

¹ В. Е. Буданов, канд. физ.-мат. наук,

² О. В. Буданов,

¹ Н. Н. Суслов, канд. физ.-мат. наук.

¹ Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины
Харьков, e-mail: shuben@ipmach.kharkov.ua

² Радиоастрономический институт НАН Украины
Харьков, e-mail: o.budanov@gmail.com

Ключові слова: енергія магнітостатичного шару,
принцип віртуальної роботи, еліпсоїдальний шар.

УДК 537. 611

ОБ ЭНЕРГИИ МАГНИТО- СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

З використанням принципу віртуальної роботи розглянуто силову дію статичного електричного та магнітних полів, локалізованих в еліпсоїдальному шарі, що рівномірно рухається, на точковий заряд, що рухається з ним синхронно. Доведено, що для уникнення порушення принципу збереження енергії статичне магнітне поле повинно мати від'ємну енергію.

Введение

Сомнения в достоверности знака «плюс», стоящего перед слагаемым для плотности энергии магнитостатического поля в формуле Пойнтинга, следует, например, из такого факта. Если взять два одинаковых точечных заряда, равномерно движущихся с одинаковыми скоростями, то в общем случае на заряды будут действовать силы электрического отталкивания, направленные вдоль прямой их соединяющей. Но вдоль этой же линии будут действовать составляющие сил магнитного притяжения, так что для сближения зарядов будет затрачена работа меньшая той, когда бы магнитное взаимодействие отсутствовало. И этот факт обуславливает выдвигение *гипотезы об отрицательности энергии магнитостатического поля*.

Ситуацию усугубляют слова Фейнмана, сказанные после повторения им вывода формул Пойнтинга для плотности энергии u и плотности потока энергии по поводу их корректности [1]: «...откуда же нам известно, что, покрутив формулами, мы не придем к другому выражению для u и другому выражению для \vec{S} , до сих пор никто не думал над экспериментальной проверкой того, которое же из них истинное, надо сознаться, что мы так и не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле».

Несомненно, эти слова следует считать приглашением к исследованию.

При этом, конечно же, возникает естественный вопрос, а почему же никем ранее не высказывалась гипотеза об отрицательности энергии магнитостатического поля? Наиболее вероятный ответ здесь следующий: проводимые исследователями многочисленные эксперименты и сопровождающие их теоретические расчеты из области прикладной электродинамики просто не затрагивали магнито-статическую в той мере, когда могло бы быть обнаружено несоответствие экспериментальных и теоретических результатов, либо когда последние вступали в конфликт с принципом сохранения энергии.

Высказанная выше гипотеза вылилась в необходимость записать формулу Пойнтинга для плотностей энергии статических электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в виде

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \chi \frac{\epsilon_0 c^2}{2} H^2 \quad (1)$$

и рассмотреть несколько вспомогательных примеров, призванных определить, какое из двух значений χ : -1 или $+1$ истинно. В (1) ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; c – скорость света.

В рассматриваемых примерах пробный заряд q_T во всякий момент времени находится вне области пространства C с резко очерченными границами, в которой имеются статические электрическое \vec{E}_c и магнитное \vec{H}_c поля. Эти поля созданы покоящимися или движущимися с постоянными скоростями зарядами по границам области C так, что вне области C $\vec{E}_c = 0$ и $\vec{H}_c = 0$.

Электромагнитная энергия во всем пространстве U_Σ в соответствии с (1) запишется

$$U_\Sigma = \frac{\epsilon_0}{2} \int E_c^2 dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int E_T^2 dv + \chi \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int H_c^2 dv + \chi \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int H_T^2 dv + U^E + U^H \quad (2)$$

© В. Е. Буданов, О. В. Буданов, Н. Н. Суслов, 2016

Здесь

$$U^E = \varepsilon_0 \int E_c E_T \cos \Theta^E dv, \quad U^H = \chi \varepsilon_0 c^2 \int H_c H_T \cos \Theta^H dv; \quad (3)$$

где E_T, H_T – амплитуды полей точечного заряда; Θ^E – угол между векторами \vec{E}_c и \vec{E}_T ; Θ^H – между \vec{H}_c и \vec{H}_T .

