в работах [43, 54], раскрытие в вершине макроскопической трещины через коэффициент интенсивности напряжений имеет вид

$$\delta(a(t)) = T_0 K_I(a(t)) \sqrt{2d/\pi}. \quad (4.2.5)$$

В силу выражения (4.2.5), получаем следующее уравнение для определения длительности инкубационного периода через коэффициенты интенсивности напряжений:

$$1 + \int_{\tau_1}^{t_*} \Pi(t_*, \tau) d\tau = \frac{K_{lc}}{K_I^0}. \quad (4.2.6)$$

Здесь K_I^0 и K_{lc} – соответственно, начальное и критическое значения коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_I^0 = K_I(a_0) = 2p \sqrt{\frac{a_0}{\pi}}; \quad K_{lc} = 2p \sqrt{\frac{a_*}{\pi}}, \quad (4.2.7)$$

где $2a_0$ и $2a_*$ – начальная и критическая длины трещины.

Анализ уравнения (4.2.6) показывает, что в случае ограниченных интегральных операторов, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau_1}^t R(t, \tau, \lambda) d\tau < \infty, \quad (4.2.8)$$

решение данного уравнения существует только для тех значений внешней нагрузки, которые выше определенного (безопасного) значения. Для меньших значений внешней нагрузки трещина будет оставаться неподвижной. Величина безопасного внешнего нагружения $p = p_s$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{K_{lc}}{K_{ls}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau_1}^t \Pi(t, \tau) d\tau, \quad (4.2.9)$$

где $K_{lc} = 2p_* \sqrt{a_0/\pi}$ и $K_{ls} = 2p_s \sqrt{a_0/\pi}$. Здесь K_{ls} – безопасное значение коэффициента интенсивности напряжений, а p_* – критическое значение нагрузки для тела с трещиной длиной $2a_0$.

Переходный период. Когда раскрытие на фронте трещины достигло своего критического значения δ_{lc} , трещина страгивается и начинается переходный период её медленного докритического роста. За время данного периода трещина увеличивается на величину зоны предразрушения d . При этом перед расширяющимся фронтом трещины образуется новая зона предразрушения.

Согласно (4.1.2) – (4.1.4), уравнение роста трещины в переходном периоде имеет вид

$$T_0 \left(g_0(a(t), a(t)) + \int_{\tau_1}^t \Pi(t, \tau) g_0(a(t), a(\tau)) d\tau \right) = \delta_{lc}. \quad (4.2.10)$$

Разбивая в уравнении (4.2.10) временной отрезок интегрирования на две части, получаем

$$T_0 \left(g_0(a(t), a(t)) + \int_{\tau_1}^{t_1} \Pi(t, \tau) g_0(a(t), a_0) d\tau + \int_{t_1}^t \Pi(t, \tau) g_0(a(t), a(\tau)) d\tau \right) = \delta_{lc}. \quad (4.2.11)$$

С учетом выражений (4.1.2), (4.2.4) и (4.2.5) уравнение (4.2.11) запишем в виде

$$1 + \sqrt{\frac{a_0}{a(t)}} \int_{\tau_1}^{t_1} \Pi(t, \tau) F\left(\frac{a(t) - a_0}{d}\right) d\tau + \int_{t_1}^t \Pi(t, \tau) \sqrt{\frac{a(\tau)}{a(t)}} F\left(\frac{a(t) - a(\tau)}{d}\right) d\tau = \frac{K_{lc}}{K_I(a(t))}. \quad (4.2.12)$$

Первый интеграл в уравнении (4.2.12) обращается в нуль, когда полудлина трещины достигает значения $a(t_1) = a_0 + d$. Момент времени t_1 определяет окончание переходного периода.

Если учесть малость отношения d/a_0 , окончательно уравнение роста трещины в переходном периоде примет вид

$$1 + \int_{\tau_1}^{t_1} \Pi(t, \tau) F\left(\frac{a(t) - a_0}{d}\right) d\tau + \int_{t_1}^t \Pi(t, \tau) F\left(\frac{a(t) - a(\tau)}{d}\right) d\tau = \frac{K_{lc}}{K_I(a(t))}. \quad (4.2.13)$$

Основной период. После того, как длина трещины увеличилась на ширину зоны предразрушения, трещина начинает далее распространяться в теле. Основной период длится до момента перехода роста трещины на динамический режим, когда $a(t_{II}) = a_*$ (её критическое значение).

Согласно (4.1.2) – (4.1.4) уравнение роста трещины в основном периоде ($t_1 < t < t_{II}$) будет иметь вид

$$T_0 \left(g_0(a(t), a(t)) + \int_{t'}^t \Pi(t, \tau) g_0(a(t), a(\tau)) d\tau \right) = \delta_{lc}, \quad (4.2.14)$$

где t' удовлетворяет условию $a(t) - a(t') = d$.

Введя коэффициент интенсивности напряжений K_I в уравнение (4.2.14), оно примет такой вид:

$$1 + \int_{t'}^t \Pi(t, \tau) \sqrt{\frac{a(\tau)}{a(t)}} F\left(\frac{a(t) - a(\tau)}{d}\right) d\tau = \frac{K_{lc}}{K_I(a(t))}. \quad (4.2.15)$$

Аналогично выводу уравнения для переходного периода, радикал в уравнении (4.2.15) можно положить равным единице и окончательно получаем

$$1 + \int_{t'}^t \Pi(t, \tau) F\left(\frac{a(t) - a(\tau)}{d}\right) d\tau = \frac{K_{lc}}{K_I(a(t))}; \quad a(t) - a(t') = d. \quad (4.2.16)$$

Из уравнения (4.2.16) видно, что при приближении к моменту времени t_{II} , когда радиус трещины достигает критического значения $a(t_{II}) = a_*$ и $K_I(a_*) = K_{Ic}$, скорость роста трещины значительно увеличивается.

Если пренебречь временем динамического распространения трещины вследствие его малости, то долговечность T тела с трещиной можно определить выражением

$$T = \Delta t_* + \Delta t_I + \Delta t_{II}, \quad (4.2.17)$$

где $\Delta t_* = t_* - t_I$, $\Delta t_I = t_I - t_*$, и $\Delta t_{II} = t_{II} - t_I$, соответственно, длительности инкубационного, переходного и основного периодов докритического роста трещины.

4.3. Докритическое развитие внутренней круговой трещины (penny-shaped crack) в стареющем вязкоупругом массиве. Вязкоупругий массив с цилиндрической анизотропией. В работе [102] исследовано инициирование и докритический рост круговой (в плане) трещины в стареющем вязкоупругом массиве на основе теории [23], изложенной в разделах 4.1 и 4.2.

Рассмотрим стареющий вязкоупругий материал, деформационные свойства которого можно описать уравнениями линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра.

Обозначим ось анизотропии, которая проходит по телу, осью z в цилиндрической системе координат r, θ, z . Тогда реологические уравнения для данного материала на основе принципа Больцмана будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{rr} - \frac{\bar{v}_{r\theta}}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\bar{v}_{zr}}{\bar{E}_{zz}} \sigma_{zz}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\bar{v}_{r\theta}}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{rr} + \frac{1}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\bar{v}_{zr}}{\bar{E}_{zz}} \sigma_{zz}; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\bar{v}_{rz}}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{rr} - \frac{\bar{v}_{rz}}{\bar{E}_{rr}} \sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{\bar{E}_{zz}} \sigma_{zz}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\bar{G}_{rz}} \tau_{\theta z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{\bar{G}_{rz}} \tau_{rz}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\bar{G}_{r\theta}} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где $\bar{E}_{rr}, \bar{E}_{zz}, \bar{G}_{rz}, \bar{G}_{r\theta}, \bar{v}_{r\theta}, \bar{v}_{zr}, \bar{v}_{rz}$ – линейные интегральные операторы Вольтерра второго рода;

$$\bar{A}_{ij} f(t) = A_{ij}^0 [f(t) + \int_{\tau_1}^t A_{ij}(t, \tau) f(\tau) d\tau]. \quad (4.3.2)$$

Здесь A_{ij}^0 – мгновенные компоненты вязкоупругого оператора \bar{A}_{ij} ; τ_1 – возраст материала, в котором к нему было приложено внешнее воздействие; t – время.

Пусть ядра $A_{ij}(t, \tau)$ представляют собой линейные комбинации ядер $R(t, \tau, \lambda)$ резольвентного оператора $R^*(\lambda)$, т.е.

$$A_{ij}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{N_{ij}} \alpha_k^{ij} R(t, \tau, \lambda_k^{ij}). \quad (4.3.3)$$

Данное условие необходимо для применения метода операторных цепных дробей [23, 95, 98]. Однако, оно не накладывает особых ограничений на вязкоупругие свойства анизотропного материала, поскольку кривые ползучести могут быть аппроксимированы линейными комбинациями (4.3.3) с необходимой точностью.

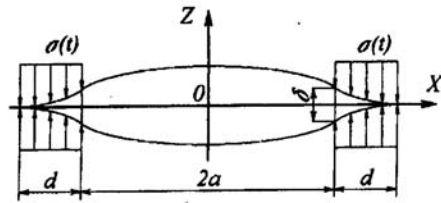


Рис. 4.3.1

Ниже исследовано деформирование и длительное разрушение стареющего вязкоупругого тела в пространственной постановке, когда в теле имеется плоская круговая трещина нормального отрыва диаметром $2a$ (рис. 4.3.1). Рассмотрен симметричный случай, когда ось z нормальна плоскости расположения трещины и про-

ходит через её центр. На бесконечности тело подвержено растягивающим нагрузкам интенсивности p , которые нормальны плоскости трещины (mode I).

Согласно описанной выше модели, зона предразрушения у фронта движущейся дискообразной трещины представлена кольцевым разрезом постоянной ширины ($d = \text{const}$), к берегам которого приложены самоуравновешенные напряжения $\sigma(t)$ (см. рис. 4.3.1). Величина этих напряжений удовлетворяет условию конечности напряжений в вершине трещины и определяется выражением [102]

$$\sigma(t) = \frac{a(t) + d}{\sqrt{2da(t) + d^2}} p, \quad (4.3.4)$$

где $a(t)$ – радиус трещины в момент времени t ; p – приложенные к телу на удалении от трещины равномерно распределенные растягивающие напряжения; d – длина зоны предразрушения.

Из решения данной краевой задачи в линейно-упругой постановке [10, 38] получаем следующее выражение для раскрытия трещины в зоне предразрушения ($a \leq r \leq a + d$):

$$2w(r, a) = T_0 g(r, a, d, p);$$

$$g(r, a, d, p) = \frac{4}{\pi} \sigma \int_{\arcsin(a/(a+d))}^{\arcsin(a/r)} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta} \, d\theta; \quad (4.3.5)$$

$$T_0 = L(A_{ij}^0) = \sqrt{\frac{(1 - \nu_{rz}^0 \nu_{rz}^0)}{E_{rr}^0 E_{zz}^0}} \sqrt{2 \left[\sqrt{[1 - (\nu_{r\theta}^0)^2][1 - \nu_{rz}^0 \nu_{rz}^0]} \frac{E_{rr}^0}{E_{zz}^0} - (1 + \nu_{r\theta}^0) \nu_{rz}^0 \right] + \frac{E_{rr}^0}{G_{rz}^0}};$$

$$\nu_{rz}^0 = \nu_{rz}^0 E_{rr}^0 / E_{zz}^0.$$

Здесь σ – напряжения, действующие в зоне предразрушения, определяются из уравнения (4.3.4).

В случае макротрещины, когда ширина зоны предразрушения значительно меньше радиуса трещины ($d/a_0 \ll 1$), выражение для раскрытия трещины (4.3.5) с точностью до членов порядка $o(d/a_0)$ приводится к следующему виду:

$$2w(r, a) = (4\sigma d T_0 / \pi) F((r - a) / d) \quad \left(F(s) = \sqrt{1 - s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - s}}{1 + \sqrt{1 - s}} \right). \quad (4.3.6)$$

Для случая малой зоны предразрушения поле напряжений вблизи вершины трещины достаточно хорошо определяется линейной механикой разрушения и характеризуется коэффициентом интенсивности напряжений. Следовательно, напряжения в зоне предразрушения, которые в общем случае определяются выражением (4.3.4), могут быть представлены через коэффициент интенсивности напряжений K_I в следующем виде:

$$\sigma = K_I \sqrt{\pi / (8d)}; \quad K_I = 2p \sqrt{a / \pi}.$$

На основе принципа Вольтерра из выражения (4.3.6) получим следующее операторное выражение для вязкоупругого раскрытия трещины в момент времени t :

$$2w(r, a(t)) = \bar{T} \left[(4\sigma(t) d / \pi) F((r - a(t)) / d) \right], \quad (4.3.7)$$

где $\sigma(t) = p_0 \sqrt{a(t) / 2d}$;

$$\bar{T} = L(\bar{A}_{ij}) = \sqrt{\frac{(1 - \bar{v}_{rz}\bar{v}_{zr})}{\bar{E}_{rr}\bar{E}_{zz}}} \sqrt{2 \left[\sqrt{[1 - (\bar{v}_{r\theta})^2][1 - \bar{v}_{zz}\bar{v}_{zr}] \frac{\bar{E}_{rr}}{\bar{E}_{zz}}} - (1 + \bar{v}_{r\theta})\bar{v}_{rz} \right] + \frac{\bar{E}_{rr}}{G_{rz}}}. \quad (4.3.8)$$

Согласно(4.3.7), критерий (4.1.2) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{T}g_0(r, a(t))\Big|_{r=a(t)} &= \delta_{lc} \\ \left[g_0(r, a(t)) = \frac{4p_0\sqrt{d/2}}{\pi} \sqrt{a(t)} F\left(\frac{r-a(t)}{d}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Выражение для вязкоупругого раскрытия (4.3.7) содержит довольно громоздкую иррациональную функцию от временных интегральных операторов(4.3.8), которую необходимо представить в виде интегрального оператора Вольтерра второго рода

$$\bar{T}f(t) = T_0 \left[f(t) + \int_{\tau_1}^t \Pi(t, \tau) f(\tau) d\tau \right]. \quad (4.3.10)$$

Для определения ядра $\Pi(t, \tau)$ воспользуемся методом операторных цепных дробей [25, 98].

В ранее опубликованной работе [95] сформулирована и доказана теорема о сходимости непрерывной дроби с аргументом в виде интегрального оператора Вольтерра первого рода. Это дает возможность использовать эффективный метод операторных цепных дробей для расшифровки сложных функций от одного интегрального оператора Вольтерра, если представление данной функции от скалярного аргумента в виде непрерывной дроби известно или может быть определено каким-либо способом.

В данном случае выражение (4.3.8) содержит иррациональную функцию квадратного корня, представление которой в виде непрерывной дроби имеет следующий вид [76]:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \frac{c_k x}{1} \equiv 1 + \frac{c_1 x}{1 + \frac{c_2 x}{1 + \frac{c_3 x}{1 + \dots}}}, \quad (4.3.11)$$

где $c_1 = 0,5$, а $c_k = 0,25$, $k = 2, 3, \dots$

Основной трудностью в методе операторных цепных дробей является сворачивание конечных дробей от интегральных операторов. Данная процедура проводится по правилам алгебры резольвентных операторов [9, 46]. Следовательно, желательно иметь представление интегральных операторов анизотропного тела в виде линейной комбинации резольвентных операторов одного класса (4.3.3). Ввиду быстрой сходимости операторных цепных дробей для практических целей цепную дробь можно ограничивать первыми двумя или тремя членами. Такие конечные дроби называются соответственно второй и третьей подходящей дробью. Точное значение цепной дроби будет находиться между данными двумя подходящими дробями [76].

Формальная подстановка в выражение (4.3.11) вместо скалярного аргумента x линейной комбинации резольвентных операторов $R^*(\lambda_i)$ дает

$$\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)} = 1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \frac{c_k \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)}{1}.$$

Аппроксимируем полученную бесконечную операторную дробь M -ой подходящей операторной дробью

$$\overset{\infty}{K} \frac{c_k \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)}{1} \approx \overset{M}{K} \frac{c_k \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)}{1}.$$

Сворачивание этой конечной операторной дроби по правилам алгебры резольвентных операторов даст представление в виде линейной комбинации резольвентных операторов

$$\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)} \approx 1 + \overset{M}{K} \frac{c_k \sum_{i=1}^n \alpha_i R^*(\lambda_i)}{1} = 1 + \sum_{j=1}^m \beta_j R^*(\xi_j). \quad (4.3.12)$$

Как видно, в результате расшифровки иррациональной функции от линейной комбинации резольвентных операторов получаем линейную комбинацию резольвентных операторов. Данное свойство дает возможность последовательно применять метод операторных цепных дробей для расшифровки сложных функций $F(\bar{A}_{ij}) = F_1(F_2(\bar{A}_{ij}))$.

Таким образом, в результате последовательных преобразований иррациональной функции в выражении (4.3.8) получаем

$$\bar{T} = L(\bar{A}_{ij}) \approx L(A_{ij}^0) \left(1 + \sum_{l=1}^N \zeta_l R^*(\chi_l) \right); \quad (4.3.13)$$

$$\Pi(t, \tau) \approx \sum_{l=1}^N \zeta_l R(t, \tau, \chi_l). \quad (4.3.14)$$

Из-за громоздкости вычислений коэффициенты ζ_l и χ_l определяются, в общем случае, численно. Алгоритм их определения, в основном, сводится к поиску корней многочлена и решению системы линейных алгебраических уравнений [76, 98].

В качестве примера, проведем расчет кинетических диаграмм и уровней долговечности стареющего вязкоупругого массива с дискообразной трещиной, деформирование которого можно описать интегральными операторами с ядром типа Маслова – Арутюняна [1]

$$\lambda K(t, \tau) = -E \frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi(\tau) (1 - \exp[-\gamma(t - \tau)])), \quad (4.3.15)$$

где $\varphi(\tau) = C_0 + A_1/\tau$ – функция старения; C_0, A_1, γ – экспериментально определяемые параметры материала; E – модуль Юнга и $\lambda = \gamma E$.

Как показано в работе [50], оператор λK^* с ядром в форме (4.3.15) имеет резольвентный оператор $R^*(\lambda)$, который удовлетворяет уравнению $(1 + \lambda K^*)^{-1} = 1 - \lambda R^*(-\lambda)$ с ядром

$$R(t, \tau, \lambda) = \varphi(\tau) - H(\lambda, \tau) \int_{\tau}^t (\tau/s)^{\lambda A_1} \exp((\gamma + \lambda C_0)(\tau - s)) ds, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.3.16)$$

$$\left(H(\lambda, \tau) = \gamma \varphi(\tau) + \lambda \varphi^2(\tau) + \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau) \right).$$

Для упрощения математических расчетов положим, что вязкоупругие стареющие деформационные свойства рассматриваемого материала можно описать двумя временными интегральными операторами Вольтерра

$$\frac{1}{E_{zz}} = \frac{1}{E_{zz}^0} (1 + \alpha_1 R^*(\lambda_1)); \quad \frac{1}{G_{rz}} = \frac{1}{G_{rz}^0} (1 + \alpha_2 R^*(\lambda_2)). \quad (4.3.17)$$

В этом случае из соотношения (4.3.8) получаем следующий оператор, определяющий вязкоупругое раскрытие трещины:

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{(1-\nu_{rz}^0\nu_{zr}^0)}{E_{rr}^0 E_{zz}^0}} \sqrt{2 \left[\sqrt{[1-(\nu_{r\theta}^0)^2][1-\nu_{rz}^0\nu_{zr}^0]} \frac{E_{rr}^0}{E_{zz}^0} - (1+\nu_{r\theta}^0)\nu_{rz}^0 \right] + \frac{E_{rr}^0}{G_{rz}}}. \quad (4.3.18)$$

Применяя метод операторных цепных дробей, изложенный выше, к расшифровке радикала от линейной комбинации резольвентных операторов в выражении (4.3.18) получаем следующее представление оператора \bar{T} :

$$\bar{T} \approx T^0 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} R^* \left(\lambda_1 - \frac{\alpha_1}{4} \right) \right) \left(1 + 2 \sum_{j=1}^2 \beta_j R^*(\xi_j') \right) = T^0 \left(1 + \sum_{l=1}^3 \zeta_l R^*(\chi_l) \right). \quad (4.3.19)$$

Для численного анализа примем материал (армированный бетон) со следующими характеристиками:

$$C_0 = 0,918 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad A_1 = 4,918 \cdot 10^{-10} \text{ сут} \times \text{Па}^{-1}; \quad \gamma = 0,026 \text{ сут}^{-1}; \quad \alpha_1 = 4,479 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda_1 = -4,490 \cdot 10^{-5}; \quad \alpha_2 = 4,451 \cdot 10^{-3}; \quad \lambda_2 = -2,011 \cdot 10^{-5}; \quad 1/E_{zz}^0 = 4,073 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1};$$

$$1/G_{rz}^0 = 9,480 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}; \quad 1/E_{rr}^0 = 3,664 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}; \quad \nu_{r\theta}^0 = 0,158; \quad \nu_{zr}^0 = 0,162.$$

Таблица 1

M	$\ \bar{T}\ _E / T^0,$ $\tau_1 = 7 \text{ сут}$	$\varepsilon(\%)$	$\ \bar{T}\ _E / T^0,$ $\tau_1 = 21 \text{ сут}$	$\varepsilon(\%)$	$\ \bar{T}\ _E / T^0,$ $\tau_1 = 120 \text{ сут}$	$\varepsilon(\%)$
1	4,665	35	3,548	29	3,077	25
2	3,214	7	2,597	6	2,347	5
3	3,506	2	2,785	1	2,487	1
4	3,436	<1	2,741	<1	2,455	<1
10	3,449	<1	2,749	<1	2,461	<1

В табл. 1 показана сходимость представления оператора \bar{T} цепной дробью в нормируемом пространстве положительных функций E . Из приведенных в табл.1 данных видно, что ошибка аппроксимации второй подходящей дробью ($M=2$) составляет менее 10%. Численное решение данного примера проведено для $M=4$.

На рис. 4.3.2 приведены кинетические кривые для различных возрастов материала τ_1 (кривая 1 – 7 сут., 2 – 21 сут., 3 – 120 сут.), в котором к нему была приложена внешняя нагрузка. Данные кривые получены для $d/a_0 = 0,1$ и $p_0/p_* = 0,6$.

На рис. 4.3.3 показана кривая долговечности ($\tau_1=21 \text{ сут.}$) в зависимости от уровня внешней нагрузки. Данная кривая имеет горизонтальную асимптоту, которая соответствует уровню безопасного нагружения.

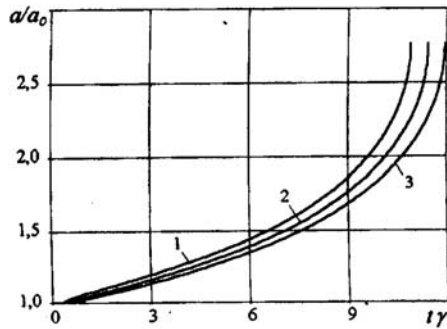


Рис. 4.3.2

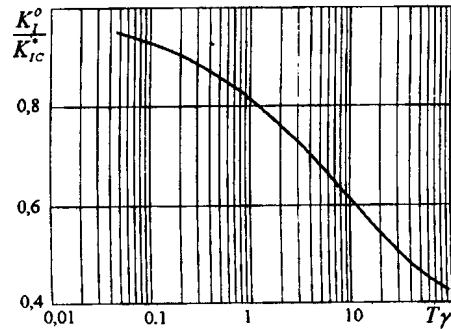


Рис. 4.3.3

Вязкоупругий стареющий трансверсально-изотропный массив. В работах [97, 101] исследовано инициирование и докритический рост круговой (в плане) трещины в стареющем вязкоупругом массиве на основе теории разрушения вязкоупругих тел [23], изложенной в разделах 4.1 и 4.2.

Предположим, что трещина расположена в плоскости изотропии и подвержена равномерно распределенным растягивающим нагрузкам, которые нормальны плоскости ее расположения.

Деформирование трансверсально изотропного массива описывается уравнениями линейной теории Больцмана – Вольтерра с неразностными интегральными операторами Вольтерра второго рода.

Как и в предыдущей задаче, зона предразрушения у фронта движущейся дискообразной трещины представлена кольцевым разрезом постоянной ширины ($d = \text{const}$), к берегам которого приложены самоуравновешенные напряжения $\sigma(t)$ (рис. 4.3.1), величина которых определяется из условия конечности напряжений в вершине трещины. В статье получены все основные определяющие уравнения инициирования и докритического роста трещины и на основе метода операторных цепных дробей получено решение конкретной задачи об исследовании длительного разрушения стареющего композитного материала.

4.4. Докритический стабильный рост сквозных трещин в изотропных и ортотропных стареющих вязкоупругих телах. Развитие трещины с немалой зоной предразрушения в изотропной пластине. В работе [23] приведено исследование докритического развития сквозной трещины с немалой зоной предразрушения в стареющей вязкоупругой изотропной пластине при действии постоянных растягивающих усилий, нормальных плоскости расположения трещины. Предполагаем, что деформирование пластины описывается линейной теорией вязкоупругости Больцмана – Вольтерра для операторов с неразностными ядрами, описывающими процесс старения вязкоупругого материала.

Получены определяющие уравнения всех периодов докритического развития трещины для модели Леонова – Панасюка – Дагдейла ($\sigma = \text{const}$) и критерия критического раскрытия трещины (COD).

Проведены расчеты кинетических кривых развития трещины для интегральных операторов с ядрами Маслова – Арутюняна. На рис. 4.4.1 и 4.4.2 приведены кинетические кривые всех периодов докритического развития трещины (l/l_0 – относительная длина трещины; μt – нормализованное время; μ – параметр ядра Маслова – Арутюняна. Причем на рис. 4.4.1 показан начальный период развития трещины, а на рис. 4.4.2 – ее дальнейший рост.

Как следует из анализа полученных результатов, трещина начинает движение с малой скоростью, после чего скорость резко возрастает, а затем некоторое время остается близкой к постоянной. В конце переходного периода трещина плавно переходит к квазистационарному развитию в течение основного периода, за исключением малого участка ее ускоренного развития при приближении к своему критическому размеру, после достижения которого начинается ее быстрое динамическое развитие.

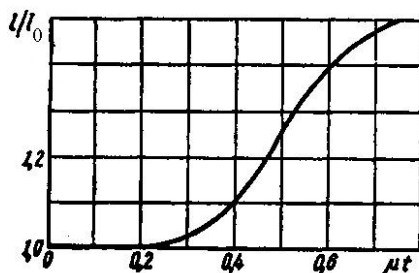


Рис. 4.4.1

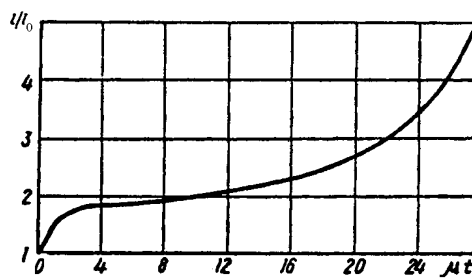


Рис. 4.4.2

Докритический рост сквозной макротрещины в ортотропной пластине. В работах [96, 99] приведены результаты исследований медленного роста сквозных макротрещин ($d \ll a$) в стареющих вязкоупругих ортотропных телах.

В частности, в работе [96] исследуется развитие сквозной макротрещины, которая находится в пластине из ортотропного волокнистого композита, состоящего из системы прямолинейных упругих волокон, и расположена параллельно этим армирующим волокнам. Пластина растягивается поперек волокон армирования приложенными на бесконечности напряжениями p . Связующим композита является стареющий вязкоупругий материал. Композиционный материал моделируется однородной вязкоупругой средой с приведенными реологическими характеристиками. В качестве модели трещины применяется модифицированная модель Леонова – Панасюка [20], где полагается автономность зоны предразрушения во время ее роста, $d = \text{const}$. Для описания стареющих свойств материала используется неэрмитов оператор Вольтерра λK^* с ядром Маслова – Арутюняна [1] и его резольвента $R^*(\lambda)$.