Первые четыре слагаемых в (2) описывают энергии собственных полей E_c, E_T, H_c, H_T и не зависят от взаимного расположения заряда q_T и области S . Слагаемые U^E и U^H представляют собой энергии полей сопричастия точечного заряда и зарядов, создающих поля E_c и H_c ; эта энергия может зависеть от взаимного расположения точечного заряда и области S . Поэтому в соответствии с принципом виртуальной работы градиент энергии сопричастия в месте расположения точечного заряда определит действующую на него силу.

В дальнейших выкладках будет участвовать понятие конического слоя – при пересечении этого слоя со сферическим и эллипсоидальными слоями будут очерчиваться элементы объемов при интегрировании.

Итак, коническим слоем будем называть часть пространства, ограниченную двумя коническими поверхностями с общей вершиной, направляющими которых являются две концентрические окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси конических поверхностей, т. е. прямой, соединяющей центр упомянутых окружностей с вершиной конических поверхностей. Углы между осью и образующими – φ и $\varphi + d\varphi$, при этом $d\varphi$ – малая величина; пробный заряд q_T и вершина конического слоя помещены в начало декартовой системы координат XYZ .

1. Точечный заряд вблизи сферического слоя

Первым рассмотрим случай, когда покоящийся точечный заряд расположен вблизи сферического слоя, образованного двумя покоящимися концентрическими однородно заряженными сферами радиусов ρ и $\rho + d\rho$ зарядами q_c и $-q_c$ соответственно. Как известно, электрическое поле всюду вне такого слоя равно нулю (то есть, по формуле Лоренца, силовое воздействие на пробный заряд здесь отсутствует), а внутри слоя такое же, как поле точечного заряда q_c , расположенного в центре образующих слой сфер, т. е. в точке $R(R, 0, 0)$

$$\vec{E}_c = \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \frac{q_c}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор, соединяющий точку R с точкой наблюдения.

Пробный заряд q_T создает поле

$$\vec{E}_t = \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий начало координат с точкой наблюдения.

На рис. 1 изображено сечение плоскостью $Z = 0$ пересекающихся сферического и конического слоев – рис. 1, а для $R > \rho + d\rho$; рис. 1, б для $R < \rho$ соответственно. φ_A и φ_B , α_A и α_B – угловые координаты точек A и B .

Угол Θ^E из (3): $\Theta_{AB} = \alpha_{AB} - \varphi_{AB}$. (Под каждой формулой с двойным индексом AB следует понимать две формулы: одна с индексом A , а другая с индексом B).

$$\text{Для } R > \rho + d\rho \quad 0 < \varphi_{AB} = \varphi < \arcsin \frac{\rho}{R}.$$

$$\text{Для } R < \rho \quad 0 < \varphi_B = \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_A = \pi + \varphi.$$

Поскольку треугольник RAB равнобедренный, имеем

$$\begin{cases} \cos(\alpha_B - \varphi_B) = -\cos(\alpha_A - \varphi_A) & \text{для } R > \rho + d\rho \\ \cos(\alpha_B - \varphi_B) = -\cos(\alpha_A - \varphi_A) & \text{для } R < \rho. \end{cases} \quad (4)$$

В качестве элемента объема интегрирования при вычислении энергии соприсутствия возьмем два кольца *A* и *B*, вырезаемых коническим слоем в слое сферическом

$$dv_{AB} = 2\pi r_{AB}^2 \sin \varphi d\varphi d\rho \frac{1}{\cos \Theta_B}.$$

Электростатическая энергия соприсутствия (3) в каждом из упомянутых колец

$$dU_{AB}^E = \frac{q_c q_T}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\cos \Theta_{AB}}{r_{AB}^2 \rho^2} \frac{2\pi r_{AB}^2 \sin \varphi d\varphi d\rho}{\cos \Theta_B}.$$