Приведенные макроскопические вязкоупругие характеристики композитной пластины \bar{E}_{11} , \bar{E}_{22} , $\bar{\nu}_{12}$, \bar{G}_{12} определены методом осреднения по формулам работы [8]. Поскольку ползучесть материала вдоль упругих волокон незначительна, полагалось, что $\bar{E}_{11} = E_{11}^0 = \text{const}$, а также $\bar{\nu}_{12} = \nu_{12}^0 = \text{const}$. В этом случае, используя алгебру резольвентных операторов, после некоторых преобразований получены соотношения для определения операторов \bar{E}_{22} и \bar{G}_{12} :

$$\frac{1}{\bar{E}_{22}} = \frac{1}{E_{22}^0} (1 + \mu_1 \bar{K}); \quad \frac{1}{\bar{G}_{12}} = \frac{1}{G_{12}^0} (1 + \mu_2 \bar{K}),$$

где \bar{K} – неэрмитов оператор с ядром Маслова – Арутюняна; μ_1 и μ_2 являются функциями упругих и реологических характеристик связующего и армирования, а также величины объемного содержания армирования.

Для преобразования иррациональной функции от интегральных операторов, входящей в формулу вязкоупругого раскрытия трещины, использован метод операторных цепных дробей. В работе на основе положений, изложенных в разделах 4.1 и 4.2, получены для этого случая интегральные уравнения, описывающие все периоды докритического развития трещины. Уравнения решены с помощью численных методов.

Исследовано вклад различных периодов развития трещины в общую долговечность стареющего вязкоупругого композита (бетон, армированный стальной арматурой).

В табл. 2 приведены результаты таких расчетов для приведенных характеристик длительностей γt_* , $\gamma \cdot \Delta t_1$, $\gamma \cdot \Delta t_2$ – соответственно, инкубационного, переходного и основного периодов, а также для γT – общей долговечности тела с трещиной в зависимости от концентрации упругого армирования ξ и возраста материала τ_1 (сут.).

Таблица 2

$\tau_1 = 7$ ξ	γt_*	$\gamma \cdot \Delta t_1$	$\gamma \cdot \Delta t_2$	γT	$\tau_1 = 28$ ξ	γt_*	$\gamma \cdot \Delta t_1$	$\gamma \cdot \Delta t_2$	γT
0	0,164	0,571	2,623	3,358	0	0,254	0,728	2,703	3,685
0,2	0,171	0,599	2,744	3,514	0,2	0,265	0,763	2,824	3,852
0,4	0,185	0,661	2,999	3,845	0,4	0,288	0,834	3,04	4,208
0,8	0,296	1,21	5,103	6,611	0,8	0,479	1,546	5,187	7,212

Из анализа полученных результатов следует, что основную часть долговечности исследуемого материала составляет основной период докритического развития трещины, а длительность инкубационного и переходного периодов составляет около 20% от общей долговечности.

Расчеты также показали, что долговечность исследуемых материалов в старом возрасте ($\tau_1 = 120$ суток) увеличилась примерно на 15% по сравнению с материалом в раннем возрасте ($\tau_1 = 7$ суток).

5. Анализ закономерностей докритического стабильного роста трещин в полимерных материалах на основе моделей мезомеханики разрушения.

5.1. Формулировка проблемы. Как следует из обзорных работ [56, 70, 73, 134], в последние годы интенсивно развиваются исследования разрушения материалов различной природы (металлы, полимеры, бетоны, композиты и др.) на основе моделей мезомеханики разрушения.

Согласно классификации этих подходов, приведенных в работе [73], в начале проводятся исследования на различных структурных уровнях с привлечением соответствующих модельных представлений, а затем, на втором этапе проводится анализ полученных результатов и исследование взаимовлияния явлений, рассмотренных на различных структурных уровнях.

Отметим, что механика разрушения полимеров во многих исследованиях соответствует приведенной выше классификации. Как следует из обзоров в работах [27, 28, 32, 34, 57, 70, 81, 139], значительная часть исследований по этой проблеме основывается на подходах мезомеханики разрушения с применением двухуровневых моделей разрушения твердых тел с трещинами, когда на первом уровне трещина рассматривается как разрез в упругом или вязкоупругом теле (в рамках механики сплошной среды), а на втором уровне – в зоне предразрушения у фронта трещины (process zone) учитывается микроструктура частично разрушенного материала (в твердых полимерах – «трещина серебра», craze zone) с помощью различных структурных моделей (например, spring models).

Как показывают многочисленные экспериментальные исследования, характерной особенностью полимеров, в отличие от металлов и других жестких материалов, является проявление значительных вязкоупругих свойств даже при обычных комнатных температурах, вследствие чего разрушение этих материалов может происходить при малых докритических статических нагрузках путем медленного квазистатического развития трещин.

Несмотря на то, что исследования докритического развития трещин при статических нагрузках в линейных вязкоупругих телах достаточно полно развиты в работах многих ученых, процесс длительного разрушения полимеров и композитов на их основе имеет ряд специфических особенностей (см. обзоры в работах [27, 28, 34, 119, 139, 149]), что требует специального рассмотрения этой проблемы. Процесс медленного докритического роста трещин в вязкоупругих телах значительно зависит от характеристик зоны предразрушения у фронта трещины (ее размера, уровня напряжений, реологических свойств, структуры). Зоны предразрушения у полимеров носят специфический характер и не похожи на зоны предразрушения у краев трещин в других твердых телах, к примеру, в металлах. Если в металлах это пластические зоны, то в полимерах – «трещины серебра», «craze zone».

Согласно опубликованным данным [5, 32, 77, 129, 139], «craze zones» представляют собой резко очерченные области, заполненные расслоившимся несплошным материалом, состоящим из однонаправленно ориентированных нитей-фибрилл. Их плотность распределения составляет 40 – 60% плотности исходного материала, а диаметр равен 25 – 50 нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). При раскрытии трещины фибриллы вытягиваются из матричного материала, удлиняются, при большом удлинении разрываются.

Основной особенностью излагаемых в настоящем обзоре работ, является: анализ двухуровневых моделей мезомеханики длительного разрушения полимеров, основанных на современных физических представлениях о структуре материала в окрестности конца трещины, а также учете влияния реологических свойств нитей-фибрилл в зоне предразрушения (craze zone); экспериментальная проверка полученных теоретических результатов.

О выборе модели трещины и критерия разрушения. Рассмотрим длительное разрушение полимеров, вызванное докритическим развитием трещин нормального отрыва вследствие длительного действия постоянных внешних нагрузок.

Эксперименты, проведенные в лабораториях Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, а также исследования других авторов [23, 27, 28, 32, 81, 128, 132], показали, что при длительном нагружении постоянными или переменными нагрузками (менее критического уровня), нормальными берегам сквозных трещин в тонких пластинах, выполненных из многих полимерных материалов, а также некоторых типов композитов, наблюдается медленный прямолинейный рост трещин вплоть до достижения некоторого критического размера, когда начинается их динамическое развитие.

На начальном этапе при исследовании стабильного роста трещин в полимерах применялись известные на тот период модели механики разрушения на макроуровне, т.е. без учета микроструктуры зоны предразрушения у края трещины.

Характер изменения во времени размера зоны предразрушения или напряжений в ней постулировался независимо от типа материала. Так, в моделях трещин Баренблатта [1], Леонова – Панасюка – Дагдейла [37, 67], Шепери [131] и др. принималось, что напряжения в концевой зоне у фронта трещины не изменяются с ее ростом.

Напротив, в работах [13, 27, 28, 80, 83, 130] для исследования стабильного докритического развития трещин в полимерах рассмотрена альтернативная модель (модифицированная модель Леонова–Панасюка), в которой постулируется постоянство размера зоны предразрушения во время роста трещины.

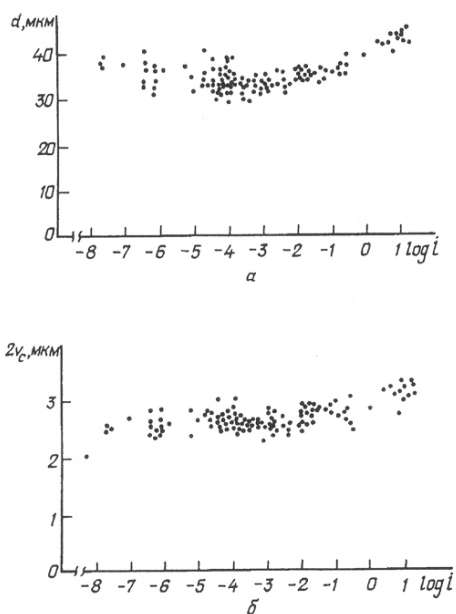


Рис. 5.1.1

Как следует из многих экспериментов, для широкого диапазона скоростей трещины \dot{l} величины критического раскрытия трещины $\delta_{lc} = 2v_c$ и размер зоны предразрушения d мало изменяются и практически их можно принять постоянными [3, 5, 7, 66]. На рис. 5.1.1 приведены результаты прямого измерения этих характеристик для полиметилметакрилата (РММА) из работы [66]. В связи с вышеизложенным справедлив вопрос – можно ли этот экспериментально установленный факт принять в качестве общей закономерности для многих полимеров этого класса или это свойственно для одного лишь полиметилметакрилата?

Таким образом, возникает необходимость на основе более физически обоснованных моделей мезомеханики разрушения, учитывающих микроструктуру зон предразрушения в полимерах, а также соответствующих экспериментов, дать анализ закономерностей изменения характеристик зоны предразрушения во время стабильного развития трещины.

Многие из полимерных материалов и композитов на их основе при достаточно высоком уровне напряжений (вплоть до $0,5 - 0,8 \sigma_B$) сохраняют свойство линейности и их деформирование может быть описано уравнениями линейной теории вязкоупругости [6, 52].

Для изотропных полимеров, не подверженных старению, реологические уравнения линейной теории вязкоупругости согласно Больцману [60] представимы в форме

$$\sigma_{ij} = \Lambda^* \varepsilon_{mn} \delta_{ij} + 2M^* \varepsilon_{ij} \quad (5.1.1)$$

$$\left(\Lambda^* f(t) = \lambda_0 [f(t) + \int_{t_0}^t \Lambda(t-\tau) f(\tau) d\tau]; \quad M^* f(t) = \mu_0 [f(t) + \int_{t_0}^t M(t-\tau) f(\tau) d\tau] \right) \quad (5.1.2)$$

– интегральные операторы Вольтерра II рода, математические свойства которых описаны в работах [9, 46].

Пусть материал с указанными закономерностями деформирования имеет трещину, растущую под действием внешних нагрузок. Рассмотрим сквозные прямолинейные трещины в тонких пластинах. Согласно принципу Вольтерра уравнение контура трещины в однородном (изотропном или анизотропном) теле во многих случаях представимо так [23, 46]:

$$\delta(x, t) = T^* \delta_0(x, t), \quad (5.1.3)$$

где $\delta_0(x, t)$ – функция силовых и геометрических параметров, определяемая из решения соответствующей упругой задачи; $\delta = 2v$; v – вертикальное смещение берегов трещины, а T^* – интегральный оператор Вольтерра II рода (в общем случае, функция от интегральных операторов), имеющий вид (3.2.2).

С другой стороны, оператор T^* в изотропном теле связан с операторами Λ^* и M^* функциональной зависимостью вида $T^* = f(\Lambda^*, M^*)$.

Во многих теоретических работах по механике длительного разрушения полимеров и композитов структурными и реологическими свойствами зоны предразрушения пренебрегают, а реологические свойства этой зоны задают по аналогии с параметрами моделей механики разрушения металлов. Как следует из обзоров [34, 81, 132], многие исследователи исходят из моделей трещин Леонова – Панасюка или Дагдейла, т.е. полагают, что напряжения в зоне предразрушения постоянны во время роста трещины и равны либо пределу текучести σ_T , либо пределу прочности σ_B . Однако, как следует из анализа экспериментальных данных для многих вязкоупругих полимеров таких постоянных во времени величин как предел прочности и предел текучести не существует. Полимерные материалы характеризует предельное напряжение – предел высокоэластичности, который, однако, нельзя считать постоянным во время процесса разрушения ввиду его сильной зависимости от скорости деформирования материала и его вязкоупругих свойств. Отметим, что даже при невысоких постоянных внешних нагрузках при развитии трещины происходит значительное изменение деформированного состояния в зоне предразрушения.

Таким образом, одной из главных задач рассматриваемой проблемы является построение (или выбор) корректных и обоснованных моделей длительного разрушения полимеров. Второй основной проблемой является выбор критерия разрушения, т.е. некоторого условия, при выполнении которого происходит рост трещины.

В исследованиях по механике разрушения вязкоупругих полимеров применяют, в основном, энергетические и деформационные критерии. Характеристика и анализ этих критериев приведены в работах [23, 28, 34, 54, 83, 128, 132].

Одним из наиболее используемых критериев разрушения, который позволяет описать реальную картину процесса раскрытия (инкубационный период) и стабильного роста трещины в вязкоупругой среде, является критерий критического раскрытия трещины (COD). Согласно этому критерию в вязкоупругом теле будет наблюдаться медленный докритический рост трещины, если выполняется следующее условие:

$$\delta(x, t) \Big|_{x=l(t)} = \delta_{lc}, \quad (5.1.4)$$

справедливое в каждый момент времени для растущей трещины. Здесь δ_{lc} – критическое раскрытие, которое должно быть постоянным во время роста трещины.

При исследовании разрушения конкретных полимерных материалов необходимо обосновывать постоянство величины δ_{lc} во время роста трещины. Отметим также, что критерий (5.1.4) является одним из немногих критериев, который описывает процесс роста трещины с немалой зоной предразрушения у ее фронта. В дальнейшем сосредоточим внимание на тех работах, где проведено обоснование и использование этого критерия для исследования длительного разрушения полимерных материалов. *И, наконец, важной проблемой является исследование процесса длительного разрушения полимеров, состоящем в теоретическом и экспериментальном изучении закономерностей медленного докритического развития трещин в этих материалах.* Важным элементом этого исследования является экспериментальное обоснование применимости (для описания процесса длительного разрушения конкретных полимерных материалов) теории длительного разрушения вязкоупругих тел [23], изложенной в разделах 3.1 и 3.2, в которых приведены определяющие уравнения докритического стабильного роста трещин в вязкоупругих средах.

Следует отметить, что в связи с тем, что определяющие уравнения (3.2.9), (3.2.24), и (3.2.26) справедливы для общего случая неравномерного распределения самоуравновешенных напряжений в зоне предразрушения, то их можно использовать при исследовании докритического развития трещин в полимерах на основе моделей мезомеханики разрушения, т.е. с учетом микроструктуры зоны предразрушения (craze zone) полимеров.