Следовательно, с учетом (4), энергия соприсутствия в сферическом слое

$$\delta U^E = \int dU_A^E + \int dU_B^E = \begin{cases} 0 & R > \rho + d\rho; \\ \frac{q_c q_T d\rho}{4\pi \epsilon_0 \rho^2} & R < \rho. \end{cases} \quad (5)$$

Как очевидно, градиент энергии соприсутствия δU^E всюду вне сферического слоя равен нулю; т. е. вычисленное с помощью принципа виртуальной работы возможное силовое воздействие на точечный пробный заряд не обнаружено, что не неожиданно.

2. Движущиеся сферический слой и точечный заряд

Рассмотрим описанную в предыдущем примере ситуацию из такой инерциальной системы отсчета $X^P Y^P Z^P$, в которой система отсчета XYZ движется со скоростью $\vec{V} \{pc, 0, 0\}$, так, что ось OX скользит по оси $O^P X^P$, а оси OY и $O^P Y^P$, OZ и $O^P Z^P$ в рассматриваемый момент времени совпадают. Поскольку существует эффект Лоренца сокращения продольных размеров движущихся тел в $(1 - p^2)^{-0.5}$ раз, то рис. 2, на котором изображена рассматриваемая ситуация, получается из рис. 1, а соответствующим изменением продольного масштаба: сферический слой превратился в эллипсоидальный (на рис. 2 $p = 0,866$).

Принцип относительности Галилея обязывает в результате теоретического рассмотрения ситуации на рис. 2 получить тот же вывод об отсутствии силового воздействия на пробный заряд.

Итак, электрическое \vec{E}_T^P и магнитное \vec{H}_T^P поля равномерно движущегося точечного заряда, как известно, записываются

$$\vec{E}_T^P = \frac{\vec{r}_P}{r_P^3} \frac{q_T}{4\pi \epsilon_0} \frac{1 - p^2}{(1 - p^2 \sin^2 \varphi_P)^{3/2}}, \quad \vec{H}_T^P = \frac{\vec{V} \times \vec{E}_T^P}{c^2}. \quad (6)$$

Выражения для собственных полей \vec{E}_c^P и \vec{H}_c^P в эллипсоидальном слое получаются из (6) заменой $\rho \rightarrow r$, $q_c \rightarrow q_T$ и $\alpha \rightarrow \varphi$.

Таким образом, энергия соприсутствия (3) в эллипсоидальном слое с учетом (6) имеет плотность

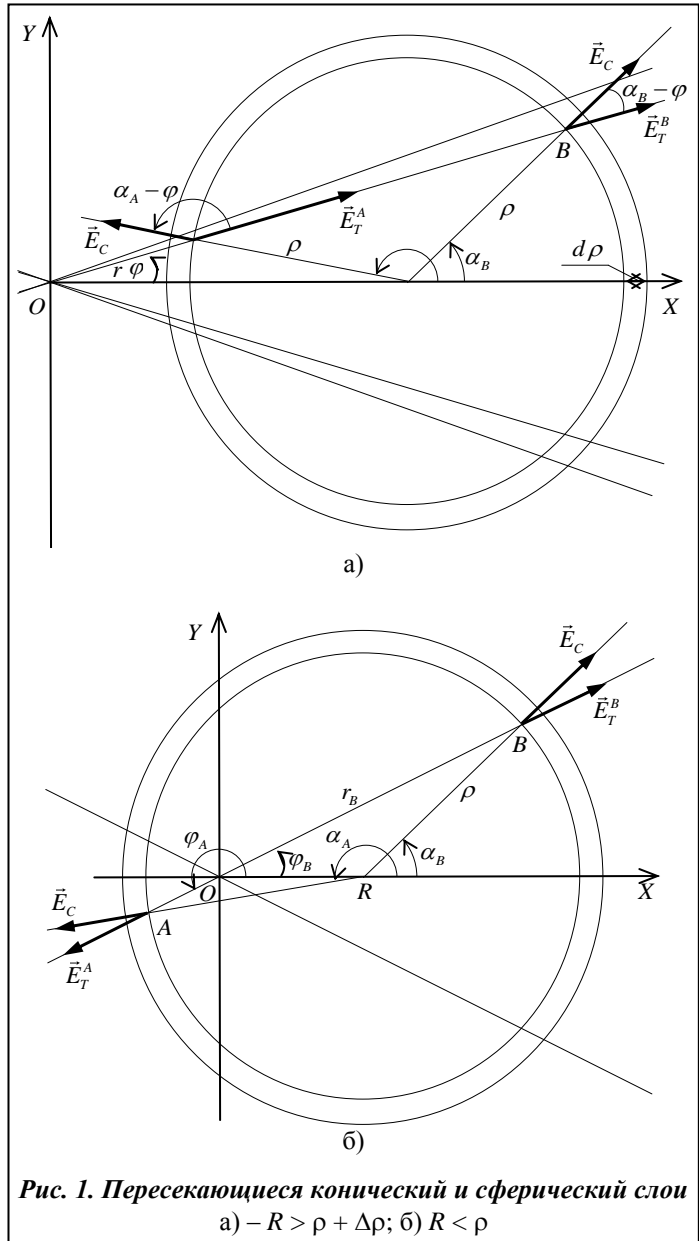
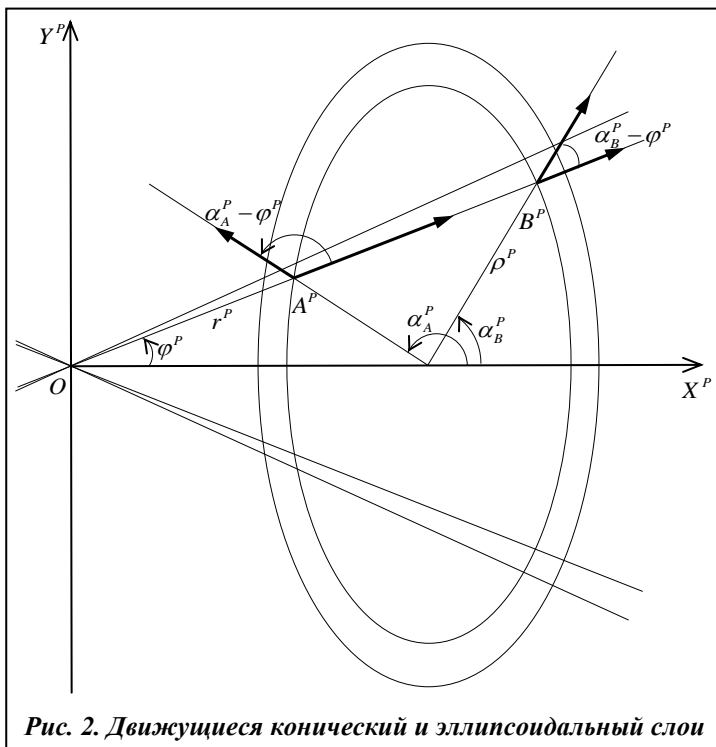


Рис. 1. Пересекающиеся конический и сферический слой
а) $R > \rho + \Delta\rho$; б) $R < \rho$



$$u^P = \varepsilon_0 E_T^P E_C^P (\cos \Theta^P + \chi p^2 \sin \alpha_p \sin \varphi_p). \quad (7)$$

Здесь Θ^P подобны Θ из предыдущего случая $p = 0$. В каждой точке направления векторов \vec{H}_T^P и \vec{H}_C^P совпадают.

Для того чтобы избежать громоздкого интегрирования по эллипсоидальному слою, сделаем замену переменных, позволяющую, как и в предыдущем случае, проводить интегрирование по сферическому слою

$$x_p = x\sqrt{1-p^2}, \quad y_p = y, \quad z_p = z. \quad (8)$$

Этой заменой мы возвращаемся к геометрии предыдущего случая (рис. 1).