5.2. Некоторые двухуровневые модели мезомеханики длительного разрушения твердых полимеров. В работах [13, 14, 24, 28, 82, 130] разработаны двухуровневые модели мезомеханики длительного разрушения, учитывающие структуру и вязкоупругие свойства материала в зоне предразрушения у фронта растущей трещины. Эти модели имеют *два структурных уровня. Первый структурный уровень* – это модель трещины в рамках механики деформируемого твердого тела, куда относится определение вязкоупругого раскрытия трещины (разреза) под действием некоторой системы сил, нормальных плоскости расположения трещины (mode I). *Второй структурный уровень* определяет характер моделирования зоны предразрушения у края трещины, включая: систему связей (тяжей), соединяющих берега разреза, моделирующего область предразрушения (craze zone); их вязкоупругие свойства, в общем, отличные от характеристик матричного материала; характер взаимодействия тяжей с матричным материалом.

Эти двухуровневые модели мезомеханики разрушения более сложны, чем обычно применяемые в таких ситуациях модели типа Дагдейла или Леонова – Панасюка. Причем, определение параметров этих структурных моделей имеет значительные трудности ввиду малости локальной зоны предразрушения. Тем не менее, привлечение этих моделей для исследования докритического стабильного развития трещин позволяет установить ряд общих закономерностей изменения характеристик зоны предразрушения во время роста трещин.

Анализ экспериментальных исследований микроструктуры зоны предразрушения (craze zone) у края трещины физическими методами. Для полимеров известно ряд работ [4, 5, 7, 32, 51, 66, 122, 123, 125, 139, 145], в которых экспериментально исследованы зоны предразрушения.

С.Н.Журковым и В.С.Куксенко (см. монографию [51]) рентгеновским методом изучено распределение микротрещин в зоне предразрушения макротрещины. Типичная зависимость «плотность субмикротрещин – расстояние от вершины трещины» для капроновой пленки показана на рис. 5.2.2. Видно, что на расстоянии $r = 0,8$ мм плотность N субмикротрещин примерно на порядок меньше, чем при $r = 0,1$ мм. При $r = 0,4$ мм функция $N = N(r)$ имеет точку перегиба. Учитывая весьма малую ширину (в направлении, нормальном к направлению развития трещины) зоны, в которой определяли концентрацию субмикротрещин, можно приближенно полагать, что

функция $N(r)$ соответствует распределению разрывов вертикальных перемещений v . Качественно кривая $N = N(r)$ совпадает с функцией $v = v(r)$ для модели Леонова – Панасюка – Дагдейла или RS-модели [28, 82].

Профиль трещины вблизи ее конца и раскрытие трещины серебра в концевой области для полиметилметакрилата исследованы в работах [4, 5] методом оптической интерференции. Прямоугольный образец с надрезом сжимали в направлении надреза. В надрез вводили клин, вызывающий появление трещины. Ее длина контролируется положением клина. Сжатие препятствует искривлению траектории движения трещины. Наблюдение за вершиной трещины осуществляли с помощью микроскопа в отраженном монохроматическом свете. В работе [4] отмечено, что рост трещины не изменяет интерференционных полос, а это свидетельствует о неизменности формы концевой зоны и, в частности, величин δ_{lc} и d .

Показано, что разрушению твердых полимеров предшествует процесс образования зоны предразрушения в окрестности вершины трещины. Эта область ограничена криволинейными линиями, обращенными выпуклостью к оси трещины, а точка перегиба приближенно совпадает с концом трещины.

В работе [7] исследован экспериментально профиль трещины в полиметилметакрилате в интервале скоростей роста трещины $10^{-6} \leq \dot{l} \leq 10^{-2}$ см/с. Установлено, что при постоянном значении скорости трещины размер зоны предразрушения практически не меняется. В работе [66] представлены результаты прямого измерения размера зоны предразрушения (stage zone) d и критического раскрытия δ_{lc} в вершине растущей трещины в полиметилметакрилате методом оптической интерференции (рис. 5.1.1) в диапазоне скоростей трещины 10^{-8} мм/с $\leq \dot{l} \leq 20$ мм/с.

В аморфных стеклообразных полимерах при определенных условиях нагружения начинают образовываться так называемые «трещины серебра», отличающиеся от обычных трещин тем, что между отчетливо видимыми берегами содержится вещество, структура и свойства которого отличны от основного. Применительно к разрушению полимерных материалов, имеющих исходные трещины, значение изучения «трещин серебра» состоит в том, что обычные трещины развиваются в области материала, содержащей «трещины серебра», а развитию обычной трещины предшествует образование и рост «трещин серебра» в области ее вершины [32]. «трещины серебра» являются объектом усиленного изучения. Эти исследования указывают на связь «трещин серебра» с зоной предразрушения обычной трещины. «трещины серебра» наблюдали в полистироле, полиметилметакрилате, сополимере стирола и акрилонитрила, поливинилхлориде, полисульфоне и поликарбонате [122, 125, 139]. Они были также получены в частично кристаллических полимерах: полипропилене, полиэтилене, полиэтилентерефталате, поликсиметиле, эпоксидных и фенольных смолах [32, 122]. Результаты электронно-оптических исследований «трещин серебра» [58, 77] позволили сделать вывод о том, что вещество «трещины серебра» состоит из ориентированных нитей-фибрилл и плотность его составляет 40–60% плотности исходного материала [58]. Диаметр фибрилл равен 25–50 нм. При раскрытии трещины фибриллы вытягиваются из матричного материала, распространяются, удлиняются, при большом удлинении разрываются [32]. Таким образом, в соответствии с современными физическими представлениями [32] модель возникновения и начала роста «трещины серебра» можно представить в виде, приведенном на рис. 5.2.3, где A – область упругой деформации; B –

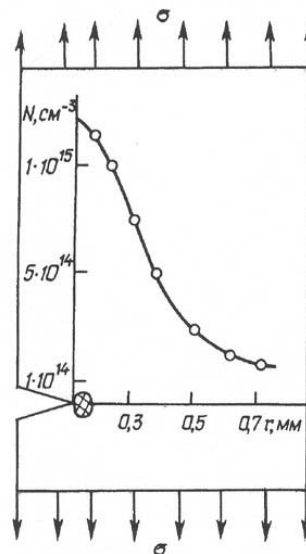


Рис. 5.2.2

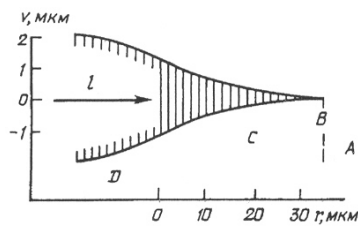


Рис. 5.2.3

область образования зародышей пустот, фибрилл; C – рост «трещины серебра» вследствие образования и деформирования фибрилл; D – превращение «трещины серебра» в обычную трещину вследствие разрыва напряженных фибрилл. Как видно из сопоставления, структура материала – концевой зоны трещины, приведенная в [13, 82, 130], аналогична структуре материала физической модели «трещины серебра». Исследованию механических свойств материала «трещины серебра» посвящена работа [32], в которых для поликарбоната была

изучена зависимость напряжение-деформация при наличии большой плотности «трещин серебра», полученных в определенных условиях. Так, для полистирола средняя толщина «трещины серебра» – 0,19 мкм. Реологические характеристики материала «трещин серебра» не исследованы.

Другой подход к оценке механических свойств фибрилл «трещин серебра» основан на изучении напряжений на границе раздела «трещина серебра» – матрица. В работе [32] было показано, что форма контура «трещины серебра» качественно хорошо согласуется с формой, рассчитанной по модели трещины типа Дагдейла. Принимая некоторые упрощающие предположения, в том числе пренебрегая реологическими эффектами и используя соотношения этой модели, авторы получили значения напряжения на берегах «трещины серебра», равные пределу прочности матричного материала. Если учесть, что плотность материала «трещины серебра» составляет примерно 50% плотности материала трещины, получим, что прочность фибрилл в два раза выше прочности исходного материала. В работе [32] методом фотоупругости в окрестности вершины надреза в полиметилметакрилате и поликарбонате обнаружена высокая концентрация напряжений до возникновения «трещины серебра» и существенное уменьшение напряжений через 60 мин после начала ее роста. Это один из немногих экспериментальных результатов, свидетельствующих о существенной роли реологических свойств материала «трещины серебра» в процессе разрушения. В связи с ослаблением концентрации напряжений при возникновении «трещины серебра» возможна остановка роста макротрещины, инициирующей «трещину серебра», и при постоянной величине нагрузки, как это отмечено в [32]. В работе [32] методами голографической интерферометрии обнаружено увеличение напряжений на берегах «трещины серебра» при ее раскрытии. Учитывая расчетный характер работы [32] и принятые в них упрощающие допущения, полученный в них результат расцениваем лишь как экспериментальное обоснование приблизительно равномерного распределения напряжений в «трещине серебра», тогда как величина этих напряжений зависит от величины ее раскрытия и реологических свойств фибрилл в соответствии с данными работы [129].

На основании результатов исследований, представленных в указанных выше работах, можно сформулировать следующие выводы.

1. «Трещина серебра» заполнена веществом, находящимся в особом структурном состоянии – в виде системы однонаправленных тяжей – фибрилл, чередующихся с пустотами.

2. Фибриллы разделяются при достижении некоторого критического значения удлинения путем проскальзывания молекулярных цепей или их разрыва.

3. Фибриллы обладают выраженными реологическими свойствами.

4. Напряжения в «трещине серебра» приблизительно равномерно распределены по ее длине.

5. Уровень напряжений в «трещине серебра» не является постоянным, в частности, он зависит от величины напряжений в матрице и времени их воздействия.

Приведенные выше основные свойства материала «трещины серебра» качественно аналогичны свойствам материала зоны предразрушения, принятой в RS-модели разрушения [27, 28]. Точные количественные оценки характеристик реологических свойств фибрилл и напряжений в концевой зоне растущей трещины при различных условиях нагружения отсутствуют.

В работах [13, 23, 27, 28, 48, 82, 130] разработаны модели трещин в твердых полимерах, учитывающих структуру и реологические свойства зоны предразрушения у фронта трещины. Эти двухуровневые модели мезомеханики разрушения более сложны, чем обычно применяемые в таких ситуациях модели типа Дагдейла. Конечно, определение параметров этих структурных моделей чрезмерно сложно ввиду малости локальной зоны предразрушения. Тем не менее, исследование докритического развития трещин на основе таких структурных моделей, позволяет установить ряд общих закономерностей изменения характеристик зоны предразрушения во время развития трещины.

Наряду с этим, в работах [27, 28, 94] изложены методы экспериментального исследования кинетики трещины в полимерном материале и изучены закономерности изменения характеристик зоны предразрушения во время роста трещины. Анализ полученных теоретических и экспериментальных результатов позволяет обоснованно выбрать более простую модель развивающейся трещины в полимерном материале.

Дискретная структурная модель зоны предразрушения трещины. В одной из первых работ по механике длительного разрушения вязкоупругих полимеров [130] была предложена модель трещины в полимерном материале с учетом особенностей структуры ее краевой зоны предразрушения. Эта модель была основана на многочисленных экспериментальных данных [32, 139], свидетельствующих о том, что трещины нормального отрыва во многих полимерных материалах имеют узкую зону предразрушения, которая заполнена веществом, находящемся в особом структурном состоянии в виде системы однонаправленных тяжей (фибрилл), связывающих ее берега и ориентированных вдоль действия внешней нагрузки, т.е. зоны предразрушения трещин в полимерах имеют строение, аналогичное «трещинам серебра».

В этой работе рассмотрена бесконечная тонкая пластина из полимерного материала, ослабленная трещиной длиной $2L$ ($L = l_0 + d$). Пластина на бесконечности растягивается постоянными усилиями p , нормальными берегам трещины. Противоположные берега трещины в концевой области предразрушения на участках $d = L - l_0$ (рис. 5.2.4) соединены тонкими нитями – тяжами (фибриллами), т.е. концевые области предразрушения трещин в полимерах имеют строение, подобное «трещинам серебра» (craze zones).

Авторы ограничиваются исследованием раскрытия трещин под действием малых докритических постоянных нагрузок, при которых материал пластины и тяжей деформируется, следуя соотношениям линейной теории вязкоупругости в форме (5.1.1). Рассматривается случай, когда тяжи ориентированы вдоль действия внешней нагрузки. Полагается, что трещина разрушения длиной $2l_0$, растет путем последовательного разрыва тяжей.

Трещина моделируется прямолинейным разрезом. Полагается, что ширина всех тяжей одинакова и равна b и они непрерывно заполняют концевую область, т.е. $b = (L - l_0) / N$ (N – число тяжей, рис. 5.2.5). В модели, исследуемой в данной статье, как и в модели Дагдейла [67], размер зоны предразрушения d определяется из условия конечности напряжений в конце зоны предразрушения при $x = L$, что эквивалентно условию плавности смыкания берегов зоны предразрушения

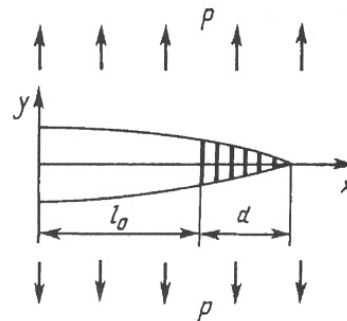


Рис. 5.2.4

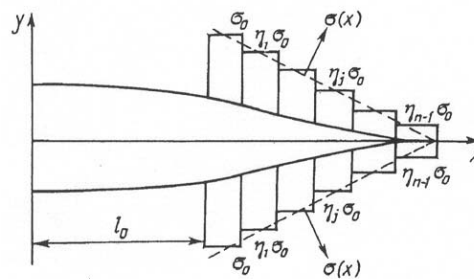


Рис. 5.2.5

$$\lim_{x \rightarrow L} \delta'(x) = 0, \quad (5.2.1)$$

где $\delta = 2v$ – раскрытие трещины; v – смещение, нормальное плоскости расположения трещины.