Из (8) следует

$$r \sin \varphi = r_p \sin \varphi_p, \quad (9)$$

$$\rho \sin \alpha = \rho_p \sin \alpha_p,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1-p^2} \operatorname{tg} \varphi_p, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1-p^2} \operatorname{tg} \alpha_p.$$

Из (10) получаем

$$\begin{cases} \sin \varphi_p = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \varphi}}; & \cos \varphi_p = \frac{\sqrt{1-p^2} \cos \varphi}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \varphi}} \\ \sin \alpha_p = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \alpha}}; & \cos \alpha_p = \frac{\sqrt{1-p^2} \cos \alpha}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \alpha}} \end{cases} \quad (11)$$

Из (9) и (11) следует

$$r_p^2 = r^2(1-p^2 \cos^2 \varphi), \quad \rho_p^2 = \rho^2(1-p^2 \cos^2 \alpha). \quad (12)$$

Из (11) также имеем

$$\sin \varphi_p \sin \alpha_p = \frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1-p^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (13)$$

$$\cos(\alpha_p - \varphi_p) = \frac{\cos(\alpha - \varphi) - p^2 \cos \varphi \cos \alpha}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1-p^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (14)$$

Выражения (11) и (12) позволяют вычислить

$$\frac{1-p^2}{r_p^2(1-p^2 \sin^2 \varphi_p)^{3/2}} = \frac{(1-p^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}{r^2 \sqrt{1-p^2}}; \quad (15)$$

$$\frac{1-p^2}{\rho_p^2(1-p^2 \sin^2 \alpha_p)^{3/2}} = \frac{(1-p^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}{\rho^2 \sqrt{1-p^2}}. \quad (16)$$

Элемент объема интегрирования dv_{AB}^P – два кольца A и B , вырезаемые коническим слоем в эллипсоидальном слое, как очевидно, имеют объем в $(1-p^2)^{-1/2}$ раз меньше объема тех колец, которые получаются после замены переменных (8), т. е.

$$dv_{AB}^P = \sqrt{1-p^2} 2\pi r^2 \frac{\sin \varphi d\varphi d\rho}{\cos(\alpha_B - \varphi_B)}. \quad (17)$$

Используя (6), (7), (13)–(17), получаем энергию соприсутствия в каждом из колец

$$dU_{AB}^P = u_{AB}^P dv^P = \frac{q_T q_c \sin \varphi d\varphi d\rho \{ \cos(\alpha - \varphi) - p^2 \cos \varphi \cos \alpha + p^2 \chi \sin \varphi \sin \alpha \}}{8\pi \epsilon_0 \sqrt{1-p^2} \rho^2 \cos(\alpha_B - \varphi_B)}.$$

Суммарная энергия соприсутствия в кольцах *A* и *B* будет

$$dU^P = dU_A^P + dU_B^P = \frac{q_T q_c \sin \varphi d\varphi d\rho}{8\pi \epsilon_0 \sqrt{1-p^2} \cos(\alpha_B - \varphi_B) \rho^2} \{ \cos(\alpha_A - \varphi_A) + \\ + \cos(\alpha_B - \varphi_B) - p^2 \cos(\alpha_A + \chi \varphi_A) - p^2 \cos(\alpha_B + \chi \varphi_B) \}.$$

Как и при $p = 0$, для углов α и φ выполняются соотношения (4), поэтому только при $\chi = -1$ энергия соприсутствия в эллипсоидальном слое будет

$$\delta U^P = \int dU^P = \begin{cases} 0 & \text{для } R > \rho + d\rho; \\ \frac{q_T q_c d\rho \sqrt{1-p^2}}{4\pi \epsilon_0 \rho^2} & \text{для } R < \rho, \end{cases} \quad (18)$$

и, поскольку δU^P не зависит от R – расстояния между пробным зарядом и центром сферического слоя, градиент этой энергии вне слоя будет равен нулю.

Если же продолжать считать энергию статического магнитного поля положительной ($\chi = 1$), то, поскольку $\cos(\alpha_A + \varphi_A)$ и $\cos(\alpha_B + \varphi_B)$ не связаны такими простыми соотношениями, как (4), то энергия соприсутствия в эллипсоидальном слое будет выражаться громоздким интегралом, который зависит от параметра R . Поэтому градиент δU^P и вне эллипсоидального слоя оказывается не равным нулю, а это – абсурд: наличие или отсутствие силового взаимодействия физических объектов в соответствии с принципом относительности не может определяться скоростью той инерциальной системы отсчета, в которой эта ситуация рассматривается. Примечательно, что энергия соприсутствия в движущемся слое (18) меньше таковой в неподвижном слое (5).

Таким образом, мы получили свидетельство в пользу высказанной здесь гипотезы об отрицательности энергии статического магнитного поля; при этом, подчеркнем, нахождение силы воздействия на пробный заряд через градиент энергии соприсутствия осуществлялось тогда, когда этот заряд находится вне области, где сосредоточена энергия соприсутствия.

Не лишним также будет заметить, что, если, обратившись к рис. 1, а, рассмотреть ситуацию, когда находящийся в точке 0 заряд имеет скорость $\vec{V}_T \{pc, 0, 0\}$, а затем взглянуть на эту же ситуацию из такой инерциальной системы отсчета, в которой заряд неподвижен, а сферический слой движется со скоростью $\vec{V}_C \{-pc, 0, 0\}$, превратившись в эллипсоидальный, нетрудно получить, что скорость распространения силового действия, за которое ответственен градиент энергии соприсутствия, в точности равна скорости света.

3. Об энергии электромагнитного поля равномерно движущегося заряда

Приведем еще одно свидетельство, превращающее гипотезу об отрицательности магнитостатической энергии в закон, на этот раз, эстетического свойства.

Отталкиваясь от формулы (1), вычислим сумму энергий собственных полей \vec{E}_c^P и \vec{H}_c^P в эллипсоидальном слое (рис. 2). Поля \vec{E}_c^P и \vec{H}_c^P имеют вид (6), если там заменить $\rho \rightarrow r$, $q_c \rightarrow q_T$ и $\alpha \rightarrow \varphi$.

Как и ранее, воспользовавшись формулами (1), (6), (11), (12), и (16), получаем

$$\begin{aligned} \delta U^P &= \delta U_E^P + \delta U_H^P = \frac{q_c^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dp}{2\rho^2 \sqrt{1-p^2}} \int_0^\pi (1-p^2 \cos^2 \alpha + \chi p^2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{q_c^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \cdot \frac{dp}{\rho^2} \left(1 - \frac{p^2}{3} + \chi p^2 \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Если продолжать считать энергию магнитного поля положительной ($\chi = 1$), то собственная электромагнитная энергия в слое (а значит, для точечного заряда – во всем пространстве) будет зависеть от относительной скорости p по закону

$$U^P = \frac{U^0}{\sqrt{1-p^2}} \left(1 + \frac{p^2}{3} \right), \quad (19)$$

где U^0 – энергия при $p = 0$.

А если считать магнитную энергию отрицательной ($\chi = -1$), то

$$U^P = U^0 \sqrt{1-p^2}. \quad (20)$$

Не будь ранее предоставленных в п. 2 доказательств о том, что магнитостатическая энергия – отрицательна, было бы невозможным, строго говоря, отдать предпочтение формуле (20) перед (19). Но, по сравнению с (20), зависимость (19) не типична для релятивизма своей «неизыщностью», которая свидетельствует, как теперь становится ясно, о ее неверности; так что «неизыщность» окончательных формул в подобных случаях – это сигнал исследователю подвергнуть их сомнению.