Удлинение каждого тяжа представлено в форме

$$\Delta_n = \pi T^* \eta_n \sigma_0 \lambda_0, \quad (5.2.2)$$

где λ_0 – начальная длина тяжей; $\eta_n \sigma_0$ – напряжение в n -тяже (σ_0 – напряжение в крайнем тяже при $x = l_0$); T^* – интегральный оператор Вольтерра

$$T^* f = T_0 [f(t) + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau]. \quad (5.2.3)$$

Для определения неизвестных уровней напряжений в тяжах вводятся дополнительные условия

$$\Delta_n = \delta_n = \frac{1}{b} \int_{l+nb_0}^{l_0+(n+1)b} \delta(x) dx, \quad (5.2.4)$$

которые требуют, чтобы удлинение каждого из n тяжей равнялось среднему расширению берегов трещины на соответствующем участке. Используя решение задачи [42] о трещине в упругой пластинке, к берегам которой приложены самоуравновешенные напряжения

$$g(x) = \begin{cases} p, & |x| < l_0; \\ p - \eta_n \sigma_0, & l_0 + nb < |x| \leq l_0 + (n+1)b \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

на основе принципа Вольтерра получено соотношение для определения вязкоупругого раскрытия в форме

$$\delta(x, t) = -2T^* \int_{-L(t)}^{L(t)} g(x, t) \Gamma[L(t), x, \xi] d\xi$$

$$\left(\Gamma[L(t), x, \xi] = \ln \frac{L^2(t) - x\xi - \sqrt{(L^2(t) - x^2)(L^2(t) - \xi^2)}}{L^2(t) + x\xi + \sqrt{(L^2(t) - x^2)(L^2(t) - \xi^2)}} \right).$$

На основе соотношений (5.2.1) – (5.2.6) получена система алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров η_n и d , а также, исходя из критерия критического раскрытия трещины (5.1.4), определена величина инкубационного периода развития трещины и, соответственно, время ее инициирования.

Следует, однако, отметить, что определение параметров рассмотренной модели в общем случае затруднительно, поэтому представляет интерес исследование более простых моделей, изложенных ниже, для которых характеристики разрушения можно получить в виде аналитических зависимостей, что позволяет установить закономерности разрушения полимеров.

Реологическая структурная модель разрушения полимеров (RS-модель). В работе [13] была предложена реологическая структурная модель трещины в полимерах (RS-модель), которая получила дальнейшее развитие в работах [48, 82]. Эта модель разрушения также основывается на отмеченных в предыдущем параграфе экспериментальных данных о структуре концевой зоны в вязкоупругих полимерах, строение которой аналогично структуре «трещин серебра», однако, в отличие от результатов, изложенных в §4, позволяет учесть возможный факт, установленный опытными на-

блюдениями в работах [32, 34, 116] о том, что «трещина серебра» заполнена веществом в виде системы однонаправленных тяжей (фибрилл), реологические и прочностные свойства которых вследствие значительной вытяжки отличаются от свойств основного материала. Это достигается тем, что деформирование вязкоупругого материала вне трещины и материала тяжей описывается реологическими уравнениями вида (5.1.1) с операторами различной структуры. Полагается, что плотность распределения тяжей в зоне предразрушения постоянна.

В дальнейшем авторы [13, 48, 82] ограничились только механической стороной сложного процесса длительного разрушения. В этом случае зону предразрушения у края трещины в полимере, представляющей собой узкую область расслоенного материала, моделируют, подобно работе [3], разрезом на продолжении трещины длиной $d = L - l$, находящимся под действием сжимающих самоуравновешенных напряжений

$$\sigma(x, t) = n_0 p(x, t), \quad (5.2.7)$$

где $p(x, t)$ – напряжения в тяжях; n_0 – плотность их распределения.

Как показано в экспериментальной работе [32], распределение напряжений в зонах предразрушения в полимерах близко к равномерному, кроме того, как следует из теоретических расчетов [23, 25, 40], замена неравномерного распределения напряжений в зоне предразрушения равномерным незначительно влияет на полученные характеристики разрушения, такие, как критическая длина трещины, скорость ее роста, долговечность полимерного материала с трещиной.

Поэтому при формулировке *RS*-модели полагают распределение напряжений в зоне предразрушения равномерным и постулируют следующие принципы этой модели.

1. Напряжения в тяжях $p(x, t)$ заменяются их средним значением по длине зоны предразрушения

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{d} \int_l^L p(x, t) dx. \quad (5.2.8)$$

Соответственно, согласно (5.2.7), самоуравновешенные напряжения $\sigma(x, t)$, действующие на берега разреза, моделирующего зону предразрушения трещины, будут

$$\sigma(t) = n_0 \bar{\sigma}(t). \quad (5.2.9)$$

2. Значения напряжений $\bar{\sigma}(t)$ определяются из интегрального условия совместного деформирования материала вне зоны предразрушения и системы тяжей

$$\bar{\delta}(t) = \bar{\Delta}(t) \quad (5.2.10)$$

$$\left(\bar{\delta}(t) = 2\bar{v}(t) = \frac{2}{d} \int_l^L v(x, t) dx \right), \quad (5.2.11)$$

$\bar{\delta}(t)$ – среднее нормальное расширение берегов трещины в зоне $l < x \leq L$,

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{d} \int_l^L \Delta(x, t) dx. \quad (5.2.12)$$

3. Полагается, что напряжения в конце зоны предразрушения трещины при $x = L$ конечны, для чего необходимо выполнение условия (5.2.1).

4. Среднее удлинение тяжей связано со средним значением напряжений соотношением

$$\bar{\Delta}(t) = \lambda_0 S^* \bar{\sigma}(t), \quad (5.2.13)$$

где λ_0 – постоянная, имеющая размерность длины; S^* – интегральный оператор Вольтерра II рода в форме

$$S^* g = S_0 [g(t) + \int_{t_0}^t R_s(t-\tau)g(\tau)d\tau]. \quad (5.2.14)$$

Мгновенные и временные характеристики этого оператора, в общем случае, отличаются от аналогичных характеристик операторов, входящих в уравнения (5.1.1), которые описывают деформирование вязкоупругого массива вне трещины.

В качестве критерия разрушения принимается критерий критического раскрытия трещины (5.1.4). Полагается, что критерий (5.1.4) справедлив в любой момент времени медленного докритического развития трещины, т.е., что δ_{lc} постоянно во время роста трещины. Данные экспериментальных исследований, приведенных в книгах [27, 28] показывают, что для ряда полимерных материалов это требование выполняется.

Отметим, что RS -модель позволяет интегрально оценить уровень напряжений в зоне предразрушения, а также величину этой зоны, что является принципиально важным при введении различных упрощающих положений относительно параметров зоны предразрушения, а также учесть, в отличие от других более простых моделей, особенности реологического поведения материала в концевой зоне трещины.

В работах [28, 48, 82] в рамках RS -модели исследована задача о медленном докритическом росте сквозной трещины нормального отрыва в тонкой пластине из вязкоупругого полимерного материала при длительном действии постоянной внешней нагрузки и изучены закономерности изменения параметров зоны предразрушения ($d(t)$ и $\sigma(t)$) во время роста трещины. В этих работах, исходя из решения соответствующей задачи линейной теории вязкоупругости в форме (5.2.6) и принципов RS -модели в форме (5.2.8) – (5.2.13), получено операторное уравнение для определения осредненных напряжений $\bar{\sigma}$ в зоне предразрушения

$$S^* \bar{\sigma}(t) = \frac{\pi}{3n_0\lambda_0} T^* \left[\frac{K_1^2}{\sigma(t)} \right], \quad (5.2.15)$$

где λ_0 – начальная длина тяжей в зоне предразрушения.

Это уравнение решено приближенно на основе метода Шепери [133]. На основе решения уравнения (5.2.15) для основного периода развития трещины, описываемого уравнением (3.2.26), в рамках аппроксимации [133] получены следующие выражения для параметров зоны предразрушения RS -модели:

$$d(t) = d_0 \frac{\psi_s(q)}{\psi_T(q)}; \quad (5.2.16)$$

$$\sigma(t) = a_0 K_I \left(\frac{\psi_T(q)}{\psi_T(q)} \right)^{1/2}, \quad (5.2.17)$$

где $a_0 = \frac{\pi}{3n_0\lambda_0}$; $d_0 = \frac{3\lambda_0 S_0}{8n_0 T_0}$; S_0 и T_0 – мгновенные значения функций $S^* \cdot 1$ и $T^* \cdot 1$;

функции $\psi_s(q)$ и $\psi_T(q)$ определяются соотношениями $S^* \cdot 1 = S_0 \psi_s(q)$; $T^* \cdot 1 = T_0 \psi_T(q)$ и имеют вид

$$\psi_s(q) = 1 + \int_0^q R_s(q-\theta) d\theta; \quad \psi_T(q) = 1 + \int_0^q R_T(q-\theta) d\theta$$

($q = d/\dot{l}$, \dot{l} – скорость роста трещины).

Из уравнения (5.2.16) следует, что если скорость роста трещины постоянна ($\dot{l} = \text{const}$), то размер зоны предразрушения не меняется со временем даже при произвольных функциях $\psi_s(q)$ и $\psi_T(q)$, т.е. для общего случая. Поскольку при длительном действии постоянной нагрузки трещина развивается медленно, со скоростью, близкой к постоянной [28] в течение большей части времени своего развития, то из предыдущего анализа можно сделать вывод о допустимости концепции постоянства зоны предразрушения во время роста трещины, как это сделано в работах [13, 20, 23].

Из соотношения (5.2.17) следует, что напряжения в зоне предразрушения $\sigma(t)$ существенно меняются при развитии трещины, поскольку они пропорциональны K_I , а функции ψ_T и ψ_s при росте трещины в квазистатическом режиме изменяются незначительно.

Приведенный анализ показывает, что данная ситуация отличается от требований к моделям Дагдейла, Леонова – Панасюка, где полагается, что напряжения в концевой зоне трещины постоянны во время ее развития.

5.3. Экспериментальные исследования зоны предразрушения в полимерном материале. В работах [10, 27, 28, 94] предложена методика определения размеров зоны предразрушения, основанная на определении скачков перемещений вблизи вершины трещины на ее продолжении. Зона предразрушения определяется как область, в которой перемещения $v(x, 0)$ имеют разрыв. Основной задачей, таким образом, было исследование разрыва в вершине трещины (рис. 5.3.1) и перемещений на оси $y = 0$.

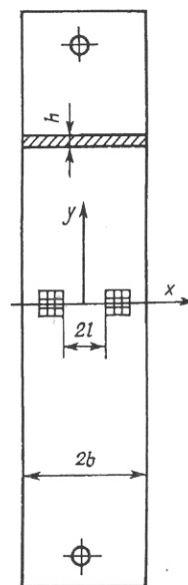


Рис. 5.3.1

Технология изготовления образцов описана в монографии [27]. Подготовленные образцы устанавливали в испытательной машине, прикладывали постоянную нагрузку, значение которой подбиралось таким, чтобы обеспечить медленный рост трещины. В процессе роста трещин с помощью микроскопа фотографировали нанесенное ранее изображение сетки, шаг которой составлял 0,1 – 0,2 мм. Затем с помощью микроскопа измеряли координаты узлов деформированной сетки. Система координат и образец показаны на рис. 5.3.1.

Определенное таким образом поле перемещений $v(x, y)$ для триацетатной пленки, испытанной при температуре $T = 293 \text{ K}$, показано на рис. 5.3.2 в виде семейства линий

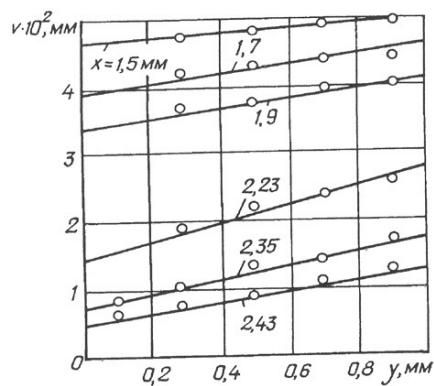


Рис. 5.3.2

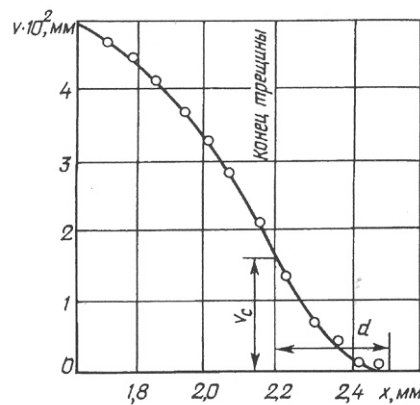


Рис. 5.3.3

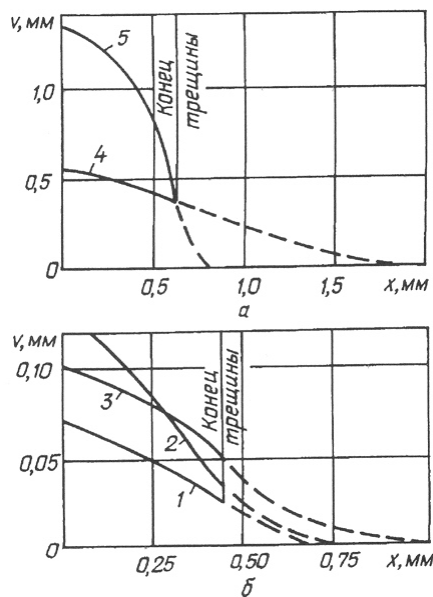


Рис. 5.3.4

лены по формуле $\delta_{lc} = 2v(l, 0)$.

На рис. 5.3.4 показано изменение перемещений в окрестности вершины трещины (l – триацетатная пленка при $T = 311\text{ K}$, 2 – целлулоид, 3 – полиэтилен среднего давления, 4 – графитонаполненный фторопласт, 5 – фторопласт 4ТМ).

$v = v(y)$, соответствующих различным фиксированным значениям x . При $y < 1$ мм зависимость $v = v(y)$ может быть представлена в виде $v = a(x) + b(x)y$, где $a(x) = v(x, 0)$, $b(x) = dv(x, 0) / dy$.