Тот факт, что собственная электромагнитная энергия электрона зависит от его относительной скорости p не в виде

$$U^P = \frac{U^0}{\sqrt{1-p^2}}, \quad (21)$$

не несет в себе противоречия: по закону (21), как впервые указал Пуанкаре, изменяется сумма всех частей энергии электрона, но не ее электромагнитная часть (20). Как минимум, существует еще энергия W , ответственная за т. н. «напряжения Пуанкаре» – за силы, удерживающие части электрона от разлета их в разные стороны под действием кулоновских сил отталкивания, и эта энергия, в соответствии с принципом сохранения энергии, с увеличением скорости должна расти быстрее, чем (21), например, по закону

$$W^P = W^0 \frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Следует также добавить, что магнитостатическое поле – не единственное поле, чья энергия отрицательна; в [2], [3] отмечен известный факт отрицательности энергии статического гравитационного поля.

Заключение

Представленные выше доказательства теоремы об отрицательности энергии магнитостатического поля были проведены при рассмотрении энергии сопричастия полей пробного заряда q_T и зарядов, расположенных по границам сферического (эллипсоидального) слоя. Кажущийся несколько искусственным такой выбор объектов, однако, позволил, во-первых, избежать бесконечностей при интегрировании; во-вторых – сделать способ доказательства максимально непохожим на «кручение формулами» – ведь представленные доказательства при желании можно продублировать экспериментально. И, в-третьих, что более важно, в представленных доказательствах по сути речь идет об энергии полей сопричастия двух простейших объектов классической электродинамики – точечных зарядов q_T и q_c : все пространство вокруг заряда q_c можно считать подразделенным на сферические (эллипсоидальные) слои, для каждого из которых теорема об отрицательности энергии магнитостатического поля доказана.

Полученный в п. 3 вывод об убывании c с ростом скорости полной электромагнитной энергии собственного поля точечного заряда (его электромагнитной массы) за счет отрицательности энергии магнитостатического поля не является слишком неожиданным. В [1] Фейнман описывает «замешательство», возникшее в среде физиков, когда электромагнитные массы электрона, вычисленные из его энергии и из импульса не совпали.

Положение тогда спасла энергия, обеспечивающая «напряжения Пуанкаре», хотя эти «напряжения» экспериментально и не изучены. Различные теоретические модели «напряжений» предсказывают различные свойства электрона. Но основная польза от «напряжений Пуанкаре» – это возможность относить на их счет любые нарушения принципа сохранения энергии, тем самым спасая этот главный постулат физики.

Покоящийся заряд, как известно, не создает магнитного поля; появление же этого поля у движущегося заряда, как многократно отмечалось не только в [1], есть такой же релятивистский эффект, как и сокращение продольных размеров или возрастание инертной массы объекта. По аналогии с электростатикой, энергия магнитостатического поля подсознательно предполагалась положительной. Но ведь и размеры и массы движущихся тел в дорелятивистские времена подсознательно считались независимыми от скорости. И только строгие, на базе оснований классической электродинамики – уравнений Максвелла, формулировка и доказательство необходимых теорем позволили избавиться от существовавших предрассудков, один из которых, доживший до настоящего времени, устранен в этой статье.

И, наконец, отметим, что предварительные результаты по рассмотренной здесь тематике опубликованы в [4].

Литература

1. *Фейнман, Р.* Фейнмановские лекции по физике: В 10-ти т. / Р. Лейтон, М. Сэндс – М.: Мир, 1965. – Т. 6. – 343 с.
2. *Буданов, В. Е.* Об одной эквивалентной формулировке оснований электродинамики Фарадея–Максвелла / В. Е. Буданов – Харьков, 1992. – 47 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения, № 362).
3. *Буданов, В. Е.* Особые свойства электрических силовых линий точечного заряда / В. Е. Буданов // Радиофизика и электроника. – 2000. – № 2. – С. 144–157.
4. *Буданов, В. Е.* Принцип виртуальной работы в теории эффекта Аронова–Бома / В. Е. Буданов, О. В. Буданов – Харьков, 2011. – 24 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного).

Поступила в редакцию 02.04.16