Параметры $a(x)$ и $b(x)$ определяли по методу наименьших квадратов для каждого фиксированного значения x . Полученные таким путем значения $v(x, 0)$ показаны на рис. 5.3.3. Изменение перемещений в окрестности конца трещины обладает следующими особенностями:

- 1) при $x > l$ существует разрыв перемещений, т.е. $v(x, 0) \neq 0$;
- 2) на небольшом ($d = 0,3\text{ мм}$) расстоянии от вершины трещины (при $x > l + d$) график перемещений сливается с осью x ;
- 3) при $x \cong l$ (l – длина растущей трещины) кривая $v(x, 0)$ имеет точку перегиба. Раскрытие в вершине трещины опреде-

Таблица 3

Материал	Статистические оценки параметров d , δ_{lc} (мм)
Полиэтилен среднего давления	$0,61 < d < 0,79$, $r_d = -0,23$; $0,08 < \delta_{lc} < 0,11$,
Фторопласт 4ТМ	$0,19 < d < 0,25$, $r_d = 0,34$; $0,66 < \delta_{lc} < 0,73$, $r_\delta = 0,28$;
Графитонаполненный фторопласт	$1,34 < d < 1,54$, $r_d = -0,36$; $0,67 < \delta_{lc} < 0,70$, $r_\delta = 0,06$;
Целлулоид	$0,27 < d < 0,45$, $r_d = 0,36$; $0,05 < \delta_{lc} < 0,09$, $r_\delta = 0,42$;
Триацетатная пленка при температуре 293° K	$0,18 < d < 0,29$, $r_d = -0,04$; $0,034 < \delta_{lc} < 0,050$, $r_\delta = -0,14$;
Триацетатная пленка при температуре 311° K	$0,25 < d < 0,32$, $r_d = 0,02$; $0,040 < \delta_{lc} < 0,054$, $r_\delta = -0,23$

По приведенной методике были определены значения δ_{lc} и длины зоны предразрушения d для различных значений длин растущей трещины. На рис. 5.3.5 и 5.3.6 показаны результаты измерений δ_{lc} и d для триацетатной пленки (293 K) при различных длинах трещины.

Результаты статистической обработки экспериментальных данных приведены в таблице (первые четыре материала испытаны при комнатной температуре). Малые значения коэффициентов корреляции r_d и r_{δ} указывают на отсутствие корреляции между величинами $d-l$ и $\delta_{lc}-l$.

Отсюда следует, что экспериментально подтверждается принцип автономности зоны предразрушения для медленно растущей трещины.

Ввиду практического постоянства параметров d и δ_{lc} во время стабильного роста трещины в работах [27, 28, 94] определен их доверительный интервал, следуя формуле

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}} \leq a \leq \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}},$$

где a – доверительная оценка генерального среднего, значение $t_{1-p/2}$ при заданном уровне значимости p ($p = 0,95$) и числа степеней свободы $f = n - 1$ определяются по таблицам распределения Стьюдента.

Результаты определения доверительных интервалов параметров исследованных материалов приведены в табл. 3, а для триацетатной пленки (293 K) показаны на рис. 5.3.5 и 5.3.6 (заштрихованная область).

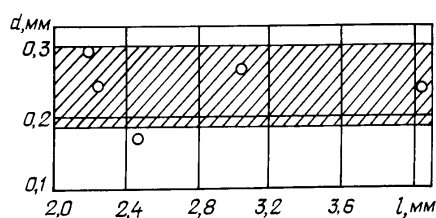


Рис. 5.3.5

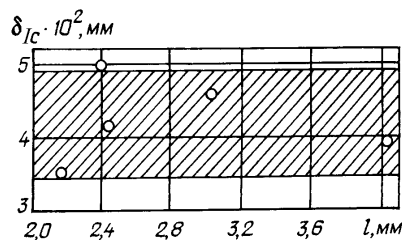


Рис. 5.3.6

Обобщение RS-модели на случай длительного разрушения вязкоупругих волокнистых композитных материалов. В работах [24, 28] дано обобщение RS-модели для исследования длительного разрушения волокнистых композитных материалов.

Как показывают эксперименты [28, 29], во время медленного докритического развития трещины в пластинах, выполненных из волокнистых тканевых стеклопластиков, у края трещины образуется и растет вместе с ней зона предразрушения, представляющая собой узкую клиновидную область в направлении продолжения трещины, в которой разрушено связующее и некоторая часть волокон, а берега этой зоны связаны неразрушенными армирующими волокнами. Эта ситуация напоминает структуру краевой зоны трещины в линейных полимерах (подобную «трещинам серебра») и позволяет дать обобщение RS-модели разрушения полимеров, описанной в предыдущем разделе для исследования разрушения композитных волокнистых материалов. В работах [24, 28] на основе RS-модели исследованы закономерности изменения параметров зоны предразрушения у края сквозной макротрещины нормального отрыва при ее медленном росте в пластине из волокнистого композитного ортотропного материала.

Нелинейная модель зоны предразрушения (cohesive zone) у края трещины в полимерах. В обобщающей статье [119] приведены результаты теоретических исследований стабильного квазистатического роста трещины нормального отрыва (mode I) в вязкоупругих полимерах на основе предложенной автором модели мезомеханики разрушения, учитывающей нелинейные свойства зоны предразрушения (cohesive zone).

Согласно этой модели деформирование полимерного материала вне трещины описывается линейными соотношениями теории вязкоупругости типа (5.1.1), а в зоне предразрушения (cohesive zone) моделируется узкой полоской на продолжении тре-

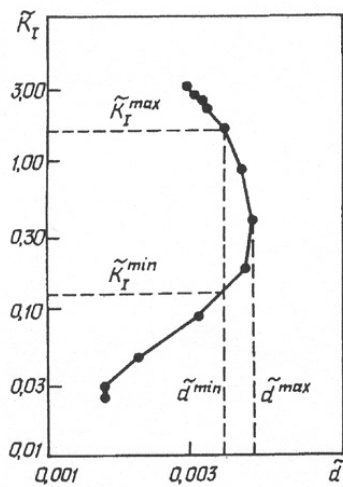


Рис. 5.3.7

щины, материал которой полагается нелинейным. Деформирование во времени этого нелинейного материала описывается уравнениями нелинейной ползучести, которые учитывают наличие микроповреждений (damage).

В рамках такой модели численными методами проведены расчеты уровня напряжений в зоне предразрушения и энергии разрушения для различных скоростей роста трещины, а также изменение зоны предразрушения (cohesive zone) в зависимости от фактора интенсивности напряжений K_I для конкретного полимерного материала (polyvinylacetate).

Отмечено, что для большого диапазона скоростей трещины энергия разрушения существенно изменяется и только для чрезмерно малых скоростей трещины ее можно принять постоянной.

В работе [119] также отмечается, что уровень напряжений в зоне предразрушения (cohesive zone) зависит от скорости трещины и фактора интенсивности напряжений K_I , что согласуется с выводами раздела 5.3 этого параграфа, полученными на основе линейной RS - модели разрушения.

Как следует из диаграммы изменения безразмерной величины зоны предразрушения (cohesive zone) \tilde{d} от приведенного значения \tilde{K}_I (normalized stress intensity factor), описанной в работе [119] (рис. 5.3.7), эта зависимость имеет не монотонный характер, однако, для большого диапазона значений $\tilde{K}_I^{\min} < \tilde{K}_I < \tilde{K}_I^{\max}$ величина \tilde{d} слабо зависит от \tilde{K}_I (пунктирные линии нанесены автором настоящей статьи), что согласуется с закономерностями, полученными по линейной RS - модели (см. раздел 5.2).

Поэтому, если на начальном этапе развития трещины (для малых \tilde{K}_I) согласно нелинейной модели [119] происходит рост зоны предразрушения (cohesive zone) \tilde{d} , то на последующем этапе стабильного роста трещины величина \tilde{d} практически не зависит от \tilde{K}_I и меняется незначительно. В связи с этим ее для расчетов можно полагать постоянной.

В некоторых работах по этой проблеме [3, 119] отмечается, что изменение размера зоны предразрушения возможно в начальный период роста трещины, когда происходит значительное возрастание ее скорости. В случае, когда происходит стабильный рост трещины со скоростью, близкой к постоянной, зона предразрушения (craze zone) остается практически автономной во время этого периода вплоть до начала неустойчивого развития трещины.

Тот факт, что результаты приведенных выше экспериментальных исследований характеристик зоны предразрушения разнообразных полимерных материалов не случайны, подтверждают и теоретические исследования докритического стабильного роста трещин, выполненных на основе RS -модели мезомеханики разрушения, учитывающей в рамках линейной постановки различные вязкоупругие свойства матричного материала и материала тяжей в зоне предразрушения.

5.4. Анализ теоретических и экспериментальных исследований стабильного роста трещин в полимерах. Основным затруднением прямого применения RS -модели к расчету докритического развития трещин в вязкоупругих полимерах является сложность определения структурных и реологических параметров чрезвычайно малой зоны предразрушения, которые входят в определяющие уравнения докритического развития трещины.

Закономерности изменения параметров зоны предразрушения, выполненные на основе *RS*-модели, позволяют обоснованно выбрать более простую модель разрушения вязкоупругих полимеров. Как следует из этих результатов, размер зоны предразрушения во время медленного роста трещины со скоростью, близкой к постоянной, практически не меняется. Напротив, напряжение в зоне предразрушения меняется пропорционально коэффициенту интенсивности напряжений. Это позволяет в качестве более простой для исследования модели разрушения выбрать предложенную в работах [13, 20] модифицированную модель разрушения полимеров, основанную на постоянстве зоны предразрушения во время роста трещины, тем более, что в предыдущих разделах экспериментальными методами для полимеров и композитов с различными реологическими свойствами показано, что величины d и δ_{lc} практически неизменны при медленном развитии трещины (рис. 5.1.1). Это подтверждает применимость модифицированной модели для решения конкретных задач длительного разрушения вязкоупругих полимеров с трещинами.

Эта модель основывается на следующих положениях:

при развитии трещины размер зоны предразрушения остается постоянным $d = \text{const}$;

напряжение в зоне предразрушения $\sigma(t)$ изменяется со временем и определяется из условия конечности напряжений на краю зоны предразрушения (5.2.1);

в качестве критерия разрушения выбран критерий критического раскрытия трещины (5.1.4).

Рассмотрим докритический рост макротрещин ($d \ll l$) во время основного периода их развития.

Для медленно меняющихся или постоянных во времени нагрузок уравнение развития трещины во время основного периода (3.2.26) приводится к виду [17, 20]

$$\frac{K_{lc}}{K_I} = 1 + \frac{d}{i} \int_0^1 R\left(\frac{sd}{i}\right) F(s) ds \quad \left(F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right). \quad (5.4.1)$$

Уравнение (5.4.1) является интегро-дифференциальным уравнением, описывающим квазистатический рост трещины нормального разрыва в вязкоупругой среде. Кроме того, это уравнение устанавливает связь между K_I движущейся трещины и скоростью ее роста.

Для дальнейшего исследования рассмотрим полимеры, деформирование которых описывается интегральными операторами с ядром Абеля (3.3.1).

Уравнение (5.4.1) приводится к виду

$$\frac{K_{lc}}{K_I} = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2(2-\alpha)\Gamma(2,5-\alpha)} \left(\frac{d}{i}\right)^{1-\alpha}. \quad (5.4.2)$$

Экспериментальные данные о кинетике роста трещин в полимерных пластинах. Исследования кинетики роста трещин в вязкоупругих материалах проведены для полиэтилена среднего давления, фторопласта 4ТМ, графитонаполненного фторопласта Ф-4Г10, целлулоида, триацетатной пленки при $T = 293$ К и триацетатной пленки при $T = 311$ К в работах [27, 28, 94].

Испытания осуществлены на плоских образцах длиной 270 мм, шириной 25–70 мм и толщиной 0,14–0,5 мм с центральной трещиной длиной 6–8 мм. Длина образца удовлетворяет условию $L_0/4b > 1,1$, где L_0 – длина образца; $2b$ – ширина образца. Соблюдение этого условия обеспечивает отсутствие влияния захватов на напряженно-деформированное состояние образца в зоне трещины. Размеры исходных трещин и уровни напряжений были различными, причем длины трещин выбирали такими, чтобы соблюдалось соотношение $d \leq 0,1l$, когда справедлива концепция фактора интенсивности напряжений.

В этом случае можно проводить корректное сопоставление экспериментальных результатов и теоретических зависимостей (5.4.1), (5.4.2), описывающих рост трещин с малыми концевыми зонами. Уровни напряжений выбирались такими, которые бы обеспечивали медленный рост трещин во времени и применимость линейной теории вязкоупругости.

По измеренным значениям длины трещины в функции времени определяли зависимости $l-t$. Типичные кривые роста трещин для полиэтилена среднего давления (при $\sigma = 6,4 \cdot 10^6$ Па) и фторопласта 4ТМ (при $\sigma = 9,1 \cdot 10^6$ Па) показаны на рис. 5.4.1, а, б, соответственно.

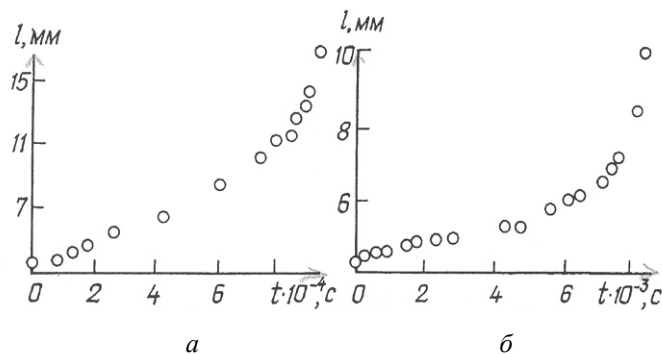


Рис. 5.4.1

Для всех испытанных материалов характерным является более высокая скорость роста трещины в течение переходного периода, т.е. времени, когда исходная макротрещина подрастает на величину d , причем на этом этапе трещина растет с замедлением. В течение основного периода рост трещин происходит со скоростью, близкой к постоянной, но с небольшим ускорением, и лишь к концу основного периода она резко увеличивается. Затем наступает динамический период, т.е. происходит спонтанное разрушение образца. Следует отметить, что эта картина качественно соответствует теоретическим расчетам в разделе 3.

При решении технических задач, связанных с расчетом на трещиностойкость конструкций из полимерных материалов, возникает вопрос о выборе базовых характеристик (их можно назвать также необходимыми и достаточными), в полной мере определяющих трещиностойкость полимера с учетом длительного характера действия эксплуатационной нагрузки. Как было показано в работах [20, 27], такими базовыми характеристиками являются: 1) критическое раскрытие δ_{lc} в вершине трещины; 2) размер d зоны предразрушения; 3) реологические (включая упругие) параметры.

В случае макротрещины величина δ_{lc} может быть выражена через предельное значение K_{lc} коэффициента интенсивности напряжений.

В работах [27, 28, 94] в соответствии с постановкой задач исследованы характеристики трещиностойкости K_{lc} , d и параметры ядер ползучести, которые были определены из ряда независимых экспериментов. Уравнения, описывающие закономерности роста макротрещины в основном периоде ее развития в случае материала, ползучесть которого описывается ядром Абеля, имеют вид (5.4.2). Такие материалы рассмотрены в дальнейшем. Результаты сравнения теоретических (т.е. рассчитанных по соотношению (5.4.2)) и экспериментально определенных зависимостей представлены в координатах $\dot{l}-K_I$ на рис. 5.4.2 (а – полиэтилен среднего давления; б – фторопласт 4ТМ; в – графитонаполненный фторопласт; сплошные линии – теоретические значения, точки – экспериментальные данные).

Таким образом, определенные экспериментальные данные и рассчитанные по данным экспериментов теоретические зависимости $K_I - \dot{l}$ хорошо согласуются. Также хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими результатами было получено в работах [28, 29, 80, 83] при исследовании докритического роста трещин в пластинах из тканевых ортотропных стеклопластиков на основе полиэтилена или эпоксидной смолы. Эти исследования также проведены на основе теории длительного разрушения вязкоупругих тел (см. раздел 3), основанной на постоянстве размера зоны предразрушения во время роста трещины.

6. Основные выводы.

Из анализа теоретических и экспериментальных работ, приведенных в настоящем обзоре и посвященных механике длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами, можно сделать следующие выводы.

1. Процесс развития трещин нормального разрыва (mode I) в изотропных и анизотропных вязкоупругих телах при нагрузках меньше критической величины можно разделить на три периода: инкубационный, переходной и основной. Длительность каждого из этих периодов определяется реологическими и структурными свойствами материала, геометрией тела, видом нагрузки (SIF для макротрещин), характеристиками разрушения материала.

2. Теоретические и экспериментальные исследования стареющих и нестареющих вязкоупругих тел показали, что после инкубационного периода трещина нормального разрыва начинает движение (mode I crack initiation) с малой скоростью, после чего скорость ее роста резко возрастает. В конце переходного периода трещина плавно переходит к квазистационарному развитию в течении основного периода, в конце которого начинается ее быстрое динамическое развитие (в случае неустойчивых трещин).

3. В отличие от кинетики роста трещин с малыми зонами предразрушения в нежестких (soft) вязкоупругих телах, когда долговечность практически определяется основным периодом стабильного роста трещины, в случае немалых зон предразрушения инкубационный и переходной периоды вносят существенный вклад в долговечность вязкоупругого тела.

4. В жестком вязкоупругом (квазиупругом) теле с макротрещиной инкубационный период значительно превосходит по длительности период стабильного роста трещины и может практически определять ее долговечность.

5. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что теория [20, 23] позволяет, исходя из реологических свойств материалов, их структуры (для композитов), а также из характера внешней загрузки и геометрии тела (SIF для макротрещин), рассчитать безопасные нагрузки, ниже уровня которых нет докритического роста трещин.

6. Рост трещины при расклинивании вязкоупругого тела жестким клином происходит только с ростом толщины клина. В случае неизменной толщины клина происходит закрытие трещины с течением времени.

7. Использование модели зоны предразрушения на основе критериев прочности позволяет учесть компоненту внешней нагрузки, действующей параллельно плоскости расположения трещины и исследовать процесс длительного разрушения при двухосном нагружении.

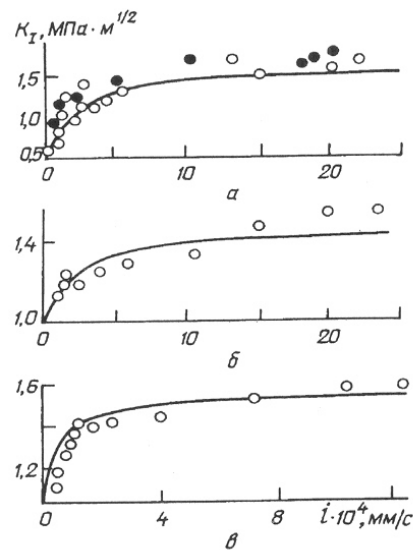


Рис. 5.4.2.

8. Исследование процессов развития систем коллинеарных трещин в вязкоупругих телах (многоочагового разрушения – multi-site fracture) показало, что процесс их объединения происходит по двум механизмам. В первом случае происходит спонтанный рост трещин, когда материал перемычки еще находится в неповрежденном состоянии. При реализации второго механизма происходит стабильный рост трещин, приводящий к объединению зон предразрушения.

9. Приведенные результаты экспериментальных исследований подтверждают универсальную особенность процесса длительного разрушения большого класса полимерных материалов, состоящую в том, что в период стабильного развития трещины нормального отрыва (mode I) соблюдается принцип автономности ее зоны предразрушения (craze zone), а также подтверждаются теоретические закономерности, полученные в рамках теории [20, 23] при использовании критерия критического раскрытия трещины (COD).

РЕЗЮМЕ. Наведено огляд теоретичних та експериментальних досліджень процесів деформування та довготривалого руйнування в'язкопружних тіл внаслідок повільного докритичного розвитку тріщин. Огляд орієнтований на дослідження докритичного розвитку тріщин з розвинутими зонами передруйнування і тих умов, які призводять до цього небезпечного розвитку, а також вивчення усіх етапів повільного росту тріщин, від їх ініціювання до початку динамічного розвитку. Проаналізовано моделі, критерії та методи дослідження процесів довготривалого руйнування в'язкопружних тіл з наскрізними та внутрішніми тріщинами. Наведено огляд експериментальних досліджень зон передруйнування в полімерах фізичними та механічними методами, а також теоретичних досліджень цих зон на основі моделей мезомеханіки руйнування, які враховують структурні та реологічні особливості. Особливу увагу надано: дослідженню розвитку тріщин в анізотропних середовищах; врахуванню фактору старіння в'язкопружних матеріалів на процес їхнього довготривалого руйнування; визначенню рівня безпечних зовнішніх навантажень, при яких не може починатися розвиток тріщин, а також дослідженням механізму багатоосередкового руйнування в'язкопружних тіл, послаблених декількома тріщинами і, особливо, закономірностям процесів, що можуть призвести до об'єднання в магістральні тріщини, яке може бути причиною повного руйнування таких тіл. Наведено методи і результати розв'язання плоских та просторових задач механіки довготривалого руйнування старіючих і нестаріючих в'язкопружних тіл з тріщинами при дії сталих і змінних зовнішніх навантажень, розклинюванні, а також при двовісному навантаженні.

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехиздат, 1952. – 324 с.
2. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 4. – С. 3 – 56.
3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Салганик Р.Л. О кинетике распространения трещин: Общие представления. Трещины, близкие к равновесным // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – № 5. – С. 82 – 92.
4. Бессонов М.И., Кувшинский Е.В. Об особенностях развития трещин в твердых полимерах // Физика твердого тела. – 1961. – 3, № 2. – С. 607 – 610.
5. Бессонов М.И. Механическое разрушение твердых полимеров // Успехи физ. наук. – 1964. – 83, № 1. – С. 107 – 135.
6. Бугаков И.Л. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
7. Вавакин А.С., Козырев Ю.М., Салганик Р.Л. Напряженно-деформированное состояние концевой области трещины в полиметилметакрилате // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 2. – С. 111 – 120.
8. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
9. Громов В.Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости // Механика полимеров. – 1967. – № 6. – С. 999 – 1011.
10. Гузь А.Н., Каминский А.А., Назаренко В.М. Механика разрушения. – К.: «АСК», 1996. – 340 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя; Т. 5).
11. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии (в 2-х томах) – К.: Литера, 2008. – 1326 с.
12. Зорин А. Н., Розовский М. И. Метод расшифровки иррациональной функции интегрального оператора // Прикл. механика. – 1965. – 1, № 9. – С. 81 – 88.

13. Каминский А.А. К кинетике развития трещин в твердых полимерах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1968. – № 7. – С. 660 – 665.
14. Каминский А.А. О кинетике развития трещин в полимерных материалах // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 11. – С. 87 – 94.
15. Каминский А.А. Исследование развития трещины в вязкоупругой анизотропной пластине // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 6. – С. 76 – 84.
16. Каминский А.А. Докритический рост трещины с немалой пластической зоной в вязкоупругой среде // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 10. – С. 82 – 89.
17. Каминский А.А. О долговечности вязкоупругих тел с трещинами // Докл. АН СССР. – 1979. – 248, № 4. – С. 819 – 821.
18. Каминский А.А. Долговечность вязкоупругих пластин с трещинами // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 5. – С. 15 – 22.
19. Каминский А.А. О кинетике роста трещин в вязкоупругих телах при циклических нагрузках // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 5. – С. 34 – 37.
20. Каминский А.А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 160 с.
21. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. – К.: Наук. думка, – 1982. – 158 с.
22. Каминский А.А. Докритический рост усталостных микротрещин в вязкоупругих телах // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 11. – С. 36 – 39.
23. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
24. Каминский А.А. Реологическая структурная модель трещины в вязкоупругом композиционном материале // Прикл. механика. – 1992. – 28, № 7. – С. 12 – 18.
25. Каминский А.А., Галатенко Г.В. О докритическом росте трещины в вязкоупругой среде с нелинейным распределением напряжений в концевой зоне трещины // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 12. – С. 78 – 86.
26. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Влияние реологических свойств на закономерности разрушения вязкого квазиупругого тела // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 7. – С. 92 – 98.
27. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Механика разрушения полимеров.–К.: Наук. думка, 1988. – 221 с.
28. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка. – 1992. – 248 с.
29. Каминский А.А., Гаврилов Д.А., Марков В.А. О докритическом росте трещин в полимерном композиционном материале // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 10. – С. 3 – 7.
30. Каминский А.А., Михайленко С.В. Докритическое развитие трещины с немалой зоной предразрушения в вязкоупругом материале // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 7. – С. 66 – 73.
31. Каминский А.А., Руцицкий Я.Я. О применимости принципа Вольтерра при исследовании движения трещин в наследственно упругих средах // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 4. – С. 102 – 108.
32. Кауш Г. Разрушение полимеров. – М.: Мир, 1981. – 440 с.
33. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с.
34. Кнаусс У.Дж. Механика разрушения полимеров // Механика. – 1974. – 144, № 2. – С. 116 – 143.
35. Костров В.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М. Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 3.– С. 112 – 125.
36. Костров В.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М. Распространение трещин в упруго-вязких телах // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1970. – № 7. – С. 20 – 35.
37. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Розвиток найдрибніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механика.– 1959.– 5, № 4.– С. 391 – 401.
38. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 299 с.
39. Лучко Й.Й. Методики оцінки несучої здатності і підвищення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій. – Львів: Слово і комерція, 1997. – 435 с.
40. Оньшко Л.В.. О влиянии закона распределения сил взаимодействия между поверхностями микротрещин на условия разрушения хрупкого тела // Вопр. механики реального твердого тела. – 1964. – Вып. 2. – С. 38 – 48.
41. Павлов П.А., Жунибеков С. Исследование начальной стадии развития трещины при растяжении и сжатии образцов из полиметилметакрилата // Пробл. прочности. – 1973. – № 8. – С. 14 – 18.
42. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
43. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 502 с.
44. Партон В.З., Седов Л.И., Черепанов Г.П. Моделирование явлений разрушения в твердых телах // Избранные проблемы прикладной механики. – М.: ВИНТИ, 1974. – С. 543 – 558.
45. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.–М.: Наука, 1966. – 752 с.
46. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 383 с.

47. Савин Г.Н. Распределение напряжений возле отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
48. Савин Г.Н., Каминский А.А. Об одной модели разрушения вязкоупругих сред // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 9. – С. 3 – 12.
49. Савин Г.Н., Рушицкий Я.Я. О применимости принципа Вольтерра // Механика деформируемых тел и конструкций.– М.: Машиностроение, 1975. – С. 431 – 436.
50. Савин Г.Н., Уразильдяев К.У. Влияние ползучести и старения на напряженное состояние возле отверстий в пластине // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 1. – С. 51 – 53.
51. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 291 с.
52. Ферри Дж.Д. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностр. лит, 1963. – 535 с.
53. Харлаб В.Д. Распространение принципа Вольтерра на случай некоммутирующих операторов // Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та. – 1968. – № 57. – С. 89 – 100.
54. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
55. ACI Committee 224 Control of cracking in concrete structures (224R-01). – Farmington Hills, Mich.: American Concrete Institute, 2001. – 46 p.
56. Atkinson C., Craster R.V. Theoretical aspects of fracture mechanics // Prog. Aerospace Sci. – 1995. – 31, N1. – P. 1 – 83.
57. Allen D.H., Searcy C.R. Micromechanical model for a viscoelastic cohesive zone // Int. J. Fracture. – 2001. – 107, N 2. – P. 159 – 176.
58. Beahan P., Beois M, Hull D. The Morphology of Crazes in Polystyrene // Phil. Mag. – 1971. – 24, N 12. – P. 1267 – 1279.
59. Bogdanova O.S. Limit Equilibrium of an Orthotropic Plate Weakened by a Periodic Row of Collinear Cracks // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 8. – P. 938 – 945.
60. Boltzmann L. Zur Theorie elastischen Nachwirkung // Sitzungsber. Bayer Akad. Wiss. Math-Naturwiss. Kl. – 1874. – 70, N 2. – P. 315 – 325.
61. Brockway G.S., Schapery R.A. Some viscoelastic crack growth relations for orthotropic and prestrained media // Eng. Fract. Mech. – 1978. – 10, N 3. – P. 453 – 469.
62. Chernoiyan Y.A. On Cleavage Fracture of Orthotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 11. – P. 863 – 867.
63. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. – NY: Dover Publications, 2003. – 369 p.
64. Christensen R.M., McCartney L.N. Viscoelastic crack growth // Int. J. Fracture.– 1983.– 23, N 1. – P. R11 – R13.
65. Darabi M.K., Abu Al-Rub R.K., Masad E.A., Huang C.W., Little D.N. A thermo-viscoelastic-viscoplastic-viscodamage constitutive model for asphaltic materials // Int. J. Solids and Struct. – 2011. – 48. – N 1. – P. 191 – 207.
66. Döll W., Schinker M.G., Koenczoel L. A time independent fracture criterion for PMMA // Int. J. Fracture. – 1979. – 15. – P. R145 – R149.
67. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8, N 2. – P. 100 – 104.
68. Graham G.A.C. The correspondence principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary value problems involving time-dependent boundary regions // Quart. Appl. Math. – 1968. – 26, N 2.– P. 167 – 174.
69. Graham G.A.C. Quasi-static crack growth in linear viscoelastic bodies that are acted upon by alternating tensile and compressive loads // Proc. Roy. Irish. Acad. – 1975.– 75, N 19.– P. 260 – 269.
70. Gain A.L., Carroll J., Paulino G.H., Lambros J. A hybrid experimental/numerical technique to extract cohesive fracture properties for mode-I fracture of quasi-brittle materials // Int. J. Fracture. – 2011. – 169, N 2. – P. 113 – 131.
71. Gutzul V.I., Kaminsky A.A. Kinetics of Fracture of a Viscoelastic Plate with Two Cracks // Int. Appl. Mech. – 1989. – 25, N 5. – P. 477 – 483.
72. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 1 – 57.
73. Guz A.N. On One Two-Level Model in the Mesomechanics of Compression Fracture of Cracked Composites // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 3. – P. 274 – 285.
74. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A. Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials With Interface Cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 1. – P. 1 – 61.
75. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech.– 1957. – 24, N 3. – P. 361 – 364.

76. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. – Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. – 414 p.
77. Kambour R.P. The Role of Crazing in the Mechanism of Fracture of Glassy Polymers // Appl. Polym. Symp. – 1968. – 7. – P. 215 – 235.
78. Kachanov L.M. Introduction to continuum damage mechanics. – Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986. – 135 p.
79. Kaminsky A.A. Subcritical growth of cracks with non-small plastic zones in viscoelastic bodies // Advances in fracture research. Proc. 6th. Int. Conf. of Fracture, India. – 1985. – 4. – P. 2849 – 2858.
80. Kaminsky A.A. Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep. Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity // Selected papers from ICF8. Pergamon, 1994. – P. 513 – 520.
81. Kaminsky A.A. Investigations in the Field of the Mechanics of the Fracture of Viscoelastic Bodies // Sov. Appl. Mech. – 1981. – 16, N 9. – P. 741 – 760.
82. Kaminsky A.A. Laws of Growth of the Prefracture Zone at the Edge of a Macrocrack in a Polymeric Material // Sov. Appl. Mech. – 1988. – 24, N 2. – P. 163 – 169.
83. Kaminsky A.A. Subcritical crack growth in polymer composite materials // Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge / Ed. G Cherepanov. – Malabar, FL: Krieger Publishing Company, 1998. – P. 758 – 763.
84. Kaminsky A.A. Fundamentals of the Theory of the Long-Term Failure of Cracked Viscoelastic Anisotropic Bodies under Varying External Loads // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 10. – P. 974 – 980.
85. Kaminsky A.A. Investigation of Deforming of Anisotropic Viscoelastic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 11. – P. 1434 – 1457.
86. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S. Long-Term Crack Resistance of an Orthotropic Viscoelastic Plate with a Crack under Biaxial Loading. Safe Loads // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 9. – P. 747 – 753.
87. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S. Modelling the Failure of Orthotropic Materials Subject to Biaxial Loading // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, N 10. – P. 812 – 819.
88. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S., Bastun V.N. On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. – 2011. – 34, N 5. – P. 345 – 355.
89. Kaminsky A.A., Chernoiivan Y.A. Closing of the cleavage crack in isotropic viscoelastic body // Int. J. Fracture. – 2002. – 113. – P. L9 – L14.
90. Kaminsky A.A., Chernoiivan Y.A. On the crack in viscoelastic isotropic media opened by the rigid growing wedge // Int. J. Fracture. – 2002. – 117. – P. L15 – L19.
91. Kaminsky A.A., Chernoiivan Y.A. Closing of wedged crack in orthotropic viscoelastic composite // Int. J. Fracture. – 2004. – 130, N3. – P. 635 – 649.
92. Kaminsky A.A., Chernoiivan Y.A. Wedging of a Viscoelastic Orthotropic Composite // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 4. – P. 352 – 357.
93. Kaminsky A.A., Chernoiivan Y.A. Splitting a Viscoelastic Orthotropic Body with a Rigid Wedge of Thickness Increasing with Time // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 5. – P. 527 – 535.
94. Kaminsky A.A., Gavrilov D.A., Patsaev V.N. Experimental Verification of the Postulates of the Mechanics of Delayed Fracture of Viscoelastic Polymers // Sov. Appl. Mech. – 1984. – 20, N 9. – P. 801 – 806.
95. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. One Method of Solution of Problems in the Linear Theory of Viscoelasticity for Aging Anisotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 11. – P. 1121 – 1127.
96. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Subcritical Growth of Macrocracks in an Aging Orthotropic Viscoelastic Composite under Static Loads // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, N 6. – P. 621 – 626.
97. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Subcritical Growth of a Crack in a Transversally Isotropic Aging Composite under Long-Term Static Loading // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, N 12. – P. 1263 – 1271.
98. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. A continued fraction operator technique for viscoelasticity problems involving anisotropic aging materials // J. Math. Sci. – 2000. – 101, N 1. – P. 2780 – 2784.
99. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Delayed fracture of an orthotropic body subjected to two-dimensional deformation // J. Math. Sci. – 2000. – 101, N 6. – P. 3637 – 3642.
100. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Subcritical crack growth in an aging viscoelastic composite under plane strain conditions // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 2. – P. 181 – 187.
101. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Initiation and stable growth of penny-shaped crack in aging viscoelastic transversally isotropic material // Theor. Appl. Fracture Mech. – 2002. – 38. – P. 243 – 254.
102. Kaminsky A.A., Gavrilov G.V. Subcritical Stable Growth of a Penny-Shaped Crack in an Aging Viscoelastic Body with Cylindrical Anisotropy // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 1. – P. 68 – 78.
103. Kaminsky A.A., Nizhnik S.B. Study of the Laws Governing the Change in the Plastic Zone at the Crack Tip and Characteristics of the Fracture Toughness of Metallic Materials in Relation to their Structure (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 10. – P. 777 – 798.

104. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Modelling a Crack with a Fracture Process Zone in a Nonlinear Elastic Body // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – P. 552 – 562.
105. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Delayed Fracture of a Transversally Isotropic Viscoelastic Material with a Crack under a Cyclic Load // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 111 – 117.
106. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* The Delayed Fracture of an Isotropic Viscoelastic Plate with a Microcrack under a Varying Load // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 5. – P. 665 – 672.
107. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Development of a Crack with a Considerable Prefracture Zone in a Viscoelastic Orthotropic Plate under Variable Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 6. – P. 811 – 820.
108. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Stable growth of penny-shaped crack in viscoelastic composite material under time-dependent loading // *Theor. Appl. Fracture Mech.* – 2001. – **35**. – P. 211 – 218.
109. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* The Long-Term Fracture of the Layered Viscoelastic Plate with Through Crack under the Changing in Time Load // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 6. – P. 731 – 740.
110. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Viscoelastic Deformation of a Reinforced Plate with a Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 12. – P. 1508 – 1517.
111. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* On the Application of Branched Operator Continued Fractions for a Boundary Problem of Linear Viscoelasticity // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 115 – 126.
112. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Growth of a Penny-Shaped Crack with a Nonsmall Fracture Process Zone in a Composite // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 8. – P. 866 – 871.
113. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O.* Investigation of the displacement of the faces of two collinear cracks of equal length // *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* – 2011. – N 11. – P. 70 – 75.
114. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O.* Model of growth and coalescence of two collinear cracks in viscoelastic body // *J. Math. Sci.* – 2013. – **190**, N 5. – P. 697 – 709.
115. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O.* Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model // *Int. J. Solids and Struct.* – 2013. – **50**, N 19. – P. 2929 – 2942.
116. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.A.* Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 293 – 302.
117. *Knauss W.G.* Delayed failure – the Griffith problem for linearly viscoelastic materials // *Int. J. Fract. Mech.* – 1970. – **6**, N 1. – P. 7–20.
118. *Knauss W.G.* On steady propagation of a crack in a viscoelastic sheet: Experiment and analysis // *Deformation and fracture of high polymers.* – New York: Plenum Press, 1974. – P. 501 – 541.
119. *Knauss W.G.* Time dependent fracture and cohesive zones // *Trans. ASME. J. of Eng. Materials and Technology.* – 1993. – **115**, N 6. – P. 262 – 267.
120. *Kostrov B. V., Nikitin L. V.* Some general problems of mechanics of brittle fracture // *Arch. Mech. Stosow.* – 1970. – **22**, N 2. – P. 749 – 775.
121. *Lahellec N., Suquet P.* Effective behavior of linear viscoelastic composites: a time integration approach // *Int. J. Solids and Struct.* – 2007. – **44**, N 2. – P. 507 – 523.
122. *Lilley J., Holloway D.G.* Crazeing in epoxy resins // *Phil. Mag.* – 1973. – **28**, N 1. – P. 215 – 220.
123. *Mai Y.W.* Quasi-static cracking in polycarbonate // *Int. J. Fracture.* – 1973. – **9**, N 3. – P. 349 – 351.
124. *Maghous S., Creus G.J.* Periodic homogenization in thermoviscoelasticity: case of multilayered media with aging // *Int. J. Solids and Struct.* – 2003. – **40**, N 4. – P. 851 – 870.
125. *Marshall G.P., Culver L.P., Williams J.G.* Fracture phenomena in polystyrene // *Int. J. Fracture.* – 1973. – **9**, N 3. – P. 295 – 309.
126. *McCartney L.N.* Crack propagation, resulting from a monotonic increasing applied stress, in a linear viscoelastic material // *Int. J. Fracture.* – 1977. – **13**, N 5. – P. 641 – 654.
127. *McCartney L.N.* Crack propagation in linear viscoelastic solids: some new results // *Int. J. Fracture* – 1978. – **13**, N 5. – P. 547 – 554.
128. *McCartney L.N.* Crack growth laws for a variety of viscoelastic solids using energy end COD fracture criteria // *Int. J. Fract.* – 1979. – **15**, N 1. – P. 31 – 40.
129. *Narisawa J., Kondo T.* Kinetics of Craze Formation in Glassy Polymers // *J. Polym. Sci.* – 1973. – **11**. – P. 223 – 232.
130. *Savin G.N., Kaminsky A.A.* The Growth of Cracks During the Failure of Hard Polymers // *Sov. Appl. Mech.* – 1967. – **3**, N 9. – P. 22 – 25.
131. *Schaperly R.A.* A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media // *Int. J. Fracture.* – 1975. – **11**, N 1. – P. 141 – 159.
132. *Schaperly R.A.* Time - Dependent Fracture: Continuum aspects of crack growth // In: *Encyclopedia of materials science and engineering.* – Oxford, New York: Pergamon Press, 1986. – P. 5043 – 5053.
133. *Schaperly R.A.* A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions // *J. Franklin Inst.* 1966. – **279**, N 4. – P. 268 – 289.

134. *Sih G.C., Liu B.* Mesofracture mechanics: a necessary link // *Theor. Appl. Fracture Mech.* – 2001. – **37**. – P. 371 – 395.
135. *Volterra V.* Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità // *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.* – 1909. – **18**, N 2. – P. 151 – 167.
136. *Wells A.A.* Critical tip opening displacement as fracture criterion // *Proc. Crack Propagation Symp., Cranfield.* – 1961. – **1**. – P. 210 – 221.
137. *Williams M.L.* The kinetic energy contribution to fracture propagation in a linearly viscoelastic material // *Int. J. Fracture Mech.* – 1968. – N 4. – P. 69 – 78.
138. *Williams M.L.* Fatigue-fracture growth in linearly viscoelastic material // *J. Appl. Physics* – 1967. – **38**, N 11. – P. 4476 – 4480.
139. *Williams J.G.* Fracture mechanics of polymers. – New York: Wiley, 1984. – 320 p.
140. *Wnuk M.P.* Subcritical growth of fracture (inelastic fatigue) // *Int. J. Fract. Mech.* – 1971. – **7**, N 4. – P. 383 – 407.
141. *Wnuk M. P.* Initiation of fracture in viscoelastic solids, experiment vs. theory // *Proc. Int. Symp. Waterloo.* – 1972. – P. 673 – 684.
142. *Wnuk M.P.* Quasi-static extension of crack contained in viscoelastic-plastic solids // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1974. – **41**, N 1. – P. 234 – 242.
143. *Wnuk M.P., Knauss W.G.* Delayed fracture in viscoelastic-plastic solids // *Int. J. Solids and Struct.* – 1970. – **6**, N 7. – P. 995 – 1010.
144. *Wu E.M.* Application of fracture mechanics to anisotropic plates // *Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech.* – 1967. – **34**, N 4. – P. 26 – 37.
145. *Xu C., Siegmund T., Ramani K.* Rate-dependent crack growth in adhesives: I. Modeling approach // *Int. J. Adhesion and Adhesives.* – 2003. – **23**, N 1. – P. 9 – 13.
146. *Yaffee M.B., Kramer E. J.* Plastisization effects on environmental craze microstructure // *J. Mater. Sci.* – 1981. – **16**, N 8. – P. 2130 – 2136.
147. *Yokobori T.* The strength, fracture and fatigue of materials. – Groningen: P. Noordhoff, 1965. – 372 p.
148. *Ziming Y., Ayari M.L.* Prediction of crack propagation in anisotropic solids // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – **49**, N 6. – P. 797 – 808.
149. *Zhou F., Molinari J.F., Ramesh K.T.* A cohesive model based fragmentation analysis: effects of strain rate and initial defects distribution solids // *Int. J. Solids and Struct.* – 2005. – **42**, N 18 – 19. – P. 5181 – 5207.

Поступила 12.09.2013

Утверждена в печать 29.05.2014

